
D. EMENDÖRFER / K. H. HÖCKER
THEORIE DER KERNREAKTOREN
TEIL I
B·I·
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER
BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT

411/411a*

THEORIE DER KERNREAKTOREN

ERSTER TEIL

VON

D. EMENDÖRFER UND K. H. HÖCKER

Institut für Kernenergetik
der Universität Stuttgart



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

411/411 a *

Druckfehlerberichtigung Teil I

S. 135, 11. Zeile: Term statt Therm

S. 166/167: Die Abbildungen 3.1 und 3.2 sind zu vertauschen.

S. 179, 2. Zeile der Formel (4.4): $\Sigma_T \widetilde{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k|}$ statt $\Sigma_T |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k|$

S. 215, Ordinate der Abb. 2.7: $\overline{\sigma_f^{235}}$ statt σ_f^{235}

S. 217 bis 223: In den Formeln (3.1), (3.7), (3.9), (3.21), (3.25), (3.26), (3.29), (3.30) ist h durch ħ zu ersetzen.

S. 223, (3.30): $\sqrt{\frac{E'}{E}}$ statt $\sqrt{\frac{E}{E'}}$

S. 228, Tab. 3.1, mittlere Spalte: Einheit $°K^{-1}$

Druckfehlerberichtigung Teil II

S. 242 Zeile 21/22: (Reaktoren mit einheitlicher Materialzusammensetzung)

S. 322, 5.-letzte Zeile: 6% statt 7%.

S. 326, 18. Zeile: ψ statt Ψ

S. 327, 18. Zeile: $n\ (\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ statt $n\ (\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega} t)$

S. 334, 8. Zeile: Φ_l statt Φ_1

Gesamtherstellung: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer
Bindearbeit: Lachenmaier, Reutlingen
Printed in Germany
A

VORWORT

Vor 30 Jahren wurde die Kernspaltung entdeckt, schon wenige Wochen danach die Möglichkeit einer Kettenreaktion und damit einer Kernenergiefreisetzung in technischem Maßstab erkannt. Die Geburtsstunde der Reaktortheorie liegt somit im Jahr 1939. Der erste Reaktor in USA (1942) und die unterkritischen Anordnungen in Deutschland (1940 bis 1945) wurden mit Rechenschieber und Tischrechenmaschine nach relativ einfachen Methoden berechnet.

In den letzten Jahren hat sich der Reaktorbau in der Großindustrie lebhaft entwickelt. In den USA entfällt zur Zeit mehr als die Hälfte der jährlichen Kraftwerksbestellungen auf Kernkraftwerke. Die dafür vorgesehenen Reaktoren liegen im Leistungsbereich von 600 bis 1000 MW. Aufgrund des hohen Energieinhalts der Kernbrennstoffe eignen sich Kernreaktoren auch für Spezialaufgaben wie z. B. die Energieversorgung von entlegenen Wetterstationen und Satelliten, für Schiffsantrieb und Raketenantrieb. In der Forschung finden die Kernreaktoren vielseitige Verwendung als intensive Neutronenquellen.

Ein Kernreaktor muß heute sehr genau berechnet werden: der Leistungsreaktor aus wirtschaftlichen Gründen, ein Reaktor für Satelliten, um ein günstiges Leistungsgewicht zu erreichen. Die genaue Berechnung eines Kernreaktors erfolgt fast ausschließlich mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen. Es geht allenfalls eine überschlägige Abschätzung anhand von Erfahrungswerten und Näherungsformeln voraus. Ein modernes Buch über Reaktortheorie darf daher nicht bei den analytischen Lösungen stark vereinfachter Reaktormodelle stehenbleiben. Es muß die Ansätze für die Erstellung von Rechenprogrammen bringen.

Der vorliegende Band mit den Teilen 1 und 2 führt in die Grundlagen der Reaktortheorie und in die Berechnung des stationären Kernreaktors ein. Das erste Kapitel behandelt Kernbau und Kernspaltung, das zweite Kapitel vermittelt die für das Verständnis der Neutronenmultiplikation notwendigen Kenntnisse über die Wirkungsquerschnitte der Atomkerne. In den Kapiteln III bis VI stellen wir die Theorie der Neutronenbremsung, Neutronenther-

malisierung und Neutronendiffusion in elementarer Behandlung sowie nach der Transporttheorie dar. Der Band „Theorie des instationären Kernreaktors" bringt die Störung des stationären Zustandes, die Dynamik und Stabilität des Reaktors, sowie das Langzeitverhalten.

Bei der Stoffauswahl und der Darstellung suchen wir der Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Reaktortheorie – wie die Thermodynamik – ein Zweig der Physik ist, daß sie aber sehr eng mit der technischen Anwendung verknüpft ist und mehr und mehr von Ingenieuren beherrscht werden muß. Daher haben wir jene physikalischen Bereiche, die nicht als Allgemeingut angesprochen werden können, hier im Hinblick auf die Anwendung dargestellt. Wir hoffen, den Stoff in einer solchen Abgrenzung zusammengetragen zu haben, daß er dem Bedürfnis der Praxis einerseits und den didaktischen Gesichtspunkten andererseits gerecht wird.

Für einen Leser, der schnell einen Einblick in die Theorie der Kernreaktoren gewinnen möchte, haben wir bestimmte Abschnitte im Inhaltsverzeichnis mit einem Stern versehen. Die Folge dieser Abschnitte vermittelt das Rüstzeug für die Berechnung von Reaktoren nach einfachen Modellen.

Nimmt man die nicht gekennzeichneten Abschnitte hinzu, so bekommt man ein Bild vom derzeitigen Stand der Reaktortheorie. Über die herkömmliche Lehrbuchliteratur hinausgehend sind die exakte Berechnung der Resonanzabsorption (Kap. III), der Einfluß der chemischen Bindung auf die Neutronenthermalisierung (Kap. IV), Verfahren zur numerischen Lösung der Diffusions- und Transportgleichung (Kap. V und VI) sowie die Erststoßtheorie für das Brennstoffgitter der heterogenen Reaktoren (durchlaufend ab Kap. III) behandelt. Diese Problemkreise sind heute wesentliche Bestandteile der modernen Reaktortheorie, nicht zuletzt auf Grund der Anforderungen der Praxis. Durch Kurven und Tabellen haben wir versucht, die Verbesserung gegenüber den einfachen Rechenmodellen deutlich zu machen. Auf Spezialfragen, die nicht im Text behandelt werden konnten, haben wir durch Angabe der Originalliteratur verwiesen.

Wir haben vielen Abschnitten Aufgaben beigefügt. Sie sollen beim Leser die Freude am eigenen Können wecken. Die Lösungen findet man am Schluß jedes Bandes.

Dieses Buch soll all denen gewidmet sein, die in unserem Institut an der Vervollkommnung der Reaktortheorie gearbeitet haben. Ohne sie hätten wir das Manuskript nicht schreiben können. Unter

ihnen möchten wir besonders die Herren Dr. H. J. Siegert, Dr. M. Pucher und Dr. H. Schäffler nennen, die Entwürfe zu den Abschnitten über Neutronenbremsung, Neutronenstreuung an gebundenen Kernen und Rechenverfahren beigetragen haben. Unser besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. D. Lutz, der die Abschnitte über Regelstäbe und Doppel-P_l-Approximation verfaßte, in der Überprüfung von Formeln und Übungsaufgaben sowie beim Lesen des Manuskripts und der Korrekturfahnen hoch einzuschätzende Hilfe geleistet hat.

Stuttgart, im Dezember 1968

D. Emendörfer K. H. Höcker

INHALTSVERZEICHNIS

ERSTER TEIL

ZWEITER TEIL

I. KERNBAU UND KERNSPALTUNG

Wesentliche Eigenschaften eines Kernreaktors sind im Spaltprozeß und seinen Begleiterscheinungen angelegt. Dahin gehören die Energiefreisetzung, die Radioaktivität der Spaltprodukte und die Emission von prompten und verzögerten Neutronen, welche eine steuerbare Kettenreaktion ermöglicht. Die Kernspaltung und ihre Folgeprodukte sind ihrerseits durch die Gesetzmäßigkeiten des Kernbaus bestimmt. Ein Verständnis für den Aufbau und das Funktionieren eines Kernreaktors setzt die einschlägigen kernphysikalischen Grundlagen voraus. Wir stellen die wichtigsten dieser Gesetzmäßigkeiten in den ersten beiden Kapiteln zusammen.

1. Der Energieinhalt der Atomkerne

1.1. Die Kernkräfte

Der Atomkern ist zu etwa gleichen Teilen aus Protonen und Neutronen aufgebaut. Die Bindung dieser Bausteine, der Nukleonen, aneinander wird durch die Kernkräfte besorgt, eine physikalische Realität, die neben die geläufigen Kräfte der Gravitation und der elektromagnetischen Wechselwirkung tritt. Sie ist etwa gleich zwischen Proton – Proton, Neutron – Neutron und Proton – Neutron.

Tab. 1.1: Physikalische Eigenschaften des freien Protons und Neutrons.

Nukleon	Masse, g	Atomgewicht, ME*	Ladung	Spin	Halbwertszeit des β-Zerfalls
Proton	$1{,}672 \cdot 10^{-24}$	1,00728	$+$ e	$\frac{1}{2}\,\hbar$	stabil
Neutron	$1{,}674 \cdot 10^{-24}$	1,00867	0	$\frac{1}{2}\,\hbar$	12 min

* $1\ \text{ME} = \frac{m(^{12}\text{C})}{12} = 1{,}660 \cdot 10^{-24}\text{g} = 931{,}5\ \text{MeV}$. (ME Abkürzung für Masseneinheit.)

Für die nukleare Wechselwirkung ist eine stark anziehende Kraft mit einer extrem kurzen Reichweite von der Größe $2 \cdot 10^{-13}$ cm charakteristisch. Als Folge dieser anziehenden Kräfte würden die Nukleonen im Kern sehr dicht zusammenrücken, wenn nicht erstens innerhalb von $0{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm eine starke Abstoßung, der „harte Kern" des Nukleons, wirksam würde und zweitens die Kernkräfte teilweise den Charakter von quantenmechanischen Austauschkräften mit der Eigenschaft der Absättigung besäßen. Austauschkräfte wirken lediglich zwischen einer begrenzten Zahl von Teilchen anziehend, gegen weitere Teilchen dagegen abstoßend. Der „harte Kern" des Nukleons und die Eigenschaft der Absättigung bewirken, daß im Atomkern ein bestimmter mittlerer Abstand zwischen den Nukleonen aufrechterhalten wird, der unabhängig von der Zahl A der Nukleonen ist. Das Kernvolumen ist daher proportional zu A, der Kernradius R proportional zu $A^{1/3}$:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}, \qquad (1.1)$$

mit $R_0 = 1{,}22 \cdot 10^{-13}$ cm. Speziell für Uran mit $A = 238$ ergibt sich $R = 7{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm.

Wegen des festen mittleren Abstandes der Nukleonen und der kurzen Reichweite der anziehenden Kraft kann ein Nukleon lediglich auf seine unmittelbaren Nachbarn einwirken. Die Stärke der Bindung eines Nukleons im Kern ist daher näherungsweise unabhängig von der Nukleonenzahl, die Bindungsenergie des Kerns etwa proportional zu A. Größere Abweichungen treten lediglich bei den ganz leichten Kernen auf, wo noch jedes Nukleon mit jedem anderen in Wechselwirkung steht.

Unter Energieinhalt des Kerns verstehen wir die Energieänderung, die beim Zusammenfügen des Kerns aus den zunächst weit voneinander getrennten Nukleonen (Z Protonen und N Neutronen) infolge der Wirkung der Kernkraft und der Coulombkraft auftritt. Da für den umgekehrten Prozeß, die Zerlegung des Kerns in freie Nukleonen, Energie zugeführt werden muß (diese Energie wird üblicherweise positiv gezählt), gibt der Kern bei seiner Bildung Energie ab: Der Energieinhalt ist eine negative Größe, $E < 0$. Da es oft unbequem ist, mit einer negativen Größe zu arbeiten, führt man über

$$E_{\mathrm{B}} = -E$$

eine neue Größe, die Bindungsenergie E_{B}, ein, die gemäß Definition positiv ist. Nach der von EINSTEIN gefundenen Beziehung zwi-

schen Energie und Masse muß die Kernmasse m um das Massenäquivalent der Bindungsenergie, das ist

$$\Delta m = E_B/c^2 \tag{1.2}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit) kleiner sein als die Summe der Nukleonenmassen $Z \cdot m_p + N \cdot m_n$. Für diese gilt also

$$m = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - E_B/c^2. \tag{1.3}$$

Wir können also aus dem experimentell bekannten Massendefekt $\Delta m = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m$ unmittelbar auf die Stärke der Bindung im Atomkern schließen.* Messen wir m in Masseneinheiten (ME) und E_B in MeV, so gilt für die Bindungsenergie nach (1.3)

$$E_B = 931{,}5(Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m) \text{ MeV}. \tag{1.4}$$

Für den einfachsten zusammengesetzten Kern, nämlich für das aus Proton und Neutron bestehende Deuteron mit der Kernmasse $m = 2{,}01355$ ME folgt aus (1.4) und Tab. 1.1 als Bindungsenergie

$$E_B = 931{,}5 \cdot (1{,}00728 + 1{,}00867 - 2{,}01355) \text{ MeV} \approx 2{,}2 \text{ MeV}. \tag{1.4a}$$

Abgesehen von den leichtesten Kernen beträgt die durchschnittliche Bindungsenergie eines Nukleons im Kern etwa 8 MeV (s. Abb. 1.4), die Bindungsenergie eines äußeren Elektrons in der Atomhülle und die Bindungsenergie der Moleküle dagegen nur einige eV. Die Kernbindung ist also um einen Faktor 10^6 stärker als die chemische Bindung.

1.2. Bindungsenergie und Stabilität der Kerne nach dem Tröpfchenmodell

Das lineare Anwachsen des Kernvolumens und näherungsweise auch der Kernbindungsenergie mit der Nukleonenzahl A legt die Analogie zu einem Wassertropfen, ein „Tröpfchenmodell" des Kerns, nahe. Dieses Modell kann auch feinere Züge der Bindungsenergie wiedergeben. So ist die Bindung eines Nukleons an der

* In den Tabellen (z. B. [1]) werden gewöhnlich die Atommassen angegeben, die noch die Elektronenmassen ($m_e c^2 = 0{,}51$ MeV je Elektron), abzüglich des Massenäquivalents der Elektronenbindungsenergie, einschließen. Nach dem THOMAS-FERMI-Modell ist die Bindungsenergie aller Elektronen in einem Atom der Ladungszahl Z $15{,}73 \cdot Z^{7/3}$ eV. Für Uran ergibt sich daraus für die Elektronenbindungsenergie 0,6 MeV, für Zinn 0,15 MeV.

Oberfläche des Kerns schwächer als im Innern, da es hier mit einer geringeren Anzahl von Partnern in Wechselwirkung steht. Die dem Kernvolumen $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$ proportionale Volumenenergie

$$E_V = a_V A \tag{1.5}$$

wird dadurch um eine zur Kernoberfläche $O = 4\pi R_0^2 A^{2/3}$ proportionale Oberflächenenergie

$$E_O = a_O A^{2/3} \tag{1.6}$$

vermindert. Ferner kann die elektrostatische Coulombenergie der Z Protonen im Kern nach dem Modell einer homogen geladenen Kugel mit der Gesamtladung $Z \cdot e$ berechnet werden. Das ergibt

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R} = a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \tag{1.7}$$

letzteres unter Berücksichtigung von (1.1).

Zwei weitere, den Energieinhalt eines Atomkerns kennzeichnende Beiträge, die Asymmetrieenergie und die Paarenergie, sind im klassischen Tröpfchenbild nicht enthalten, lassen sich dem Modell aber unschwer aufpfropfen. Sie spiegeln spezifisch quantenmechanische Gesetze des Kernbaus wider.

Abb. 1.1 zeigt schematisch das Termschema für Protonen und Neutronen im Kern. Jeder Quantenzustand kann nach dem Pauli-Prinzip maximal von zwei Teilchen mit antiparallelem Spin besetzt werden. Die $|N - Z|$ überschüssigen Protonen oder Neutronen müssen daher überhöhte Niveaus mit geringerer Bindungsenergie einnehmen. Asymmetrie in der Protonen- und Neutronenzahl lok-

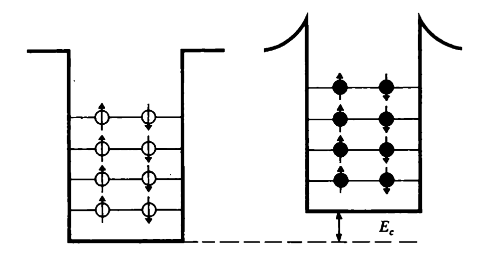


Abb. 1.1: Schematische Darstellung der Potentialmulde für Neutronen ○ und Protonen ● im Kern mit dem Besetzungsschema. Die Pfeilrichtung charakterisiert den Eigendrehimpuls (Spin) der Nukleonen. E_C ist die Coulombenergie [26].

kert also die mittlere Bindung je Nukleon, und zwar um so mehr, je kleiner $A = N + Z$ ist. Der einfachste Ansatz ist daher

$$E_A = + a_A \cdot \frac{(N - Z)^2}{A} . \tag{1.8}$$

Der zweite typisch quantenmechanische Beitrag zur Bindungsenergie ist die Paarenergie. Das für einen bestimmten Quantenzustand zugelassene Nukleonenpaar mit antiparallelem Spin (s. Abb. 1.1) geht eine besonders starke Bindung ein. Kerne mit gerader Neutronen- und Protonenzahl weisen daher eine höhere Bindungsenergie auf, als die Kerne mit ungerader Nukleonenzahl. Dieser Sachverhalt wird im Tröpfchenmodell durch einen Korrekturterm, die Paarenergie E_P, berücksichtigt. Empirisch findet man $E_P \sim A^{-3/4}$. Insgesamt gilt damit für die Bindungsenergie E_B des Kerns

$$\begin{aligned} E_B &= E_V - E_O - E_C - E_A + E_P \\ &= + a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A} + \\ &+ \begin{cases} + a_P A^{-3/4} & \text{für } Z \text{ und } N \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } A \text{ ungerade,} \\ - a_P A^{-3/4} & \text{für } Z \text{ und } N \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Durch Vergleich mit gemessenen Bindungsenergien erhält man folgende Werte für die Konstanten a der Volumen-, Oberflächen-, Coulomb-, Asymmetrie- und Paarenergie [2]:

$$\begin{aligned} a_V &= 15{,}75 \text{ MeV}, & a_O &= 17{,}80 \text{ MeV}, \\ a_C &= 0{,}710 \text{ MeV}, & a_A &= 23{,}69 \text{ MeV}, \\ a_P &= 33{,}5 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Daneben sind in der Literatur auch andere Zahlensätze in Gebrauch.

Gl. (1.9) berücksichtigt nicht, daß bei Kernen mit 2, 8, 20, 28, 50, 82 und 126 Neutronen bzw. Protonen das letzte Nukleon besonders stark gebunden ist. Nach dem quantenmechanischen Schalenmodell des Kerns füllen diese stark gebundenen Nukleonen gerade eine Hauptschale auf. Ein zusätzliches Nukleon, außerhalb einer Hauptschale, ist andererseits besonders schwach gebunden. In Gl. (1.9) wäre daher bei diesbezüglicher Genauigkeitsforderung in

der Nähe der ausgezeichneten Nukleonenzahlen eine Schalenkorrektur einzuführen. Verbesserte Massenformeln berücksichtigen auch die Kerndeformation [1].

Nach diesem Überblick über die verschiedenartigen Energiebeiträge wollen wir die Bedeutung einzelner Terme aus Gl. (1.9) für den Kernbau diskutieren. Der wichtigste Beitrag ist die Volumenenergie, Ausdruck der anziehenden Kernkraft. Ihr wirken entgegen Oberflächenenergie, Coulombenergie und Asymmetrieenergie. Von diesen dominiert in leichten Kernen die Oberflächenenergie, in schweren Kernen die Coulombenergie. Der Einbau von Protonen wird durch die Coulombabstoßung benachteiligt, der Einbau von Neutronen nicht. Die Asymmetrieenergie wirkt jedoch einem Neutronenüberschuß entgegen und erzwingt bei leichten Kernen größte Stabilität bei paritätischer Besetzung. Bei höheren Protonenzahlen wird aber die abstoßende Wirkung der weitreichenden Coulombkraft so groß, daß es energetisch günstiger ist, wenn in einem gewissen Umfang Überschußneutronen eingebaut werden (Abb. 1.2). Der schwerste stabile Kern mit gleicher Protonen- und Neutronenzahl ist $^{40}_{20}$Ca. Mit steigender Nukleonenzahl nimmt der Neutronenüberschuß der stabilen Kerne ständig zu und ist beim letzten stabilen Kern des periodischen Systems, $^{208}_{82}$Pb, auf $N - Z = 44$, $N = 1{,}54\,Z$, angewachsen.

Der Neutronenüberschuß ist nicht typisch für ein bestimmtes Element. So gibt es zu einer Protonenzahl Z, die das jeweilige chemische Element charakterisiert, mehrere Kerne mit verschiedener Neutronenzahl N, die Isotope. Sie können stabil oder instabil sein. Für uns sind die in der Natur vorkommenden langlebigen Nuklide besonders interessant (Tab. 1.2), deren Halbwertszeit $\tau_{1/2}$ in der Größe des Alters der chemischen Elemente von etwa $8 \cdot 10^9$ a liegt.

Tab. 1.2: In der Natur vorkommende Uran- und Thoriumisotope.

Nuklid	Z	N	natürliche Häufigkeit %	Halbwertszeit des α-Zerfalls Jahre
^{232}Th	90	142	100	$1{,}39 \cdot 10^{10}$
^{234}U	92	142	0,0056	$2{,}5 \cdot 10^5$
^{235}U	92	143	0,72	$7{,}1 \cdot 10^8$
^{238}U	92	146	99,27	$4{,}5 \cdot 10^9$

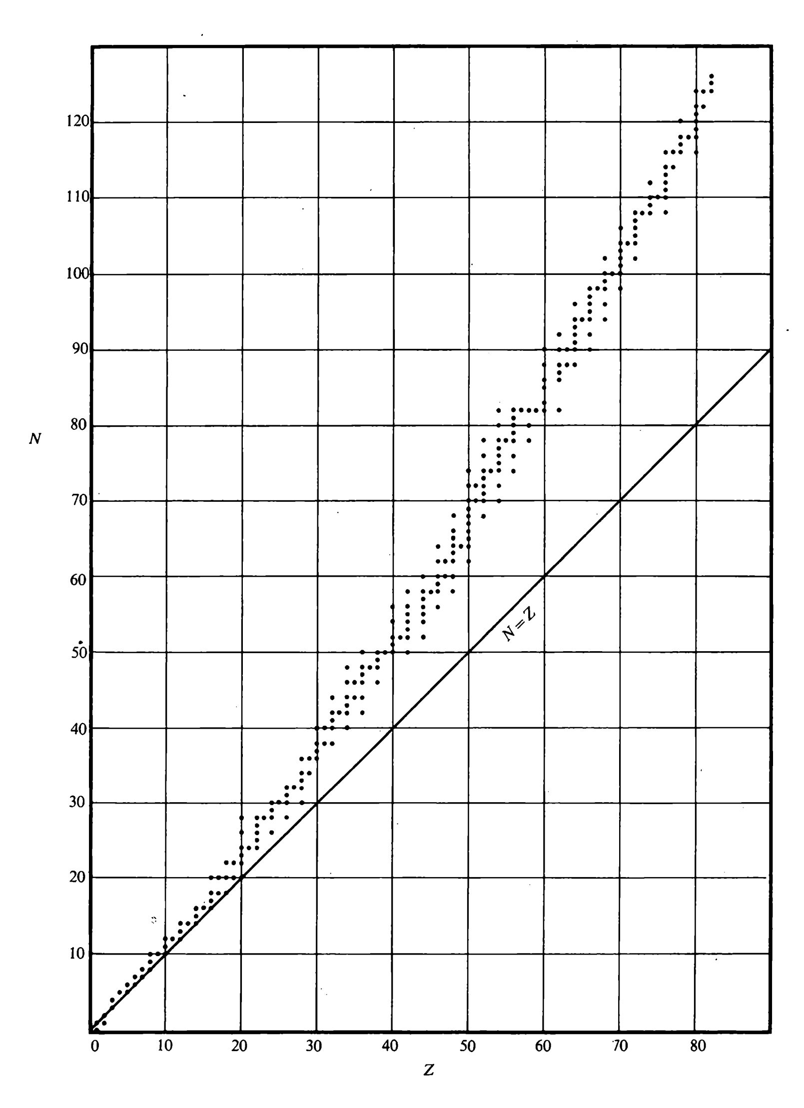


Abb. 1.2: Die stabilen Kerne in Abhängigkeit von der Protonenzahl Z und der Neutronenzahl N.

Sie wandeln sich mit bestimmten Halbwertszeiten unter Aussendung von α-, β- und γ-Strahlung über mehrere Zwischenstufen nach dem Gesetz

$$N(t) = N_0 \, 2^{-t/\tau_{1/2}} \tag{1.11}$$

in stabile Bleiisotope um. Als Beispiel ist in Abb. 1.3 die Zerfallskette des ^{238}U dargestellt.

Mit wachsender Protonenzahl wird die Instabilität der Kerne immer größer. Oberhalb einer kritischen Protonenzahl ist die abstoßende Wirkung der Coulombkraft schließlich so groß, daß sich der Atomkern momentan teilt (s. Abschn. 2.1). Hierauf beruht das Abbrechen des periodischen Systems der Elemente.

Bestimmt man aus den gemessenen Massen die mittlere Bindungsenergie E_B/A je Kernbaustein für die in der Natur vorkommenden stabilsten Kerne (unter allen Kernen mit gleicher Nukleonenzahl, den Isobaren, wird jeweils der mit kleinster Masse gewählt), so ergibt sich die Kurve der Abb. 1.4. Abgesehen von den Schaleneffekten bei 2, 8, 20, 28, 50, 82 Protonen bzw. Neutronen wird diese Kurve durch E_B/A nach (1.9) gut wiedergegeben. Die stärkste mittlere Bindung besitzen die Nukleonen in mittelschweren Kernen mit $A \approx 60$. Bei leichten Kernen wird die Bindung durch den relativ großen Anteil der Oberfläche, bei schweren Kernen durch das Anwachsen der Coulombenergie gelockert. Man kann daher Kernenergie durch Spalten eines schweren Kerns und durch Verschmelzen leichter Kerne freisetzen. In beiden Fällen ist die mittlere Bindungsenergie eines Nukleons in den Folgekernen größer als in den Ausgangskernen. Die Differenz ist der Energiegewinn.

Wir wollen diesen Energiegewinn bei einer schematischen Kernspaltung abschätzen. Dazu schlüsseln wir die mittlere Bindungsenergie E_B/A eines Nukleons im Kern $^{236}_{92}$U nach den einzelnen Energiebeiträgen der Gl. (1.9) auf (s. Tab. 1.3). $^{236}_{92}$U entsteht aus dem in der Natur vorkommenden Spaltstoff $^{235}_{92}$U durch Anlagerung eines Neutrons. Die dabei auftretende Anregungsenergie wird im folgenden nicht mitgezählt. Der Kern $^{236}_{92}$U sei also im Grundzustand. Den Energiewerten für den Kern $^{235}_{92}$U stellen wir die mittlere Bindungsenergie eines Nukleons im Kern $^{118}_{46}$Pd gegenüber. $^{118}_{46}$Pd entsteht, wenn sich der Kern $^{236}_{92}$U in zwei gleiche Teile spaltet. Je Nukleon gewinnt man dabei

$$(8{,}38 - 7{,}60)\ \text{MeV} = 0{,}78\ \text{MeV}\,.$$

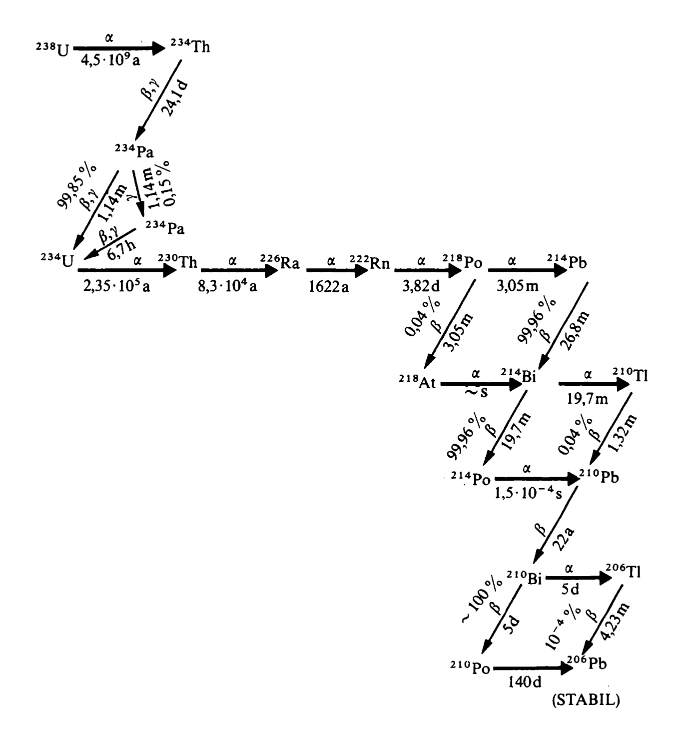


Abb. 1.3: Radioaktive Zerfallsreihe des ^{238}U (Uran-Radium-Reihe).

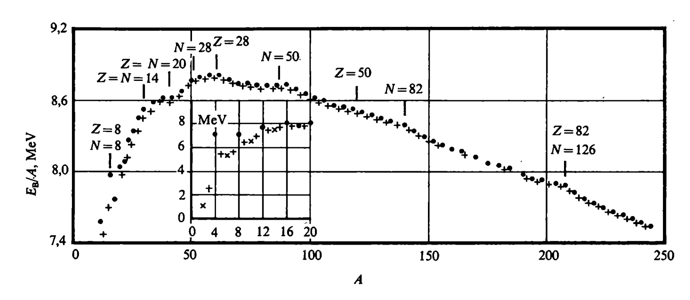


Abb. 1.4: Mittlere Bindungsenergie E_B/A je Nukleon für die stabilsten Kerne (mit kleinster Masse) der Nukleonenzahl A. ● gg-Kerne, + ug- und gu-Kerne, × uu-Kerne (nach [3]).

Tab. 1.3: Beiträge zur Bindungsenergie eines Nukleons E_B/A in MeV (nach [2]).

Element	Uran 236	Palladium 118	Zinn 118
Protonenzahl Z	92	46	50
Neutronenzahl N	144	72	68
Volumenenergie	15,75	15,75	15,75
Oberflächenenergie	−2,88	−3,63	−3,63
Coulombenergie	−4,12	−2,60	−3,07
Asymmetrieenergie	−1,15	−1,15	−0,55
Paarenergie	0,002	0,008	0,008
Bindungsenergie E_B/A	7,60	8,38	8,51

Die Dissoziationsenergie für die symmetrische Spaltung von $^{236}_{92}U$ nach dem Tröpfchenmodell ist also

$$Q = 0{,}78 \cdot 236 \text{ MeV} = 184 \text{ MeV}.$$

Für den mittelschweren Kern $^{118}_{46}Pd$ bedeutet das Neutron-Proton-Verhältnis des Urans einen zu hohen Neutronenüberschuß, als daß er stabil sein könnte (s. Abb. 1.2). Der stabile Kern der Massenzahl 118 ist ein Zinnisotop, nämlich $^{118}_{50}Sn$. Beim Übergang dahin wird weitere Kernenergie frei, die wir mit Hilfe der Bindungsenergie des ^{118}Sn (letzte Spalte in Tab. 1.3) abschätzen. Die Differenz in den Bindungsenergien eines Nukleons im Zinnkern und im Palladium beträgt (8,51 − 8,38) MeV = 0,13 MeV. Demzufolge unterscheidet sich die Bindungsenergie der beiden Zinnkerne von der der beiden Palladiumkerne um 0,13 · 236 MeV = 31 MeV. Der gesamte Energiegewinn bei der betrachteten modellmäßigen Spaltung beträgt also 215 MeV.

Wir werden im folgenden von den kernphysikalischen Energieeinheiten, die für den Einzelprozeß gebräuchlich sind, zu den makrophysikalischen technischen Einheiten übergehen. Der Zusammenhang ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ MeV} &= \frac{1}{931{,}5} \text{ ME} = 1{,}602 \cdot 10^{-6} \text{ erg} \\ &= 1{,}602 \cdot 10^{-13} \text{ Ws} = 3{,}826 \cdot 10^{-17} \text{ kcal.} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Bei einer Energie von 200 MeV je Spaltung müssen demnach zur Erzeugung einer Leistung von 1 W je s $3 \cdot 10^{10}$ Urankerne gespalten werden.

Aufgaben

1.1. Wie groß ist die Energie des γ-Quants, das beim Einfang eines langsamen Neutrons in Wasserstoff entsteht: $p + n \rightarrow d + \gamma$?

1.2. Ein freies Neutron zerfällt durch β-Zerfall in Proton, Elektron und Antineutrino. Wie groß ist die beim Neutronenzerfall insgesamt freiwerdende Energie, und wie groß ist die kinetische Maximalenergie des Elektrons?

1.3. Häufige Spaltfragmente des ^{236}U ($= {}^{235}U + n$) sind die Kerne der Massenzahlen 97 und 139. Man berechne aus den gemessenen Atommassen, wieviel Energie bei dieser Spaltung insgesamt (einschließlich Strahlung) frei wird. Man nehme an, daß jedes Spaltfragment 1 Neutron emittiert.
$m(^{236}U) = 236{,}044$ ME, $m(^{138}Ba) = 137{,}905$ ME, $m(^{96}Zr) = 95{,}909$ ME.

1.4. Man denke sich an die Kerne ^{235}U und ^{238}U je ein thermisches Neutron angelagert. Wie groß ist nach dem Tröpfchenmodell die Anregungsenergie in den dabei entstehenden Kernen ^{236}U und ^{239}U? Welcher Energieterm ist für die relativ zu ^{239}U hohe Anregungsenergie im Kern ^{236}U (und damit für die Spaltbarkeit des ^{235}U durch thermische Neutronen) hauptsächlich verantwortlich?

1.5. ^{235}U und ^{238}U kommen in der Natur im Verhältnis 1 : 140 vor. Man schätze aus diesem Verhältnis und den Halbwertszeiten (s. Tab. 1.2) das Alter der Materie ab unter der Annahme, daß beide Isotope ursprünglich im Verhältnis 1 : 3, 1 : 1 und 3 : 1 gebildet wurden. (Diese Verhältniszahlen sind durch das Häufigkeitsverhältnis der stabilen schweren Kerne, die sich um 3 Neutronen unterscheiden, nahegelegt.)

1.6. ^{238}U zerfällt radioaktiv über zwei kurzlebige Zwischenglieder (^{234}Th und ^{234}Pa) in ^{234}U. Man zeige, daß sich aus den Halbwertszeiten das Verhältnis der natürlichen Häufigkeit von ^{234}U und ^{238}U erklären läßt (s. Tab. 1.2).
Anleitung: Man stelle die Bilanz des ^{234}U auf. Die Zerfallswahrscheinlichkeit in einer Zeit Δt ist proportional zu $\Delta t / \tau_{1/2}$ (s. (1.11)).

2. Die Kernspaltung

2.1. Potentialbild für die Kernspaltung

Man kann das Phänomen der Kernspaltung aus dem Zusammenwirken der verschiedenen Beiträge zur Bindungsenergie, die wir nach dem Tröpfchenmodell in Gl. (1.5–9) angegeben haben, verstehen. So zielt die Oberflächenspannung auf Erhaltung der Kugelgestalt des Kerns, die elektrostatische Abstoßung der Kernprotonen auf Spaltung ab. Wird ein kugelförmiger Kern deformiert, so nimmt die Oberflächenenergie wegen wachsender Kernoberfläche zu, die Coulombenergie dagegen mit wachsendem mittleren Abstand der Teilchen ab. Bei kleinen Deformationen ist im allgemei-

nen die Zunahme der Oberflächenenergie größer als die Abnahme der Coulombenergie. Der Kern setzt daher Formänderungen einen Widerstand entgegen.

Bei großen Deformationen (Abb. 2.1) wird die weitreichende abstoßende Coulombkraft der rasch abfallenden anziehenden Kern-



Abb. 2.1: Schematische Darstellung des zeitlichen Ablaufs der Kernspaltung durch zunehmende Deformation.

kraft überlegen. Der Kern schnürt sich nach Erreichen einer kritischen Deformation ab, und die Tochterkerne werden unter der Wirkung der Coulombkraft auseinandergetrieben. Man kann zeigen, daß sehr schwere Kerne oberhalb eines kritischen Verhältnisses von

$$Z^2/A = 50 \tag{2.1}$$

schon bei kleinen Deformationen nicht mehr stabil sind, s. Aufg. 2.1. Nimmt man eine Neutronenzahl für Kerne um $Z = 100$ mit $N = 1{,}6\ Z$ an, so folgt aus (2.1)

$$\left.\begin{aligned} Z_{\text{krit}} &\approx 130\,, \\ A_{\text{krit}} &\approx 340\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Diese kritischen Nukleonenzahlen begrenzen das periodische System der Elemente. Schwerere Kerne zerfallen momentan durch Spaltung.

Aufgrund des Wechselspiels der Energiebeiträge im Kern können wir das Potentialbild für die Spaltung des Urankerns skizzieren (Abb. 2.2). Bei der Deformation muß zunächst Arbeit gegen die anziehenden Kernkräfte geleistet werden, bis schließlich die abstoßende Coulombkraft überhand nimmt.

Wir können auch den umgekehrten Weg zur Veranschaulichung des Potentialbildes gehen: Wir stellen uns vor, daß die beiden gleich großen Spaltprodukte aus großer Entfernung zusammengefügt werden sollen. Die Arbeit, die gegen die elektrostatische Abstoßung bis zur Berührung zu leisten ist, beträgt $e^2\ (Z/2)^2/(2\ R_f)$,

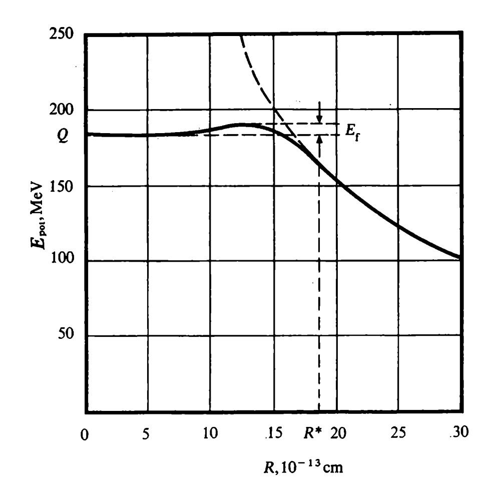


Abb. 2.2: Die potentielle Energie der Spaltprodukte relativ zueinander bei symmetrischer Spaltung des Urankerns (nach [4]). Beim Abstand R^* der Schwerpunkte der Bruchstücke lösen sich die Spaltprodukte voneinander. Von da an ist allein das Coulombpotential (gestrichelt) für die Wechselwirkung verantwortlich.
E_f = Energieschwelle, Q = Dissoziationsenergie.

wobei $R_f = R_0(A/2)^{1/3}$ gemäß (1.1) der Radius der Spaltprodukte ist. Für ^{236}U ergeben sich 254 MeV. Ehe sich die Kerne berühren, wird jedoch die anziehende Kernkraft wirksam, die die potentielle Energie herabsetzt und bei weiterer Annäherung eine Potentialmulde erzeugt. Das Minimum dieser Mulde entspricht völliger Vereinigung der Spaltprodukte und liegt gerade um die Dissoziationsenergie Q über dem Nullniveau. In Abschn. 1.2 hatten wir für den Kern ^{236}U $Q = 184$ MeV berechnet.

Der größte Teil von Q wird bei der Spaltung in kinetische, der Rest in innere Energie der Spaltprodukte verwandelt. Die Aufteilung der Energiebeträge hängt vom Abstand R^* der Spaltfragmentschwerpunkte im Augenblick der Abschnürung ab. R^* liegt bei $(18 \pm 5) \cdot 10^{-13}$ cm [4]. Eine Trennung bei kleinen Abständen R^* führt zu großer kinetischer Energie der Spaltfragmente und kleiner innerer Energie. Erfolgt dagegen die Abschnürung in einem stark deformierten Zustand mit großem R^*, so steigt die innere Energie auf Kosten der kinetischen an.

2.2. Spontane und erzwungene Kernspaltung

Der momentane Zerfall des Urankerns wird lediglich durch die Potentialschwelle (s. Abb. 2.2) verhindert. Die Spaltprodukte können aber ähnlich wie α-Teilchen nach dem quantenmechanischen Tunneleffekt die Potentialschwelle durchdringen. Man nennt diesen Vorgang die *spontane Spaltung*. Weil der Tunnel für den halben Kern viel länger ist als für das α-Teilchen, tritt der Prozeß nur selten ein. In 1 g Natururan beobachtet man etwa 20 spontane Spaltungen in der Stunde. Die Zahl der α-Zerfälle im Uran ist um den Faktor 10^6 größer.

Die Höhe der Spaltschwelle E_f stellt im Bild des Tröpfchenmodells die Energie dar, die zur Erzeugung der kritischen Deformation erforderlich ist. Rechnungen nach dem Tröpfchenmodell [5, 6] ergeben für die Höhe der Schwelle bei den Uranisotopen $E_f = 5$ bis 6 MeV. Diese Werte stimmen schon relativ gut mit Meßdaten überein (vgl. Tab. 2.1). Die Feinstruktur der Spaltschwelle hängt von den Quantenzahlen des Kernzustandes in der Phase der kritischen Deformation (Abb. 2.1, Bild 3) ab [7].

Tab. 2.1: Höhe der Spaltschwelle E_f, der Bindungsenergie E_b des letzten Neutrons im Zwischenkern und der Neutronenschwellenenergie $T = E_f - E_b$ für die Auslösung einer erzwungenen Kernspaltung in MeV nach [8, 9].

Zwischenkern	^{234}U	^{236}U	^{239}U	^{240}Pu
Neutronenzahl	142	144	147	146
E_f	5,2	5,8	6,3	4,8
E_b	6,7	6,4	4,8	6,4
$T = E_f - E_b$	−1,5	−0,6	+1,5	−1,6

Führt man dem Kern Anregungsenergie zu, die die Spaltschwelle E_f übersteigt, so tritt mit merklicher Wahrscheinlichkeit eine Kernspaltung auf. Man spricht von erzwungener Kernspaltung im Gegensatz zur spontanen.

Bei der erzwungenen Spaltung im Reaktor wird die Anregungsenergie durch das Neutron aufgebracht. Als Beispiel sei die neutroneninduzierte Spaltung des ^{235}U betrachtet. Bei der Wech-

selwirkung zwischen Neutron und ^{235}U kann sich unter Einbau des Neutrons in den Zielkern ^{235}U ein angeregter Zwischenkern ^{236}U bilden (Kap. II). Die Anregungsenergie des Zwischenkerns ^{236}U setzt sich aus der kinetischen Energie des Neutronengeschosses und der bei der Anlagerung des Neutrons freiwerdenden Bindungsenergie zusammen. Die Bindungsenergie des letzten Neutrons beträgt für die Uranisotope 5 bis 6 MeV (vgl. dritte Zeile in Tab. 2.1).

Der angeregte Zwischenkern kann aber nicht nur durch Spaltung, sondern auch durch andere „Kanäle" zerfallen. Bei den Uranisotopen sind bis etwa 50 keV Neutronenenergie die Aussendung eines γ-Quants oder eines Neutrons mögliche Konkurrenzprozesse zur Spaltung ((n, γ)- und (n, n)-Prozeß). Oberhalb 50 keV tritt als weitere Zerfallsmöglichkeit die Emission „unelastisch gestreuter" Neutronen auf ((n, n')-Prozeß), die für die Diskussion der thermischen Reaktoren von untergeordneter Bedeutung sind. Dagegen ist bei thermischen Reaktoren der (n, γ)-Prozeß am ^{238}U sehr wichtig.

Bei Zielkernen mit ungerader Neutronenzahl, wie ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu und ^{241}Pu, reicht allein die Freisetzung der Bindungsenergie E_b für die Überwindung der Energieschwelle E_f aus. In diesem Falle können Neutronen aller Energien erzwungene Spaltungen auslösen. Ist $E_b < E_f$, so muß die fehlende Anregungsenergie aus der kinetischen Energie der Neutronen aufgebracht werden. Die letzte Zeile der Tab. 2.1 gibt die Neutronenschwellenenergie $T = E_f - E_b$ an.

Die Auszeichnung der Kerne mit ungerader Neutronenzahl rührt von der Paarenergie her (Abschn. 1.2). Ist die Neutronenzahl im Zielkern ungerade, wie z. B. bei ^{235}U mit 143 Neutronen, so führt der Einbau des Neutronengeschosses zur Bildung eines Neutronenpaares mit relativ starker Bindung (s. Abschn. 1.2) und damit zu einer hohen Anregung des Zwischenkerns ^{236}U. Ist dagegen das angelagerte Neutron ein unpaariges Teilchen, so ist seine Bindungsenergie und damit die Anregungsenergie des Zwischenkerns um die Paarenergie geringer.

Kerne, die sich mit Neutronen aller Energien spalten lassen ($T < 0$, Tab. 2.1), nennt man thermisch spaltbar. Sie bilden die Gruppe der Spaltstoffe. Praktische Bedeutung haben: ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu und ^{241}Pu. Von diesen Elementen kommt nur ^{235}U infolge der relativ großen Halbwertszeit gegenüber α-Zerfall (s. Tab. 2.2) in merklichen Mengen in der Natur vor.

Tab. 2.2: Halbwertszeiten der Spaltstoffe.

Kernbrennstoff	^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{241}Pu
Zerfallsart	α	α	α	β^-
$\tau_{\frac{1}{2}}$, Jahre	$1{,}6 \cdot 10^5$	$7{,}1 \cdot 10^8$	$2{,}43 \cdot 10^4$	13,2

^{233}U und ^{239}Pu können jedoch in einem technisch interessanten Ausmaß künstlich durch Neutronenbestrahlung von ^{232}Th und ^{238}U im Kernreaktor hergestellt werden. Dabei fällt auch ^{241}Pu an. ^{238}U und ^{232}Th heißen Brutstoffe.

$$^{238}U + n \rightarrow {}^{239}U \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 23\,\text{min}]{\beta^-} {}^{239}Np \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 2{,}3\,\text{d}]{\beta^-} {}^{239}Pu, \tag{2.3}$$

$$^{232}Th + n \rightarrow {}^{233}Th \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 22\,\text{min}]{\beta^-} {}^{233}Pa \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 27\,\text{d}]{\beta^-} {}^{233}U, \tag{2.4}$$

$$^{239}Pu + n \rightarrow {}^{240}Pu + \gamma \qquad {}^{240}Pu + n \rightarrow {}^{241}Pu + \gamma. \tag{2.5}$$

Den Nachweis, daß eine Spaltung des Urans durch langsame Neutronen eintritt, führten HAHN und STRASSMANN in ihrer berühmten Arbeit, die Weihnachten 1938 zum Abschluß kam und im Januarheft der Naturwissenschaften 1939 veröffentlicht ist [10].

Aufgabe

2.1. Man zeige anhand des Tröpfchenmodells, daß die Oberflächen- und Coulombenergie bei kleinen symmetrischen Deformationen (ohne Volumänderung) folgende Werte annehmen:

$$E_O = a_O \left(1 + \frac{2}{5}\,\alpha_2{}^2\right) \cdot A^{2/3},$$

$$E_C = a_C \left(1 - \frac{1}{5}\,\alpha_2{}^2\right) \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Mit diesem Ergebnis und den Konstanten (1.10) verifiziere man die Beziehung (2.1). *Anleitung:* Man stelle die relative Änderung des Radiusvektors $R(\vartheta)$ durch eine Überlagerung von Kugelfunktionen $P_l(\cos\vartheta)$ dar

$$\frac{R(\vartheta) - R_0}{R_0} \approx \alpha_0\, P_0(\cos\vartheta) + \alpha_2\, P_2(\cos\vartheta)$$

und berechne damit die Volumen-, Oberflächen- und Coulombenergie.

3. Folgeprodukte der Kernspaltung

Die durch die Kernspaltung frei werdende Energie verteilt sich gewöhnlich auf zwei Kernbruchstücke und einige Elementarteilchen. Die Kernbruchstücke sind hochradioaktiv und zerfallen in eine Reihe von Folgekernen. Sofern man die primären Kernbruchstücke meint, spricht man von Spaltfragmenten; diese und die Gesamtheit der Folgekerne bezeichnet man als Spaltprodukte. Wir besprechen zunächst die Eigenschaften der Spaltprodukte und behandeln anschließend die der Neutronen und γ-Quanten.

3.1. Die Spaltprodukte

3.1.1. Eigenschaften der Spaltprodukte

Häufigkeitsverteilung. Die symmetrische Spaltung des Zwischenkerns ^{236}U, die wir modellmäßig in Abschn. 1.2 diskutierten, ist bei den im Reaktor auftretenden Neutronenenergien relativ selten (Abb. 3.1). Am häufigsten spaltet der Zwischenkern ^{236}U in Bruchstücke um die Massenzahlen 97 und 139 auf. Eine befriedigende

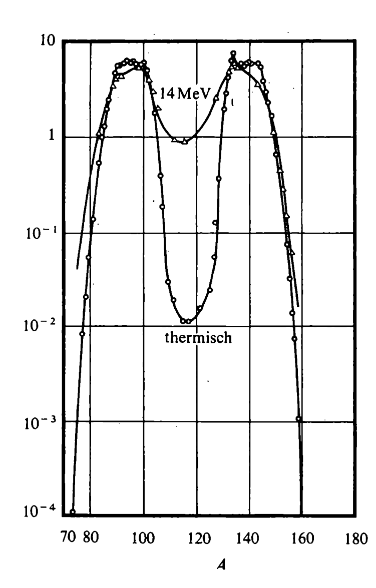


Abb. 3.1: Mittlere Zahl der Spaltprodukte mit A Nukleonen (nach der Neutronenemission) je 100 Spaltungen des Kerns ^{235}U mit thermischen und 14-MeV-Neutronen [11].

quantitative Erklärung dieser Erscheinung steht noch aus [1,7]. Der Schalenbau der Atomkerne dürfte hierbei eine Rolle spielen. Mit wachsender Energie des Neutronengeschosses nimmt der Anteil der symmetrischen Spaltungen zu (Abb. 3.1).

Abb. 3.1 gibt die experimentell gewonnene, relative kumulative Häufigkeit der Spaltprodukte des Zwischenkerns ^{236}U in Abhängigkeit von der Nukleonenzahl A an. Z. B. beträgt sie bei $A = 135$ 6,4 %. Davon entfallen auf ^{135}Xe 0,2 %, auf die Spaltprodukte ^{135}Te und ^{135}J zusammen 6,1 % je Kernspaltung. Die Isobare gehen durch radioaktiven Zerfall ineinander über.

Die experimentell gewonnene relative Häufigkeitsverteilung in Abb. 3.1 ist so normiert, daß sich bei der Summe über alle Ausbeuten 200 % ergeben, wie das theoretisch bei der binären Spaltung zu erwarten ist.

Mehr als zwei Bruchstücke treten nur sehr selten auf. Bei etwa $3 \cdot 10^{-3}$ aller Spaltungen des ^{235}U entsteht neben zwei schweren Bruchstücken ein α-Teilchen (^4_2He). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von drei etwa gleichschweren Bruchstücken beträgt 10^{-5} (ternäre Spaltung).

Während der Spaltung findet unter den Nukleonen eine gewisse Umordnung so statt, daß der Protonenmangel des leichten und schweren Bruchstücks etwa gleich groß ist. Der Protonenmangel ergibt sich aus dem Vergleich mit den stabilen Kernen der gleichen Massenzahl. Die stabilen Kerne zu den Massenzahlen 97 und 139 sind $^{97}_{42}Mo$ und $^{139}_{57}La$. Sie besitzen zusammen 99 Protonen gegenüber 92 des Urankerns. Die zugehörigen, primär entstehenden Spaltfragmentpaare, die im einzelnen experimentell schwer zu isolieren sind, müssen daher die Paare $^{97}_{38}Sr$ und $^{139}_{54}Xe$ oder $^{97}_{39}Y$ und $^{139}_{53}J$ mit zusammen $Z = 92$ sein. Sie sind hochangeregt und müssen den Neutronenüberschuß durch spontane Neutronenabdampfung und radioaktive Zerfallsketten abgeben. Die von den primären Spaltfragmenten abgedampften Neutronen bezeichnet man als prompte Neutronen. Sofern von Kernen, die erst später in der β-Zerfallskette auftreten, Neutronen emittiert werden, spricht man von verzögerten Neutronen. Ihr mittlerer Anteil beträgt bei der thermischen Spaltung des ^{235}U 0,64 %. Er ist für das Zeitverhalten und die Steuerung eines Reaktors von Bedeutung.

Radioaktivität. Der Abbau des Neutronenüberschusses erfolgt in der Regel über eine Folge von β-Zerfällen. Meist münden diese in angeregte Zustände ein, die unmittelbar anschließend durch Emis-

sion von γ-Quanten in den Grundzustand übergehen. Bei jedem β^--Zerfall wandelt sich ein Neutron des Kerns unter Emission eines Elektrons und eines Antineutrinos in ein Proton um:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}. \tag{3.1}$$

Ein typisches Beispiel für eine Zerfallskette ist

$$^{135}\mathrm{Te} \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} < 0{,}5\,\mathrm{min}]{\beta^-,\,\gamma} {}^{135}\mathrm{J} \xrightarrow[6{,}7\,\mathrm{h}]{\beta^-,\,\gamma} {}^{135}\mathrm{Xe} \xrightarrow[9{,}2\,\mathrm{h}]{\beta^-,\,\gamma} {}^{135}\mathrm{Cs} \xrightarrow[2{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{a}]{\beta^-} {}^{135}\mathrm{Ba}. \tag{3.2}$$

Meist entsteht nicht nur das erste Glied der Kette bei der Spaltung. Die Spaltprodukte Te und J in der Kette (3.2) entstehen zusammen mit der Häufigkeit 6,1 %, Xe mit der Häufigkeit 0,2 %; die Gesamthäufigkeit für das Auftreten der Massenzahl 135 wird mit 6,4 % angegeben und ist aus Abb. 3.1 zu entnehmen.

Im Mittel kommen auf eine Spaltung 5 bis 6 β^--Zerfälle mit einer mittleren Energie der β^--Teilchen (Elektronen) von zusammen etwa 8 MeV. Das beim β-Zerfall entstehende Antineutrino besitzt im Mittel die $1\frac{1}{2}$- bis 2fache Energie der β^--Teilchen. Beim Einzelzerfall kann die Elektronenenergie je nach Antineutrinoenergie zwischen Null und einer Maximalenergie variieren, die sich aus der Massendifferenz von Mutter- und Tochterkern abzüglich der Elektronenmasse ergibt.

Wegen der äußerst geringen Wechselwirkung mit Materie strömen die Antineutrinos ungehindert aus dem Reaktor ab. Damit gehen je Spaltung etwa 12 MeV der freigesetzten Kernenergie dem Reaktor verloren.

Kinetische Energie der Spaltprodukte. Der überwiegende Teil der freigesetzten Kernenergie, im Mittel 168 MeV, steckt in der kinetischen Energie der beiden Kernbruchstücke. Dabei entfallen auf die leichten Bruchstücke im Mittel 100 MeV, auf die schweren Bruchstücke 68 MeV. Die entsprechenden Geschwindigkeiten liegen in der Größe von 10^9 cm/s. Die hohe kinetische Energie der Kernbruchstücke und ihr hoher anfänglicher Ionisationsgrad von etwa 10 bis 20 Elementarladungen verursachen starke Störungen im Gefüge der Reaktormaterialien.

Die maximale Reichweite der Spaltprodukte beträgt in Luft 2,2 cm, in Aluminium $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm und in Uran $6{,}7 \cdot 10^{-4}$ cm. Danach genügen schon relativ dünne Schutzhüllen, um die Spaltprodukte im Brennstoff zurückzuhalten.

Spaltgase und Spaltgasdruck. Im Laufe des Langzeitbetriebes können die festen und gasförmigen Spaltprodukte zu einem Schwellen des Brennstoffes führen. Bei der Spaltung von 1 g ^{235}U werden unter Normalbedingungen von Druck und Temperatur 28 cm^3 Spaltgas, vorwiegend Xe und Kr, gebildet. Bei UO_2-Brennstoffen entweicht bei Temperaturen > 2000 °C der größte Teil dieser gasförmigen Spaltprodukte. Für hohe Abbrände muß daher ein besonderer Spaltgasraum im Brennstoffstab geschaffen werden, damit der Druck auf die Hülle nicht zu groß wird.

Neutronenabsorption durch Spaltprodukte. Einige Spaltprodukte sind starke Neutronenabsorber. Zu diesen sogenannten „Neutronengiften" gehören insbesondere $^{135}_{54}Xe$ und $^{149}_{62}Sm$. Sie stören den Neutronenhaushalt des Reaktors beträchtlich und führen zu Regelproblemen im Laufe des Reaktorbetriebs.

3.1.2. Zeitliche Abnahme der Aktivität der Spaltprodukte

Das radioaktive Zerfallsgesetz für ein Nuklid. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein radioaktiver Kern im Zeitintervall Δt zwischen t und $t + \Delta t$ zerfällt, ist – unabhängig vom Alter t des radioaktiven Kerns – $\lambda \cdot \Delta t$. λ heißt die Zerfallskonstante. Ist $N(t)$ die Zahl der noch nicht zerfallenen radioaktiven Kerne zur Zeit t, so gilt für die Änderung von $N(t)$ im Intervall Δt

$$N(t) - N(t + \Delta t) = \lambda N \cdot \Delta t. \qquad (3.3)$$

Daraus folgt:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad (3.4)$$

mit der Lösung

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}. \qquad (3.5)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein radioaktiver Kern zur Zeit t noch nicht zerfallen ist, $e^{-\lambda t}$, dann aber im Intervall Δt zerfällt, beträgt somit $e^{-\lambda t} \cdot \lambda \cdot \Delta t$. Mit Sicherheit zerfällt der Kern irgendwann zwischen $t = 0$ und ∞:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\, \lambda\, dt = 1. \qquad (3.6)$$

Für die mittlere Lebensdauer eines radioaktiven Kerns gilt daher

$$\tau = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot e^{-\lambda t}\, \lambda\, dt = 1/\lambda. \qquad (3.7)$$

Die Halbwertszeit $\tau_{\frac{1}{2}}$, nach der die Hälfte der N_0 radioaktiven Kerne zerfallen ist, folgt aus

$$N_0 \, e^{-\lambda \tau_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \tag{3.8}$$

zu

$$\tau_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0{,}693 \, \tau . \tag{3.9}$$

Die Einheit für die Aktivität ist das „Curie", definiert durch die Zahl der Zerfälle je Sekunde in einem Gramm Radium (ohne Folgeprodukte):

$$1 \text{ Curie (C)} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/s}. \tag{3.10}$$

Das radioaktive Zerfallsgesetz für das Gemisch der Spaltprodukte. Das Abklingen der Radioaktivität des Spaltproduktgemisches mit der Zeit kann nur in groben Zügen durch ein einfaches Gesetz wiedergegeben werden, da die Strahlung von etwa 80 Spaltprodukten und deren Zerfallsketten mit sehr unterschiedlichen Halbwertszeiten zwischen Bruchteilen einer Sekunde und 10^{10} Jahren herrührt. Man hat jedoch aus der Erfahrung ein Gesetz abgeleitet, das folgendermaßen zu formulieren ist. Hat man zu einer Zeit t_0 nach einer momentanen Bestrahlung bei $t = 0$ eine Aktivität $A(t_0)$ gemessen, so ist deren weiterer Abfall für $t \geq t_0$ durch

$$A(t) = A(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1,2} \tag{3.11}$$

abschätzbar, sofern $10 \text{ s} < t, t_0 < 100 \text{ d}$ ist. Da $7^{-1,2} \approx 1/10$, kann man grob sagen, daß die Radioaktivität eines zur Zeit $t = 0$ entstandenen Spaltproduktgemisches jeweils in der siebenfachen Zeit auf den zehnten Teil zurückgeht.

Die durch den β- und γ-Zerfall von Spaltprodukten freiwerdende Energie je s – bezogen auf eine Spaltung – kann man analog zu (3.11) gemäß [12] beschreiben durch:

$$\left.\begin{aligned} B(t) + \Gamma(t) &= 2{,}7 \cdot t^{-1,2} \text{ MeV/s} \quad (3.12)\\ \Gamma(t) &= 1{,}3 \cdot t^{-1,2} \text{ MeV/s} \quad (3.13)\end{aligned}\right\} \text{je Spaltung, für } 10 \text{ s} < t < 10^7 \text{ s}.$$

Wir fragen nun nach der Strahlungsleistung eines Reaktors auf Grund des β-Zerfalls der Spaltprodukte zur Zeit t, nachdem der

Reaktor zwischen $t' = 0$ und $t' = T(< t)$ mit der konstanten Leistung von P Watt gefahren und zur Zeit T abgeschaltet wurde. Im Intervall dt' erfolgen $3 \cdot 10^{10} \cdot P \cdot dt'$ Spaltungen (Abschn. 1.2). Sie liefern zur β- und γ-Strahlungsleistung im Zeitpunkt t den Beitrag $3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{P} \cdot 2{,}7\,(t - t')^{-1{,}2} \cdot dt'$ MeV/s. Die gesamte β- und γ-Strahlungsleistung zur Zeit t ergibt sich durch Integration über t' zu

$$\begin{aligned} B(t, T) + \Gamma(t, T) &= 8{,}1 \cdot 10^{10} \cdot P \int_{t'=0}^{T} (t - t')^{-1{,}2}\, dt' \\ &= 4 \cdot 10^{11}\, P[(t - T)^{-0{,}2} - t^{-0{,}2}]\ \mathrm{MeV/s} \qquad (3.14) \\ &= 6{,}4 \cdot 10^{-2}\, P[(t - T)^{-0{,}2} - t^{-0{,}2}]\ \mathrm{W} \\ &\quad \text{für } 10\ \mathrm{s} < (t - T), t < 10^7\ \mathrm{s}. \end{aligned}$$

Durch Variation des Exponenten und des Vorfaktors lassen sich für Teilintervalle Formeln mit höherer Genauigkeit angeben [13]. Nach (3.14) macht die β- und γ-Strahlung kurz nach dem Abschalten etwa ein Prozent der gesamten Reaktorleistung aus.

Nimmt man je Spaltung 6 β-Zerfälle mit 8 MeV an, so erhält man aus (3.12–14) als β-Aktivität der Spaltprodukte zur Zeit $t - T$ nach Abschalten des Reaktors

$$A_\beta = 4{,}4\, P[(t - T)^{-0{,}2} - t^{-0{,}2}]\ \text{Curie für } 10\ \mathrm{s} < (t - T), t < 10^7\ \mathrm{s}. \qquad (3.15)$$

Wurde der Reaktor mit einer Leistung von Megawatt betrieben, so ist die Aktivität kurz nach dem Abschalten in der Größe von Megacurie, entspricht also der Aktivität von Tonnen Radium. Abb. 3.2 gibt das Abklingen der Aktivität für verschiedene Bestrahlungszeiten an.

3.2. Prompte Spaltneutronen und γ-Quanten

Unmittelbar nach der Spaltung befinden sich die beiden primären Kernbruchstücke in einem hochangeregten Zustand. Die Anregungsenergie der beiden Bruchstücke beträgt zusammengenommen etwa 20 bis 30 MeV. Die Streuung um den Mittelwert ist dabei relativ breit.

Die Aufteilung der Anregungsenergie auf die Bruchstücke hängt von ihrer Masse ab. Wenn die Masse der Kernbruchstücke nahezu gleich groß ist, erhält das leichtere Bruchstück die höhere Anregungsenergie, bei stark asymmetrischer Spaltung ist dagegen die

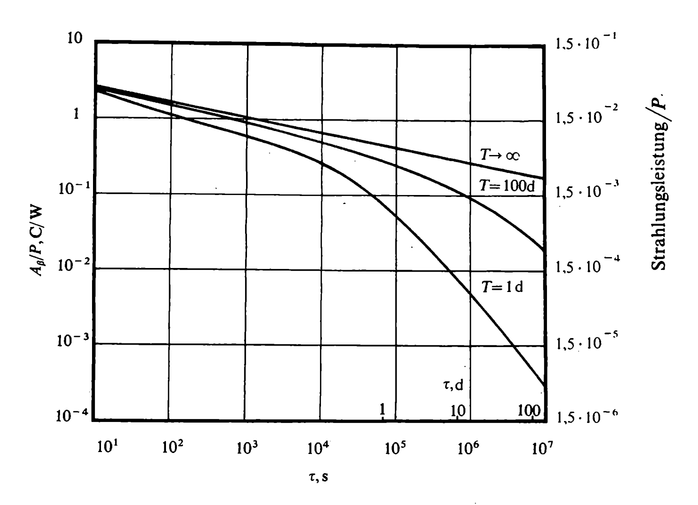


Abb. 3.2: Zeitlicher Abfall der β-Aktivität der Spaltprodukte je Watt Reaktorleistung in Abhängigkeit von der Zeit $\tau = t - T$ nach Abschalten des Reaktors für drei Betriebszeiten T des Reaktors gemäß Gl. (3.15).

Anregungsenergie des schweren Bruchstücks größer. Der wahrscheinlichste Prozeß bei den hohen Anregungsenergien der Kernbruchstücke ist die Neutronenabdampfung nach einer mittleren Lebenszeit des angeregten Zustandes von weniger als 10^{-14} s. Gemäß der Aufteilung der Anregungsenergie auf die Bruchstücke emittieren die schwersten der schweren Bruchstücke und die schwersten der leichten Bruchstücke die meisten „prompten" Neutronen [14].

Die mittlere Energie der prompten Neutronen relativ zu den Kernbruchstücken beträgt entsprechend der Kerntemperatur der Bruchstücke etwa 1 MeV. Die Emission aus den Bruchstücken erfolgt isotrop. Im Laborsystem überlagert sich die Geschwindigkeit der Kernbruchstücke, so daß bezogen auf die Flugrichtung der Spaltprodukte eine anisotrope Neutronenverteilung mit einer mittleren kinetischen Energie von 2 MeV resultiert. Solange die Winkelverteilung der Bruchstücke isotrop zum einfallenden Neutronenstrahl ist, wie z. B. bei ^{235}U und ^{239}Pu für Neutronenenergien $< 0{,}5$ MeV, entsteht im Mittel eine isotrope Verteilung der Spaltneutronen. Oberhalb 0,5 MeV fliegen die Bruchstücke aber bevorzugt längs des einfallenden Neutronenstrahls auseinander [15], so

daß auch im Mittel über viele Spaltungen eine Anisotropie in der Verteilung der Spaltneutronen auftritt.

Bei der Neutronenemission sinkt die Anregungsenergie des Kernbruchstücks um die Bindungsenergie und die kinetische Energie des Neutrons relativ zum Bruchstück, das sind zusammen etwa 6 MeV. Bei einem energiearmen Bruchstück ist damit die Anregungsenergie mit großer Wahrscheinlichkeit unter die Neutronenbindungsenergie gesunken, so daß kein weiteres Neutron emittiert werden kann. Der nächstwahrscheinliche Prozeß ist dann die Emission von γ-Quanten nach einer charakteristischen Zeit von der Größe 10^{-14} s. Dabei kommen im Mittel auf eine Spaltung etwa 7 „prompte" γ-Quanten mit einer Gesamtenergie von etwa 8 MeV.

Bei höherer mittlerer Anregungsenergie kann auch häufig ein zweites, seltener ein drittes Neutron aus dem Kernbruchstück heraus emittiert werden. Insgesamt beträgt die mittlere Zahl der Spaltneutronen bei der Spaltung des ^{235}U (einschließlich des kleinen Bruchteils von weniger als 1 % „verzögerter" Neutronen) $\nu = 2{,}43$, wenn die Spaltung durch thermische Neutronen mit einer Energie von $kT_0 = 0{,}0253$ eV ausgelöst wird. Bei der Spaltung durch schnellere Neutronen ist ν entsprechend $d\nu/dE = +\,0{,}14$ MeV^{-1} größer [16]. Die ν-Werte anderer Spaltstoffe sind in Tab. 3.1 und 3.2 angegeben. Neuere Messungen am ^{235}U [17] haben ein nichtlineares Anwachsen von ν mit der Energie der die Spaltung auslösenden Neutronen ergeben.

Aus praktischen Gründen bezieht man oft die Zahl der bei der Spaltung frei werdenden Neutronen nicht auf den Spaltakt selbst, sondern auf ein vom spaltbaren Kern absorbiertes Neutron. Diese Zahl bezeichnet man gewöhnlich durch η. In Abschn. 2.2 erwähnten wir, daß die bei Anlagerung eines Neutrons entstehende Anregungsenergie nicht unbedingt über eine Spaltung, sondern auch über

Tab. 3.1: Mittlere Zahl der Spaltneutronen bei der Kernspaltung durch langsame Neutronen mit der Energie $E = kT_0 = 0{,}0253$ eV ($T_0 = 293°$ K) [18].

	^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{241}Pu
ν (je Spaltung)	2,50	2,43	2,9	3,0
α	0,093	0,17	0,37	0,4
η (je Absorption)	2,29	2,07	2,12	2,2

Tab. 3.2: Mittlere Zahl der Spaltneutronen bei der Kernspaltung durch schnelle Neutronen mit der Energie $E = 1$ MeV [18].

	^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{241}Pu
ν (je Spaltung)	2,53	2,54	3,05	3,11
α	0,04	0,09	0,03	0,05
η (je Absorption)	2,44	2,33	2,96	2,96

die Aussendung eines γ-Quants oder eines Neutrons abgegeben werden kann. Setzt man das Verhältnis

$$\alpha = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit der } \gamma\text{-Emission}}{\text{Wahrscheinlichkeit der Spaltung}}, \tag{3.16}$$

so gilt

$$\eta = \frac{\nu}{1+\alpha}. \tag{3.17}$$

Die Zahlenwerte für α und η sind in Tab. 3.1 und 3.2 aufgenommen.

Das Energiespektrum $\chi_0(E)$ der bei der ^{235}U-Spaltung aus den Kernbruchstücken abgedampften prompten Neutronen ist in Abb. 3.3 dargestellt (E = Neutronenenergie im Laborsystem). Es

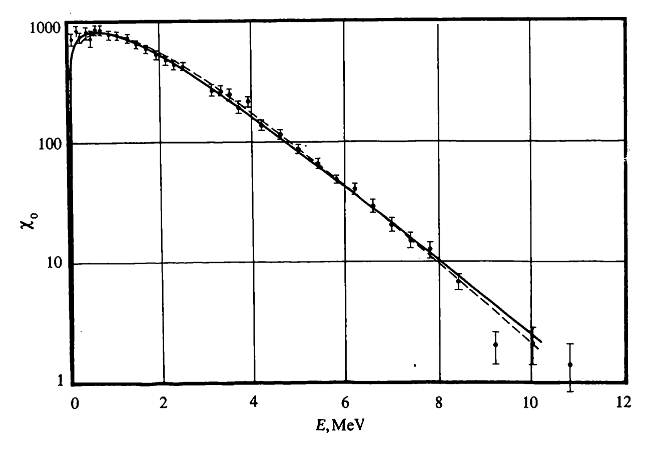


Abb. 3.3: Energieverteilung $\chi_0(E)$ der prompten Neutronen aus der Spaltung des ^{235}U und Approximation der Meßpunkte durch zwei analytische Kurven (nach [20]). Ausgezogene Kurve: $\sqrt{E} \cdot e^{-0{,}775\, E}$, gestrichelte Kurve: $\sinh \sqrt{2{,}29\, E} \cdot e^{-E/0{,}965}$. E in MeV, willkürlicher Ordinatenmaßstab.

reicht im wesentlichen von 0,01 bis 10 MeV. Zum Vergleich sind in der Abbildung zwei einfache analytische Näherungsformeln eingetragen, die das Spaltspektrum gut wiedergeben [19, 20]:

$$\chi_0(E) = 0{,}45270\, \mathrm{e}^{-E/0{,}965} \sinh \sqrt{2{,}29\, E}\,, \tag{3.18a}$$

$$\chi_0(E) = 0{,}770 \sqrt{E} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}775\, E}. \tag{3.18b}$$

E ist in MeV einzusetzen. – Die Spektren sind auf 1 normiert:

$$\int_0^\infty \chi_0(E)\, \mathrm{d}E = 1. \tag{3.19}$$

$\chi_0(E)\, \mathrm{d}E$ stellt somit die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein promptes Spaltneutron eine Energie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ besitzt. Für die mittlere kinetische Energie E_0 der Spaltneutronen im Laborsystem ergibt sich daraus

$$E_0 = \int_0^\infty E\, \chi_0(E)\, \mathrm{d}E \approx 2\,\mathrm{MeV}. \tag{3.20}$$

In vielen Fällen genügt es, anstelle des Spaltspektrums jene mittlere Quellenenergie von 2 MeV einheitlich für alle Spaltneutronen anzunehmen.

3.3. *Verzögerte Spaltneutronen und γ-Quanten*

Verzögerte γ-Quanten sind zu erwarten, da die radioaktiven β-Zerfälle der Spaltprodukte nicht immer zum Grundzustand des Folgekerns führen. Die Anregungsenergie wird in diesen Fällen durch die Emission eines (oder mehrerer) γ-Quanten abgegeben. Die Verzögerungszeit ist durch die Lebensdauer dieses Zustandes und durch die Lebensdauer jener Kerne bestimmt, die in der Zerfallskette vorangegangen sind. Die Gesamtenergie der verzögerten γ-Quanten ist fast von derselben Größe wie die Gesamtenergie der prompten γ-Quanten, nämlich 7 MeV.

Die Entstehung verzögerter Neutronen ist in Abb. 3.4 veranschaulicht. Bei der Spaltung entsteht z. B. das Bromisotop ${}^{87}_{35}\mathrm{Br}$. Wegen seines hohen Neutronenüberschusses ist es instabil und geht nach 3 β-Zerfällen in das stabile Strontiumisotop ${}^{87}_{38}\mathrm{Sr}$ über:

$$^{87}_{35}\mathrm{Br} \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 56\ \mathrm{s}]{Q_\beta = 8\,\mathrm{MeV}} {}^{87}_{36}\mathrm{Kr} \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 78\ \mathrm{min}]{Q_\beta = 3{,}8\,\mathrm{MeV}} {}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \xrightarrow[\tau_{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{a}]{Q_\beta = 0{,}27\,\mathrm{MeV}} {}^{87}_{38}\mathrm{Sr}. \tag{3.21}$$

Beim β-Zerfall des neutronenreichsten ersten Gliedes der Zerfallskette ist die Halbwertszeit $\tau_{\frac{1}{2}}$ kurz und die freiwerdende Energie Q_β groß, beim letzten instabilen Glied dagegen ist die Halbwertszeit lang und die Zerfallsenergie klein. Bei der hohen Zerfallsenergie des ^{87}Br kann der Folgekern ^{87}Kr mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit so hoch angeregt sein, daß ein Neutron abgelöst wird, $E_a > E_b$ (Abb. 3.4). Es resultiert der Kern $^{86}_{36}$Kr. Die Emission der

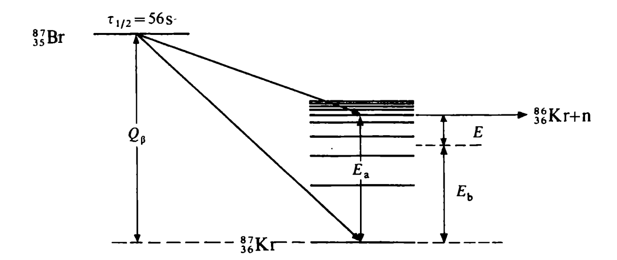


Abb. 3.4: Termschema der Kerne $^{87}_{35}$Br und $^{87}_{36}$Kr zur Verdeutlichung der Entstehung eines verzögerten Neutrons aus dem β-Zerfall des Spaltprodukts $^{87}_{35}$Br.

Q_β = Zerfallsenergie, E_a = Anregungsenergie des Folgekerns $^{87}_{36}$Kr,
E_b = Bindungsenergie des letzten Neutrons im $^{87}_{36}$Kr,
E = freiwerdende kinetische Energie ≈ kinetische Energie des Neutrons.

verzögerten Neutronen erfolgt proportional zur Zahl der vorhandenen Mutterkerne ^{87}Br, d. h. sie zeigt denselben zeitlichen Abfall wie die β-Emission des ^{87}Br. Die Intensität ist allerdings geringer, da nur ein Bruchteil der β-Zerfälle zu Anregungsenergien E_a oberhalb der Bindungsenergie E_b des letzten Neutrons im Folgekern führt. Die bei der Neutronenemission nach Abzug der Bindungsenergie zur Verfügung stehende innere Energie $E = E_a - E_b$ verteilt sich nach Maßgabe der Massen auf die kinetische Energie des Spaltprodukts und des Neutrons. Da die Masse m des Spaltprodukts sehr viel größer als die Neutronenmasse m_n ist, ist die Neutronenenergie

$$E \frac{m}{m + m_n} \approx E.$$

Aus der Theorie des β-Zerfalls und aus Experimenten wird für die verzögerten Neutronen der Gruppe i (Halbwertszeit τ_i, Zerfallsenergie $Q_{\beta i}$) die folgende Energieverteilung nahegelegt [21, 22].

$$\chi_i(E) = \frac{6}{E_{i,\,\max}} \cdot \left(1 - \frac{E}{E_{i,\,\max}}\right)^5 \quad \text{für } 0 \leq E \leq E_{i,\max} \qquad (3.22)$$

mit

$$E_{i,\max} = Q_{\beta,\,i} - E_{\mathrm{b},\,i} \qquad (3.23)$$

und der Normierung

$$\int\limits_0^{E_{i,\,\max}} \chi_i(E)\,\mathrm{d}E = 1\,. \qquad (3.24)$$

$E_{\mathrm{b},\,i}$ ist die Bindungsenergie des letzten Neutrons im Emitterkern der Gruppe i (^{87}Kr in Abb. 3.4). – Für die mittlere Energie E_i folgt daraus

$$E_i = \int\limits_0^{E_{i,\,\max}} E_i\,\chi_i(E_i)\,\mathrm{d}E_i = \frac{1}{7}\,E_{i,\max} = \frac{1}{7}\,(Q_{\beta i} - E_{\mathrm{b}i})\,. \qquad (3.25)$$

Die aus dem Krypton emittierten verzögerten Neutronen haben eine mittlere Energie von 0,25 MeV im Gegensatz zur mittleren Energie der prompten Neutronen von 2 MeV. Dieser Unterschied muß bei der Berechnung des Reaktorzeitverhaltens beachtet werden.

Neben den verzögerten Neutronen aus dem Emitter ^{87}Kr mit der Halbwertszeit $\tau_{\frac{1}{2}} = 56$ s hat man weitere 5 Neutronengruppen mit kürzeren Halbwertszeiten isolieren können. Als Emitter wirken bevorzugt neutronenreiche Spaltprodukte mit wenigen, schwach gebundenen Neutronen außerhalb abgeschlossener Schalen, z. B. Kerne mit 51 oder 83 Neutronen (Abschn. 1.2). $^{87}_{36}$Kr hat gerade 51 Neutronen. Als weiterer Emitter wurde $^{137}_{54}$Xe mit dem schwach gebundenen 83. Neutron festgestellt. $^{137}_{54}$Xe entsteht aus dem β-Zerfall des neutronenreichen Spaltprodukts $^{137}_{53}$J mit einer Halbwertszeit von $\tau_{\frac{1}{2}} = 22$ s. Die vermutlichen Mutterkerne und Emitter der übrigen Gruppen verspäteter Neutronen sowie deren mittlere kinetische Energie E_i sind aus Tab. 3.3 zu ersehen. Man nimmt an, daß u. U. mehrere Mutterkerne eine Neutronengruppe speisen [23]. Tab. 3.4 gibt die Halbwertszeit τ_i und den relativen Neutronenbruchteil β_i/β, der auf die i-te Gruppe entfällt, jeweils für thermische Spaltung der Kerne ^{233}U, ^{235}U und ^{239}Pu. Entsprechende Daten für Spaltungen durch schnelle Neutronen stehen in Tab. 3.5.

Der Gesamtbruchteil $\beta = \sum_i \beta_i$ der Spaltneutronen, die auf verzögerte Neutronen entfallen, ist in Tab. 3.6 wiedergegeben.

Mit den β_i und den Spektren $\chi_0(E)$ und $\chi_i(E)$ der prompten und verzögerten Neutronen schreibt sich das Spektrum aller Spaltneutronen im stationären Zustand:

$$\chi(E) = (1 - \beta)\,\chi_0(E) + \sum_{i=1}^{6} \beta_i\,\chi_i(E). \qquad (3.26)$$

Verzögerte Photoneutronen. Die in einem Reaktor auftretende γ-Strahlung vermag durch (γ, n)-Reaktionen (Kernphotoeffekt)

Tab. 3.3: Mutterkerne und Emitter für verzögerte Neutronen.

Neutronengruppe i	1	2	3	4	5	6
Mutterkerne	^{87}Br	^{137}J, ^{88}Br	^{138}J, ^{89}Br	^{139}J, ^{90}Br	^{140}J	^{93}Br
Emitter	^{87}Kr	^{137}Xe, ^{88}Kr	^{138}Xe, ^{89}Kr	^{139}Xe, ^{90}Kr	^{140}Xe	^{93}Kr
mittl. Neutronenenergie E_i, MeV	0,25	0,46	0,405	0,45	0,42	—

Tab. 3.4: Daten für die verzögerten Neutronen aus der *thermischen* Spaltung von ^{233}U, ^{235}U und ^{239}Pu [24].

Isotop	$\beta \cdot \nu$	i	τ_i, s	$\lambda_i = 1/\tau_i$, s^{-1}	β_i/β	$\beta_i \cdot \nu \cdot 100$
^{233}U	0.0066 ± 0.0003	1	55.00 ± 0.54	0.0126 ± 0.0002	0.086 ± 0.003	0.057 ± 0.003
		2	20.57 ± 0.38	0.0337 ± 0.0006	0.299 ± 0.004	0.197 ± 0.009
		3	5.00 ± 0.21	0.139 ± 0.006	0.252 ± 0.040	0.166 ± 0.027
		4	2.13 ± 0.20	0.325 ± 0.030	0.278 ± 0.020	0.184 ± 0.016
		5	0.615 ± 0.242	1.13 ± 0.40	0.051 ± 0.024	0.034 ± 0.016
		6	0.277 ± 0.047	2.50 ± 0.42	0.034 ± 0.014	0.022 ± 0.009
^{235}U	0.0158 ± 0.0005	1	55.72 ± 1.28	0.0124 ± 0.0003	0.033 ± 0.003	0.052 ± 0.005
		2	22.72 ± 0.71	0.0305 ± 0.0010	0.219 ± 0.009	0.346 ± 0.018
		3	6.22 ± 0.23	0.111 ± 0.004	0.196 ± 0.022	0.310 ± 0.036
		4	2.30 ± 0.09	0.301 ± 0.012	0.395 ± 0.011	0.624 ± 0.026
		5	0.61 ± 0.083	1.13 ± 0.15	0.115 ± 0.009	0.182 ± 0.015
		6	0.23 ± 0.025	3.00 ± 0.33	0.042 ± 0.008	0.066 ± 0.008
^{239}Pu	0.0061 ± 0.0003	1	54.28 ± 2.34	0.0128 ± 0.0005	0.035 ± 0.009	0.021 ± 0.006
		2	23.04 ± 1.67	0.0301 ± 0.0022	0.298 ± 0.035	0.182 ± 0.023
		3	5.60 ± 0.40	0.124 ± 0.009	0.211 ± 0.048	0.129 ± 0.030
		4	2.13 ± 0.24	0.325 ± 0.036	0.326 ± 0.033	0.199 ± 0.022
		5	0.618 ± 0.213	1.12 ± 0.39	0.086 ± 0.029	0.052 ± 0.018
		6	0.257 ± 0.045	2.69 ± 0.47	0.044 ± 0.016	0.027 ± 0.010

Tab. 3.5: Daten für die verzögerten Neutronen aus der *schnellen* Spaltung von ^{233}U, ^{235}U, ^{238}U, ^{239}Pu, ^{240}Pu und ^{232}Th [24].

Isotop	$\beta \cdot \nu$	i	τ_i, s	$\lambda_i = 1/\tau_i$, s^{-1}	β_i/β	$\beta_i \cdot \nu \cdot 100$
^{232}Th	0.0496 ± 0.0020	1	56.03 ± 0.95	0.0124 ± 0.0002	0.034 ± 0.002	0.169 ± 0.012
		2	20.75 ± 0.66	0.0334 ± 0.0011	0.150 ± 0.005	0.744 ± 0.037
		3	5.74 ± 0.24	0.121 ± 0.005	0.155 ± 0.021	0.769 ± 0.108
		4	2.16 ± 0.08	0.321 ± 0.011	0.446 ± 0.015	2.212 ± 0.110
		5	0.571 ± 0.042	1.21 ± 0.090	0.172 ± 0.013	0.853 ± 0.073
		6	0.211 ± 0.019	3.29 ± 0.297	0.043 ± 0.006	0.213 ± 0.031
^{233}U	0.0070 ± 0.0004	1	55.11 ± 1.86	0.0126 ± 0.0004	0.086 ± 0.003	0.06 ± 0.003
		2	20.74 ± 0.86	0.0334 ± 0.0014	0.274 ± 0.005	0.192 ± 0.009
		3	5.30 ± 0.19	0.131 ± 0.005	0.227 ± 0.035	0.159 ± 0.025
		4	2.29 ± 0.18	0.302 ± 0.024	0.317 ± 0.011	0.222 ± 0.012
		5	0.546 ± 0.108	1.27 ± 0.266	0.073 ± 0.014	0.051 ± 0.010
		6	0.221 ± 0.042	3.13 ± 0.675	0.023 ± 0.007	0.016 ± 0.005
^{235}U	0.0165 ± 0.0005	1	54.51 ± 0.94	0.0127 ± 0.0002	0.038 ± 0.003	0.063 ± 0.005
		2	21.84 ± 0.54	0.0317 ± 0.0008	0.213 ± 0.005	0.351 ± 0.011
		3	6.00 ± 0.17	0.115 ± 0.003	0.188 ± 0.016	0.310 ± 0.028
		4	2.23 ± 0.06	0.311 ± 0.008	0.407 ± 0.007	0.672 ± 0.023
		5	0.496 ± 0.029	1.40 ± 0.081	0.128 ± 0.008	0.211 ± 0.015
		6	0.179 ± 0.017	3.87 ± 0.369	0.026 ± 0.003	0.043 ± 0.005
^{238}U	0.0412 ± 0.0017	1	52.38 ± 1.29	0.0132 ± 0.0003	0.013 ± 0.001	0.054 ± 0.005
		2	21.58 ± 0.39	0.0321 ± 0.0006	0.137 ± 0.002	0.564 ± 0.025
		3	5.00 ± 0.19	0.139 ± 0.005	0.162 ± 0.020	0.667 ± 0.087
		4	1.93 ± 0.07	0.358 ± 0.014	0.388 ± 0.012	1.599 ± 0.081
		5	0.49 ± 0.023	1.41 ± 0.067	0.225 ± 0.013	0.927 ± 0.060
		6	0.172 ± 0.009	4.02 ± 0.214	0.075 ± 0.005	0.309 ± 0.024
^{239}Pu	0.0063 ± 0.0003	1	53.75 ± 0.95	0.0129 ± 0.0002	0.038 ± 0.003	0.024 ± 0.002
		2	22.29 ± 0.36	0.0311 ± 0.0005	0.280 ± 0.004	0.176 ± 0.009
		3	5.19 ± 0.12	0.134 ± 0.003	0.216 ± 0.018	0.136 ± 0.013
		4	2.09 ± 0.08	0.331 ± 0.012	0.328 ± 0.010	0.207 ± 0.012
		5	0.549 ± 0.049	1.26 ± 0.115	0.103 ± 0.009	0.065 ± 0.007
		6	0.216 ± 0.017	3.21 ± 0.255	0.035 ± 0.005	0.022 ± 0.003
^{240}Pu	0.0088 ± 0.0006	1	53.56 ± 1.21	0.0129 ± 0.0004	0.028 ± 0.003	0.022 ± 0.003
		2	22.14 ± 0.38	0.0313 ± 0.0005	0.273 ± 0.004	0.238 ± 0.016
		3	5.14 ± 0.42	0.135 ± 0.011	0.192 ± 0.053	0.162 ± 0.044
		4	2.08 ± 0.19	0.333 ± 0.031	0.350 ± 0.020	0.315 ± 0.027
		5	0.511 ± 0.077	1.36 ± 0.205	0.128 ± 0.018	0.119 ± 0.018
		6	0.172 ± 0.033	4.04 ± 0.782	0.029 ± 0.006	0.024 ± 0.005

Tab. 3.6: Gesamtbruchteil β der Spaltneutronen, die verzögert emittiert werden, für schnelle und thermische Spaltung.

Kern	^{233}U	^{235}U	^{238}U	^{239}Pu	^{240}Pu	^{232}Th
$\beta_{schnell}$	0,0027 ±0,0002	0,0065 ±0,0003	0,0157 ±0,0012	0,0021 ±0,0002	0,0026 ±0,0026	0,022
$\beta_{therm.}$	0,0026 ±0,0002	0,0064 ±0,0003	—	0,0021 ±0,0002	—	—

Neutronen freizusetzen. Eine merkliche Intensität solcher Photoneutronen ist jedoch nur bei Materialien mit niedriger Schwellenergie für die endotherme (γ, n)-Reaktion zu erwarten, wie z. B. bei Be oder D_2O ($Q_{Be} = 1{,}67$ MeV, $Q_D = 2{,}23$ MeV). In beryllium- und schwerwassermoderierten Reaktoren spielen die Photoneutronen tatsächlich im Zeitverhalten und als Reststrahlung nach dem Abschalten eine Rolle. Neben den 6 Gruppen verspäteter Neutronen nach Tab. 3.3 müssen daher bei diesen Reaktoren weitere Gruppen verspäteter Neutronen (verspätete Photoneutronen) berücksichtigt werden. Die charakteristischen Daten für einen D_2O-Reaktor sind aus Tab. 3.7 zu entnehmen.

Tab. 3.7: Halbwertszeit und Häufigkeit der Photoneutronen, letztere bezogen auf 10^5 prompte Neutronen [25].

Gruppe	Halbwertszeit $\tau_{\frac{1}{2}}$, s	Häufigkeit $\beta_i \cdot 10^5$
1	2,5	78
2	41	24
3	144	8,4
4	462	4,0
5	1 620	2,5
6	5 940	2,8
7	15 840	0,39
8	190 800	0,12
9	1 105 200	0,05

3.4. *Aufteilung der Spaltenergie auf die kinetische Energie der Folgeprodukte*

Wir stellen abschließend die bei der Kernspaltung prompt und verzögert freigesetzten Energiebeträge zusammen. Für einen mittleren Spaltprozeß gilt folgende Energiebilanz:

Kinetische Energie der Spaltprodukte	168 MeV
Kinetische Energie der Spaltneutronen	5
Prompte γ-Strahlung	8
Verzögerte γ-Strahlung	7
β-Strahlung	8
Antineutrinos	12
Im Mittel je Spaltung freigesetzte kinetische Energie	208 MeV

Hinzu kommt die Energie der γ-Strahlung, die beim Einfang der Neutronen frei wird. Von den 208 MeV gehen 12 MeV Antineutrinoenergie dem Reaktor verloren. Ferner wird ein Teil der γ-Energie erst außerhalb der Spaltzone absorbiert. Der weitaus größte Teil der freigesetzten Kernenergie tritt jedoch infolge der kurzen Reichweite der Spaltprodukte am Ort der Kernspaltung in Form von Wärme auf. Die räumliche Verteilung der Wärmequellen im Reaktor folgt daher näherungsweise der räumlichen Verteilung der Spaltungen.

Für die technische Nutzung steht somit je Spaltung im Mittel eine Energie von

$$q = 196 \text{ MeV} = 3{,}1 \cdot 10^{-11} \text{ Ws} \tag{3.27}$$

zur Verfügung. Zur Aufrechterhaltung einer Wärmeleistung von 1 W müssen also sekundlich $3{,}2 \cdot 10^{10}$ Spaltungen stattfinden. Aus der Spaltung aller Kerne in 1 g ^{235}U erhalten wir eine Energie von $196 \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23}/235 = 5{,}0 \cdot 10^{23}$ MeV $= 1{,}9 \cdot 10^7$ kcal $= 2{,}2 \cdot$ $\cdot\, 10^4$ kWh $= 0{,}93$ MWd. Je Megawatt und Tag verbraucht also ein Reaktor etwa 1 g Uran.

Aufgaben

3.1. Wie groß ist die Strahlungsleistung eines Kernreaktors 1 h (1 d, 100 d) nach dem Abschalten, wenn der Reaktor $^1/_2$ Jahr lang mit einer thermischen Leistung von 1000 MW betrieben wurde?

3.2. Man zeige durch Reihenentwicklung von (3.15), daß die β^--Aktivität der Spaltprodukte nach einem $(t-T)^{-1,2}$-Gesetz abklingt, wenn die Bestrahlungszeit T kurz im Vergleich zu der Abklingzeit $t-T$ ist.

3.3. Der β-Zerfall des Spaltproduktes $^{90}_{38}$Sr ($\tau_{1/2} = 28$ a) und des Folgeproduktes $^{90}_{39}$Y ($\tau_{1/2} = 64{,}5$ h) soll in einer Isotopenbatterie mit nachgeschalteten thermoelektrischen Energiewandlern (Wirkungsgrad 5 %) eine elektrische Leistung von 10 W liefern. Wieviel Strontium wird für diese Isotopenbatterie benötigt, wenn die mittlere Energie der β-Strahlung bei Strontium 0,22 MeV, bei Yttrium 0,91 MeV beträgt? Es bestehe von vornherein Gleichgewicht zwischen Sr und Y (SNAP 7A).

3.4. Man berechne aus den Spaltspektren (3.18) die häufigste Energie der Spaltneutronen.

3.5. Wieviel Brennstoff wird in einem Kernreaktor mit einer thermischen Leistung von 1000 MW in einem Tag gespalten?

3.6. Wie groß muß der Spaltgasraum (Abschn. 3.1.1) in der Hülle eines Brennstoffstabes bei einem schnellen Brutreaktor gewählt werden, wenn der Spaltgasdruck bei einem mittleren Brennstoffabbrand von $7 \cdot 10^4$ MWd/t maximal 70 at betragen darf? Der Brennstoff sei ein $^{238}UO_2$-$^{239}PuO_2$-Gemisch, Dichte 10 g/cm³. Man nehme an, daß alle gasförmigen Spaltprodukte (im wesentlichen Xe und Kr) aus dem Brennstoff entweichen (je g Spaltstoff 28 cm³ bei 0 °C und 1 at). Die Hülle des Brennstoffstabs habe einen Innendurchmesser von 0,7 cm und sei 100 cm mit Brennstoff angefüllt. Anschließend beginnt der Raum für das Spaltgas; dessen Temperatur sei 450 °C.

4. Die Kettenreaktion

Nach der Beschreibung der Kernspaltung können wir jetzt die Grundprinzipien, nach denen eine Energiefreisetzung im makroskopischen Ausmaß erfolgt, umreißen. Dazu ist die Spaltung sehr vieler Kerne notwendig. Diese ist durch eine große Zahl von Neutronen herbeizuführen, die aus den Kernspaltungen selbst entstehen.

4.1. Der Reaktor mit schnellen Neutronen

Die Spaltneutronen haben eine Energieverteilung, die sich nach Abb. 3.3 von 0,01 bis 10 MeV (mit einem Mittelwert von 2 MeV) erstreckt. Diese Neutronen sollte man einem Urankern anlagern können, um dadurch weitere Spaltungen herbeizuführen. Leider geht dies in Natururan nur bedingt, weil die schnellen Neutronen durch die unelastische Streuung an den schweren Kernen, insbesondere an ^{238}U, rasch unter die Spaltschwelle des ^{238}U von 1,5 MeV abgebremst werden, und schließlich zum größten Teil unter Emission eines γ-Quants in ^{238}U absorbiert werden. Im Natururan (99,3 % ^{238}U und 0,7 % ^{235}U) kann daher keine Kettenreaktion mit schnellen Neutronen erzeugt werden. (Wenn die unelastische Streuung im ^{238}U lediglich so groß wäre wie im ^{235}U, wäre eine Kettenreaktion in Natururan ohne Zusätze (Moderator) möglich.) Ein Reaktor, bei dem die Kernspaltungen durch schnelle Neutronen ausgelöst werden sollen, muß vielmehr mit einem Spaltstoff angereichert sein, für den eine Schwellenergie nicht existiert, also mit ^{239}Pu, ^{235}U oder ^{233}U. Die Anreicherung muß bei ^{235}U als Spaltstoff mindestens 7 % betragen (gegenüber 0,7 % im Natururan).

Betrachten wir zunächst die Kettenreaktion in einer Kugel aus reinem Spaltstoff. Ein Spaltstoffkern absorbiert ein schnelles Neutron. Je absorbiertes Neutron entstehen bei der Spaltung im Mittel η_s schnelle Neutronen. Diese werden von den Spaltstoffkernen hin und her gestreut, bis sie wieder im Spaltstoff absorbiert werden oder aus der Spaltstoffkugel hinauslaufen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron wieder in der Spaltstoffkugel absorbiert wird, die sog. „Verbleibwahrscheinlichkeit", sei W_s. Nach Durchlaufen eines Neutronenzyklus werden also im Mittel anstelle des einen Neutrons

$$k = \eta_s \cdot W_s \tag{4.1}$$

Neutronen im Spaltstoff absorbiert. k heißt Multiplikationskonstante oder Vermehrungsfaktor.

Eine stationäre Kettenreaktion ohne Vermehrung oder Verminderung der Neutronenzahl tritt ein, wenn

$$k = 1 \text{ („kritischer“ Reaktor)} \tag{4.2}$$

gilt. Ist

$$k > 1 \text{ (überkritischer Reaktor),} \tag{4.3}$$

so vermehren sich die Neutronen (Anfahren eines Reaktors). Bei

$$k < 1 \text{ (unterkritischer Reaktor)} \tag{4.4}$$

klingt die Reaktionskette ab. Da für ^{235}U $\eta_s \approx 2$, folgt aus (4.1) für den kritischen Reaktor $W_s = 1/\eta_s \approx \frac{1}{2}$, d. h. nur etwa die Hälfte der erzeugten Neutronen darf in der Spaltstoffkugel absorbiert werden, wenn die Kettenreaktion stationär sein soll. Der Bruchteil $1 - W_s = 1 - 1/\eta_s$ muß aus der Spaltstoffkugel hinauslaufen. Da W_s mit der Größe des Spaltstoffvolumens variiert, ist durch diese Bedingung der kritische Radius der Spaltstoffkugel festgelegt. Umgeben wir die Spaltstoffkugel mit einem Material, das die aus der Kugel entweichenden Neutronen zu einem nennenswerten Bruchteil zurückstreut, so nimmt W_s zu, der Reaktor wird überkritisch. Um wieder einen kritischen Reaktor zu bekommen, muß die Ausflußwahrscheinlichkeit durch Verkleinerung der Spaltstoffkugel erhöht werden (die Ausflußwahrscheinlichkeit hängt in erster Näherung bei Annahme einer konstanten Neutronendichte vom Verhältnis Oberfläche/Volumen $\sim 1/r$ ab), bis wieder $W_s = 1/\eta_s$ gilt. Wir nennen die beiden Zonen des Reaktors Spaltzone und Reflektor.

Die kritische Spaltstoffmenge für eine nackte Kugel aus 93,9 % ^{235}U und 6,1 % ^{238}U der Dichte 18,75 g/cm^3 beträgt 48,8 kg, ein Graphitreflektor von 43,2 cm Dicke verringert die kritische Masse auf 16,9 kg, ein Natururanreflektor von 20,3 cm auf 16,28 kg [11].

Betrachtet man schnelle Leistungsreaktoren, so befinden sich in deren Spaltzone neben dem Spaltstoff eine Reihe weiterer Substanzen, welche die Kettenreaktion beeinflussen. Das Volumen kann etwa wie folgt aufgeteilt sein: 30 % Brennstoff, bestehend aus 10 % Spaltstoff (^{239}Pu und ^{241}Pu) und 90 % Brutstoff (^{238}U und ^{240}Pu), 20 % Struktur- und Regelmaterialien und 50 % Natrium als Kühlmittel. Die Kettenreaktion stellt sich in diesem Reaktor

wie folgt dar: Von den im Reaktor absorbierten Neutronen entfällt der Bruchteil f_s (Nutzfaktor) auf Absorptionen im Spaltstoff, der Bruchteil $1 - f_s$ auf Absorptionen in Brutstoff, Absorberstäben, Strukturmaterial und Kühlmittel. Je Absorption im Spaltstoffkern werden η_s schnelle Neutronen freigesetzt. Bezogen auf 1 absorbiertes Neutron entstehen $f_s \cdot \eta_s$ schnelle Neutronen. Durch Spaltungen im Brutstoff erhöht sich die Zahl der schnellen Neutronen um den Faktor ε auf

$$Q_s^* = f_s \cdot \eta_s \cdot \varepsilon . \tag{4.5}$$

Q_s^* ist die Zahl der schnellen Neutronen, die für ein absorbiertes schnelles Neutron freigesetzt wird. Berücksichtigen wir nun noch, daß nur der Teil W_s im Reaktor verbleibt, während der Teil $(1 - W_s)$ hinausläuft, so ergibt sich die Multiplikationskonstante für einen Neutronenzyklus zu

$$k = f_s \cdot \eta_s \cdot \varepsilon \cdot W_s . \tag{4.6}$$

Der Aufbau eines Leistungsreaktors muß der kritischen Bedingung $k = 1$ Rechnung tragen. Darüber hinaus muß die durch die Kernspaltungen freigesetzte Wärme abgeführt werden. Mit Natrium kann man schnelle Reaktoren mit Leistungsdichten bis zu 0,5 MW/l kühlen. Ein Reaktor mit 1000 MW thermischer Leistung muß also mindestens eine Spaltzone von 2000 l haben. Der Spaltstoffeinsatz eines solchen Reaktors liegt in der Größe einer Tonne Plutonium.

Für einen Brutreaktor ist die Bildung neuer Spaltstoffe aus Brutstoffen gemäß (2.3–4) ein Charakteristikum. Sie geschieht in der Spaltzone (sofern diese Brutstoff enthält) und in einem Mantel aus Brutstoff, der um die Spaltzone gelegt ist (Brutmantel). Sie wird quantitativ durch die Brutrate BR erfaßt, die definiert ist durch

$$BR = \frac{\text{Zahl der aus Brutstoffen erzeugten Spaltstoffkerne}}{\text{Zahl der verbrauchten Spaltstoffkerne}} \tag{4.7}$$

Zähler und Nenner beziehen sich jeweils auf gleiche Zeiträume. Die Größe $BR - 1$ wird als Brutgewinn BG bezeichnet:

$$BG = BR - 1 . \tag{4.8}$$

Bei einem großen natriumgekühlten schnellen Brutreaktor kann sich die Brutrate wie folgt zusammensetzen [27]:

$BR =$	0,556	(innere Spaltzone)
$+$	0,334	(äußere Spaltzone mit etwas höherer Spaltstoffanreicherung)
$+$	0,254	(axialer Brutmantel)
$+$	0,241	(radialer Brutmantel)
$BR =$	1,385	

4.2. Der Reaktor mit thermischen Neutronen

Reaktoren, die sich auf Spaltungen durch schnelle Neutronen gründen, gehören zu den technisch komplizierteren Konzeptionen. Leichter realisierbar sind Reaktoren, die die Spaltungen durch abgebremste Neutronen ausnützen, die in Wechselwirkung mit der Wärmebewegung ihrer Umgebung stehen, sog. thermische Neutronen. Mit abnehmender Energie nimmt die Neutronenanlagerungswahrscheinlichkeit beim ^{235}U sehr stark zu. Dadurch reicht bereits eine geringe Konzentration des ^{235}U aus, um eine Kettenreaktion aufrechtzuerhalten. Allerdings müssen die Verluste während des Bremsprozesses sehr klein gehalten werden. Hier ist vor allem auf das nicht spaltbare ^{238}U zu achten.

Um die Neutronen möglichst gut über denjenigen Energiebereich hinwegzubringen, in dem das ^{238}U absorbiert, ohne zu spalten, und die Spaltwahrscheinlichkeit des ^{235}U nicht sehr groß ist, fügt man dem Uran eine Bremssubstanz zu, die die Abbremsung besser besorgt als das Uran. Man nennt die dafür geeigneten Stoffe – z. B. Wasser oder Graphit – Moderatoren. Der Moderator kann mit dem Brennstoff durchmischt sein. Dann spricht man von homogenen Reaktoren. Solche sind heute technisch nur für geringe Leistungen realisiert (Forschungsreaktoren mit $P < 100$ kW, kritische ^{235}U-Masse in der Größe von 1 kg bei Wasserstoffmoderation). Ist Brennstoff und Moderator räumlich getrennt (gitterartige Struktur von Brennstoffstäben oder -lamellen mit Dicken von mm bis cm, eingebettet in einen Moderator), so spricht man von heterogenen Reaktoren. Ist der Moderator flüssig, so kann er gleichzeitig als Kühlmittel, d. h. zum Transport der anfallenden Wärme aus dem Innern des Reaktors verwendet werden. Eine Mischung von Spaltstoff und Moderator, in der eine Kettenreaktion ablaufen kann, nennt man ein multiplizierendes Medium.

Bei einem moderierten Reaktor stellt sich das Neutronenschicksal folgendermaßen dar. Wir betrachten es in 7 Schritten.

1. Wir beginnen mit der Betrachtung des Schicksals der vorhandenen thermischen Neutronen. Sofern diese nicht aus dem Reaktor hinausdiffundieren, werden sie irgendwo absorbiert. Im Gegensatz zum schnellen Reaktor kommen hierfür nicht nur die Spaltstoffkerne ^{235}U und Brutstoffkerne ^{238}U in Frage, sondern auch die Kerne des Moderators (neben Kühlmittel und Strukturmaterialien). Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Neutrons im ^{235}U sei f_{th}, in allen anderen Kernen $1 - f_{th}$. Die Größe f_{th} heißt thermischer Nutzfaktor oder thermische Nutzung.

2. Die Mehrzahl der Absorptionen in ^{235}U führt zur Kernspaltung (vgl. Tab. 3.1). Dabei entstehen, bezogen auf ein im ^{235}U absorbiertes thermisches Neutron, im Mittel η_{th} schnelle Neutronen (Zahlwerte in Tab. 3.1). Ein absorbiertes thermisches Neutron im Reaktor bewirkt also über den (thermischen) Spaltakt eine Freisetzung von (schnellen) Neutronen mit der Wahrscheinlichkeit $f_{th} \cdot \eta_{th}$. Diese Zahl liegt bei Natururan-Graphit-Reaktoren in der Größe von 1,1 bis 1,2, bei Leichtwasserreaktoren mit einer ^{235}U-Anreicherung von 2–3% in der Größe von 1,4 bis 1,6.

3. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, daß dieses Neutron als schnelles Teilchen mit $E \geqq 1{,}5$ MeV eine Spaltung des ^{238}U hervorruft. Diese Möglichkeit ist in unserem Konzept nicht sehr groß. Sie bedeutet aber doch eine kleine Vermehrung der schnellen Neutronen. Den Vermehrungsfaktor bezeichnen wir mit ε^{238}. Ein charakteristischer Zahlwert für einen Natururan-Graphit-Reaktor ist 1,03, für einen heterogenen Leichtwasser-Reaktor (Spaltstoffanreicherung 2—3 %) kann ε^{238} bis zu 1,1 betragen. Bezogen auf ein thermisches Neutron im Reaktor hat man nach Durchlaufen dieser Prozeßfolge im Mittel $f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon^{238}$ schnelle Neutronen.

4. In der Mehrzahl der Fälle wird das Neutron auf seinem Weg mit den Kernen des Bremsmittels zusammenstoßen und dabei jedesmal einen Teil seiner Energie abgeben. Kommt es während des Bremsprozesses in Berührung mit ^{235}U, so kann dies zu einer Spaltung führen, und man erhält am Ort der Absorption eine Quelle schneller Neutronen. Diese Quelle führt zu einer Vermehrung der vorhandenen schnellen Neutronen. Wir bezeichnen den Vermehrungsfaktor mit ε^{235}. Bei Natururanreaktoren und schwach angereicherten Reaktortypen ist praktisch $\varepsilon^{235} = 1$. Bei Reaktoren, die mit Kernbrennstoff arbeiten, in dem der Spaltstoff ^{235}U gegenüber ^{238}U höher angereichert wurde, kann er eine dominierende Rolle spielen. Wir bezeichnen das Produkt $\varepsilon^{235} \cdot \varepsilon^{238}$ mit ε. ε heißt

Schnellspaltfaktor. Die relative Zahl der schnellen Sekundärneutronen beträgt jetzt $f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon$.

5. In der Regel jedoch ist neben den Bremsprozessen die Absorption im ^{238}U zu beachten ((n, γ)-Prozesse). Man pflegt die Wahrscheinlichkeit, daß das Neutron während des Bremsprozesses von ^{238}U nicht eingefangen wird, mit p zu bezeichnen. Wir nennen sie „Bremsnutzung". Es ist natürlich stets $p < 1$. Hatte man ursprünglich ein thermisches Neutron im multiplizierenden Medium, so haben wir unter Berücksichtigung der „schnellen Spaltungen" und des Einfangs während des Bremsvorgangs $f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon \cdot p$ Neutronen, die nun wieder thermisch sind. Zur Abkürzung führt man

$$k_\infty = f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon \cdot p \tag{4.9}$$

ein, k_∞ ist der Vermehrungsfaktor für eine unendlich ausgedehnte Anordnung von Spaltstoff, Moderator und ev. weiteren Materialien.

6. Wir haben bisher nicht berücksichtigt, daß die Neutronen während der Bremsung aus der Spaltzone hinausdiffundieren können. Ist W_s die Verbleibwahrscheinlichkeit der Bremsneutronen, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron während des Bremsprozesses nicht aus der Spaltzone hinausläuft, so ist die Zahl der in der Spaltzone thermisch werdenden Neutronen

$$Q_{th}^* = f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot W_s = k_\infty \cdot W_s. \tag{4.10}$$

Q_{th}^* ist die Quellstärke der thermischen Neutronen, die auf die Absorption eines thermischen Neutrons im multiplizierenden Medium zurückgeht.

7. Die thermischen Neutronen können wie die schnellen Neutronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Reaktor hinausdiffundieren. Ist W_{th} die thermische Verbleibwahrscheinlichkeit, so ist durch das Produkt $f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot W_s \cdot W_{th}$ jener Zyklus schematisch beschrieben, der den Ablauf der Kettenreaktion eines thermischen Reaktors kennzeichnet.

$$k = f_{th} \cdot \eta_{th} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot W_s \cdot W_{th} = k_\infty \cdot W_s \cdot W_{th} \tag{4.11}$$

ist der Vermehrungsfaktor für die endliche Anordnung. $k \gtreqless 1$ kennzeichnet den Zustand des Reaktors, s. Gl. (4.2–4).

k_∞ ist durch die Eigenschaften der Reaktormaterialien bestimmt. Dahin gehören: Konzentration des Urans, Anreicherungsgrad,

Art des Bremsmittels, Kühlmittels und Strukturmaterials, homogene oder heterogene Konzeption. Für jeden Reaktor muß $k_\infty > 1$ sein. – Die Größen W_s und W_{th} enthalten demgegenüber auch die Abmessungen von Spaltzone und Reflektor. Je größer die Spaltzonen sind, desto mehr nähern sich die Verbleibwahrscheinlichkeiten der 1, desto weniger hohe Anforderungen sind an die Neutronenfreisetzung je absorbiertes Neutron zu stellen. Für einen stationär arbeitenden Reaktor, der uns hier interessiert, muß die kritische Bedingung (4.2 mit 4.11) $k = k_\infty \cdot W_s \cdot W_{th} = 1$ erfüllt sein. Irgendwelche Störungen, die im Laufe der Zeit in dieser „kritischen Bedingung" an einem der eingehenden Faktoren eintreten, müssen durch einen anderen kompensiert werden. Z. B. ist der Verbrauch von Spaltstoff und der Aufbau von Neutronengiften im Laufe der Betriebszeit eines Reaktors nicht zu vermeiden. Zum Ausgleich muß ein parasitärer Absorber, der anfangs zu diesem Zweck einzubringen ist, allmählich entfernt werden. Darauf beruht die Notwendigkeit, Steuerstäbe aus neutronenabsorbierendem Material wie Cadmium oder Bor in einen Reaktor einzubauen. Die Steuerstäbe dienen ferner zum Anfahren und Abschalten des Reaktors.

4.3. Allgemeine Definition des Neutronenvermehrungsfaktors

Die modellmäßige Betrachtung des Schicksals der Neutronen in der Kettenreaktion erlaubt uns, eine Verallgemeinerung der Definition für den Neutronenvermehrungsfaktor, der die zentrale Größe in der Reaktortheorie ist, zu geben. Sie lautet:

$$k = \frac{\text{Zahl der erzeugten Neutronen}}{\text{Zahl der absorbierten und ausfließenden Neutronen}}. \qquad (4.12)$$

Zähler und Nenner sind auf gleiche Zeiträume bezogen. k ist eine integrale Größe und ist nur für den Reaktor als ganzes definiert. Diese Definition gilt für alle Arten von Reaktoren. Der Ausdruck (4.11) ist eine ganz spezielle Darstellung von k für einen thermischen Reaktor, die charakteristische Phasen des Gesamtgeschehens in der Kettenreaktion heraushebt. Die Berechnung von k über die 6 Faktoren wird aber oft den wirklichen Verhältnissen nicht gerecht, weil die Separation des komplexen Ablaufs in die 6 Phasen nicht ohne Opfer an Genauigkeit möglich ist. Ähnliches gilt für die Formeln (4.1) und (4.6). Es ist die Aufgabe der folgenden Kapitel, diesen Problemkreis darzustellen.

Anstelle von k benutzt man oft die „Reaktivität“

$$\frac{k-1}{k} = \varrho. \tag{4.13}$$

Die Reaktivität mißt die Abweichung des Vermehrungsfaktors von 1 und geht daher in die Beschreibung der nichtstationären Vorgänge ein. Für den stationären Reaktor ist $\varrho = 0$.

4.4. Der Aufbau eines Kernreaktors

Abb. 4.1 zeigt als Beispiel schematisch den Aufbau eines Druckwasserreaktors. Die Spaltzone besteht hier aus einem Gitter von Brennstoffstäben, das von Wasser durchströmt wird. Das Wasser hat in diesem Reaktor die Funktion des Kühlmittels, Moderators und Reflektors.

Der Brennstoff besteht aus UO_2, das in Hüllrohre aus Zirkonverbindungen oder Stahl gefaßt ist. Die Anreicherung des ^{235}U beträgt 2 – 3 %. Die Brennstoffstäbe werden zu Bündeln, den Brennelementen, zusammengefaßt. Die Spaltzone eines großen Leistungsreaktors enthält einige hundert solcher Brennelemente.

Zur Steuerung des Reaktors können Steuerstäbe, die Bor oder Cadmium enthalten, in dem Raum zwischen den Brennstoffstäben aus- oder eingefahren werden.

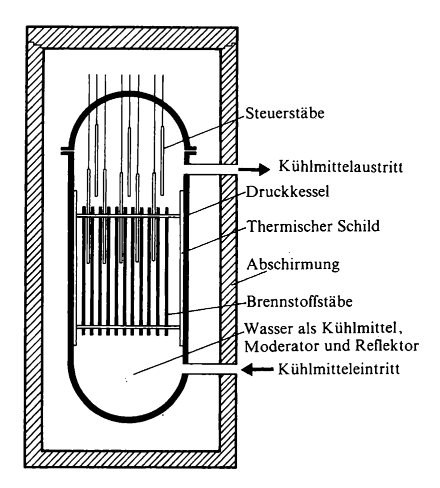


Abb. 4.1: Schematische Darstellung des Aufbaus eines Kernreaktors [28].

Tab. 4.2: Technische Daten für einen Siedewasserreaktor (Kernkraftwerk Gundremmingen [29]).

Gesamtanlage	
Anlagentyp:	Zweikreis-Siedewasserreaktor m. Zwangsumlauf
Leistung:	
Reaktor	801 MW_{th}
Brutto	252 MW_e
Netto	237 MW_e
Nettowirkungsgrad	29,6 %
Brennstoff	UO_2
Reaktordruckgefäß:	
Innere Höhe	16,40 m
Innendurchmesser	3,70 m
Werkstoff	20 NiMoCr 36
Auslegungsdruck	87,9 atü
Gewicht (ohne Einbauten und Deckel)	265 t
Reaktordruckschale:	
Höhe	60 m
Durchmesser	30 m
Werkstoff	Feinkornstahl
Auslegungsdruck	3,55 atü
Turbine:	
Zahl der Gehäuse	HD 1 (einflutig) ND 1 (zweiflutig)
Drehzahl	1500 U/min
Zahl der Entnahmen	5
Schaufellänge der Endstufen	1320 mm
Kondensatordruck	0,03 ata
Generator:	
Kühlung	Ständer H_2O Läufer H_2
Leistung	317 MVA
Klemmenspannung	21 kV
Drehzahl	1500 U/min
Leistungsfaktor	0,79 induktiv
Leerlaufkurzschlußverhältnis	0,55
Wasserstoffdruck	3 atü
Kühlmitteldaten bei Nennleistung	
Primärkreis:	
Thermische Reaktor-Nennleistung	801 MW_{th}
Reaktordruck (Dampfaustritt)	71,3 ata
Temperatur des Reaktordampfes	286 °C
Dampferzeugung	1020 t/h
Wasserumlauf	12250 t/h
Unterkühlung	25,0 kcal/kg
Speisewassertemperatur	198,6 °C
Durchschnittl. Dampfgehalt im Reaktorkern	19 Vol.-%
Mittlere Leistungsdichte	40,8 kW/l
Sekundärkreis:	
Sekundärdampferzeuger	3
Druck	35,2 ata
Temperatur	242°C
Dampferzeugung	450 t/h
Speisewassertemperatur	198,6°C
Reaktorkern	
Thermische Belastung	
Durchschnittl. Wärmestromdichte	$3{,}3 \cdot 10^5$ kcal/m²h
Maximale Wärmestromdichte	$9{,}96 \cdot 10^5$ kcal/m²h
Minimale Durchbrennsicherheit	$> 1{,}5$
Durchschnittl. Leistungsdichte im Uran	17,1 kW/kg U
Maximale Brennstofftemperatur bei Auslegungsüberlast	< 2730 °C
k (kalt, unvergiftet)	1,27
k (Gleichgewichtszustand)	1,19
Abbrand des Erstkernes	16500 MWd/t
Endzusammensetzung nach 16000 MWd/t:	
Urangehalt	97,63 Gew.-%
Anreicherung des verbliebenen Urans	0,94 % ^{235}U
Plutonium-Gehalt	0,62 %
Spaltbarer Anteil des Pu	71,2 %
Dimensionen:	
Umschriebener Kerndurchmesser	2,89 m
Äquivalenter Kerndurchmesser	2,75 m
Aktive Kernhöhe	3,30 m
Volumenverhältnis H_2O/UO_2	2,3
Gewichte:	
U-Gewicht der Kernladung	46710 kg
Anfangszusammensetzung	
U mit 2,35 Gew.-% ^{235}U	37610 kg
U mit 1,68 Gew.-% ^{235}U	9093 kg
Zirkon-Gewicht im Kern	11830 kg
Gesamtgewicht pro Brennelement	198 kg
Brennelemente:	
Anzahl der Elemente	368
Anzahl der Stäbe pro Element	36
Aktive Länge der Stäbe	3,30 m
Außendurchmesser der Stäbe	14,29 mm
Wandstärke der Hüllrohre (Zr-2)	0,89 mm
Steuerstäbe:	
Anzahl	89 (kreuzförmig)
Absorptionsmaterial	B_4C
Hüllmaterial	nichtrostender Stahl
Blattstärke	6,85 mm
Blattweite	200 mm
Länge des Absorptionsteiles	3,25 m
Antrieb	hydraulisch

Zum Schutz des Druckkessels vor Strahlenschäden und zu starker Erwärmung durch Strahlenabsorption wird auf der Innenseite des Kessels ein „thermischer" Schild angebracht. Gegen die durchdringende Strahlung der schnellen Neutronen und Gammaquanten wird der Reaktor mit einer „biologischen" Abschirmung umgeben. Sie muß so bemessen sein, daß die höchstzulässige Neutronen- und Gammastrahlung an der Oberfläche der Abschirmung nicht überschritten wird, s. Tab. 4.1.

Tab. 4.1: Zahl der Neutronen und Gammaquanten je cm^2 und s in Abhängigkeit von der Energie, die einzeln die höchste zugelassene Äquivalentdosisrate von $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ rem/h ergeben.

Teilchenenergie, eV	0,025	10^5	$2 \cdot 10^6$
Neutronen/cm^2s	670	67	13
Gammaquanten/cm^2s	–	$1{,}5 \cdot 10^4$	700

Tab. 4.2 enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten technischen Daten für einen Siedewasserreaktor.

Aufgaben

4.1. Wieviel Plutonium wird in einem Leichtwasserreaktor von 1000 MW thermischer Leistung mit der Brutrate $BR = 0{,}6$ in einem Jahr erzeugt?

4.2. Man stelle die Brutrate BR einer aus ^{239}Pu und ^{238}U quasihomogen zusammengesetzten, schnellen Anordnung durch die Größen $\eta_{s,\varepsilon}$ und W_s dar.

4.3. Wieviel Brutstoffkerne können theoretisch bei sehr langer Betriebszeit in einem Natururan-Schwerwasser-System je ursprünglich eingesetztem Spaltstoffkern in Spaltstoffkerne umgewandelt werden, wenn $BR = 0{,}8$ bzw. 0,9 beträgt? Man nehme an, daß der Spaltstoff aus den entladenen abgebrannten Brennelementen wieder verlustfrei in den Reaktor zurückgeführt werden kann. Um welchen Faktor erhöht sich durch den Abbrand des Brutstoffes die insgesamt aus dem Natururan gewinnbare Kernenergie?

Literaturverzeichnis

[1] Hyde, E. K., I. Perlman, and G. T. Seaborg: Nuclear properties of the heavy elements. Vol. I. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[2] Green, A. E. S.: Coulomb radius constant from nuclear masses. Phys. Rev. **95**, 1006 (1954).

[3] Wapstra, A. H.: Atomic masses of nuclides. Handbuch der Physik, Bd. XXXVII, /1, Springer, Berlin 1958.

[4] Halpern, I.: Persistent puzzles about the nuclear fission process. AED-Conf. 1961, 022-36.

[5] BOHR, N., and J. A. WHEELER: The mechanism of nuclear fission. Phys. Rev. **56**, 426 (1939).
[6] WHEELER, J. A.: Fission physics and nuclear theory. Proc. Int. Conf., Geneva 1955, Vol. 2, p. 155.
[7] WHEELER, J. A.: Channel analysis of fission. Fast Neutron Physics, Part. II. Interscience Publishers, New York 1963.
[8] NORTHROP, J. A., R. H. STOKES, and K. BOYER: Measurement of the fission thresholds of ^{239}Pu, ^{233}U, ^{235}U, ^{238}U using the (d, p)-reaction. Phys. Rev. **115**, 1277 (1959).
[9] GLASSE, R. A., S. G. THOMPSON, and G. T. SEABORG: Nuclear thermodynamics of the heaviest elements. J. Inorg. Nuclear Chem. **1**, 3 (1955).
[10] HAHN, O., und F. STRASSMANN: Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle. Naturwiss. **27**, 11 (1939).
[11] Reactor physics constants. ANL 5800. Sec. Ed. 1963.
[12] Reactor Handbook, Vol. III Part A, Physics, p. 25. Interscience Publishers, New York 1962.
[13] SHURE, K., and D. J. DUDZIAK: Calculating energy released by fission products. Trans. ANS **4**, 30 (1961).
[14] FERREL, J.: Neutron yields from individual fission fragments. Phys. Rev. **127**, 880 (1962).
[15] HENKEL, R. L.: Fission by fast neutrons. Fast neutron physics, part II. Interscience Publishers, New York 1963.
[16] BONDARENKO, I. I., B. D. KUZMINOW, L. S. KUTSAYEVA, L. I. PROKHOROVA, and G. N. SMIRENKIN: Average number and spectrum of prompt neutrons in fast-neutron-induced fission. Proc. Sec. Int. Conf., Geneva 1958, Vol. 15, p. 353.
[17] MATHER, D. S., P. FIELDHOUSE, and A. MOAT: Average number of prompt neutrons from ^{235}U fission induced by neutrons from thermal to 8 MeV. Phys. Rev. **133** B, 1403 (1964).
[18] Neutron Cross Sections, BNL 325 Sec. Ed. Suppl. No. 2, Febr. 1965.
[19] WATT, B. E.: Energy spectrum of neutrons from thermal fission of ^{235}U. Phys. Rev. **87**, 1037 (1957).
[20] LEACHMANN, R. B.: Determinations of fission quantities of importance to reactors. Proc. Int. Conf., Geneva 1955, Vol. 2, p. 193.
[21] KEEPIN, G. R.: Delayed neutrons. Progress in nuclear energy, Ser. I, Vol. I., Pergamon Press, London 1956.
[22] COOPER, J. R., et al.: Reactor neutron cross sections in fine energy detail. APEX 704, p. 55 (1961).
[23] KEEPIN, G. R.: Delayed neutrons. J. Nucl. Energy **7**, 13 (1958).
[24] KEEPIN, G. R., T. F. WIMETT, and R. K. ZEIGLER: Delayed neutrons from fissionable isotopes of uranium, plutonium and thorium. Phys. Rev. **107**, 1044 (1957).
[25] LANDBY, A., and N. HOLT: Kinetic behavior of a thermal heavy-water reactor. Nucleonics **12**, 22 (1954).
[26] HERTZ, G.: Lehrbuch der Kernphysik, Bd. 2, Teubner, Leipzig, Dausien, Hanau 1961.
[27] SMIDT, D., und A. MÜLLER: Referenzstudie für den 1000 MWe natriumgekühlten schnellen Brutreaktor (Na-1) KFK-299 (1964).
[28] HOGERTON, J. F.: Nuclear reactors. US Atomic Energy Commission, 1965.
[29] RINGEIS, W. K., W. STRASSER und K. PEUSTER: Kernkraftwerk Gundremmingen. Aufbau der Gesamtanlage. Atomwirtschaft **10**, 575 (1965).

II. WIRKUNGSQUERSCHNITTE

1. Grundlegende Begriffe

Grundlegend für die Formulierung der Neutronenbilanz in einem Volumelement des Reaktors ist die Zahl der Ereignisse (Streuungen, Einfänge, Spaltungen usw.) je Zeiteinheit. Wir bezeichnen sie als Stoßrate und – aufgegliedert nach der Stoßart – als Streu-, Einfang- oder Spaltrate. Die Stoßrate läßt sich bei Kenntnis der Zahl der Kerne in der Volumeinheit, der Neutronenzahldichte und der Relativgeschwindigkeit zwischen den Stoßpartnern angeben, sofern die effektive Fläche σ, die ein Atomkern einem Neutronenstrom darbietet, bekannt ist. σ heißt der atomare (vielfach auch „mikroskopische") Wirkungsquerschnitt. Diese „effektive" Fläche ist nicht mit dem geometrischen Kernquerschnitt zu verwechseln, wenn auch die Vorstellung oft hilfreich sein kann. Sie ist vielmehr eine fiktive Fläche, die mit der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines Stoßes, einer Streuung, Absorption oder Spaltung gekoppelt ist. Demzufolge spricht man von einem totalen Wirkungsquerschnitt, einem Streu-, Einfang- und Spaltquerschnitt.

1.1. Totaler Wirkungsquerschnitt, Stoßrate, mittlere freie Weglänge

Totaler Wirkungsquerschnitt, Stoßrate. Wir betrachten die Zahl der Stöße in einer Anordnung, die der Messung des totalen Wirkungsquerschnitts σ_T zugrunde liegen soll. Ein ausgedehnter Strahl mit n Neutronen je cm^3 und der Geschwindigkeit v treffe senkrecht auf eine Materialprobe der Fläche q und Dicke d mit N Atomkernen je cm^3. Auf einen Kern mit der Stoßfläche σ_T treffen dabei je s $\sigma_T \cdot v \cdot n$ Neutronen. Wenn die Probe dünn ist, findet man experimentell, daß die Zahl der Stöße je Sekunde, die „Stoßrate", proportional zur Dichte n der Neutronen im Strahl, zur Relativgeschwindigkeit v und zur Zahl der Kerne in der Probe ist. Letztere ist $q \cdot d \cdot N$. Der Proportionalitätsfaktor ist der totale atomare

Wirkungsquerschnitt σ_T (auch totaler mikroskopischer Wirkungsquerschnitt genannt) mit der Dimension cm². Folglich gilt für die Stoßrate in der Probe mit dem Volumen $q \cdot d$:

$$F \cdot q \cdot d = \sigma_T \cdot n \cdot v \cdot q \cdot d \cdot N. \tag{1.1}$$

Bezieht man die Stöße auf die Zeit- und Volumeneinheit, so gewinnt man die „Stoßratendichte" F; für sie gilt

$$F = \sigma_T \cdot n \cdot v \cdot N. \tag{1.1a}$$

Von den Neutronen $J_0 = n \cdot v \cdot q$, die je s in die Probe eintreten, wird die in (1.1) berechnete Zahl durch Stöße aus dem Strahl entfernt. Hinter der dünnen Probe befinden sich also nur noch $J_1 = v \cdot n \cdot q \cdot (1 - \sigma_T \cdot N \cdot d)$ Neutronen im Strahl, die man experimentell bestimmt. Die relative Änderung der Strahlintensität ist

$$\frac{J_0 - J_1}{J_0} = \sigma_T \cdot N \cdot d. \tag{1.2}$$

Daraus kann man bei Kenntnis von N und Probendicke d den totalen atomaren Wirkungsquerschnitt σ_T bestimmen.

Die Größe

$$\Sigma_T = \sigma_T \cdot N, \tag{1.3}$$

die stets bei der Formulierung von Stoßraten auftritt, heißt makroskopischer Wirkungsquerschnitt. Σ_T stellt die Summe der Wirkungsquerschnitte aller Kerne im cm³ dar, die Dimension ist cm²/cm³. Für ein Gemisch verschiedener Kernsorten gilt

$$\Sigma_T = \sum_i \sigma_T^i N^i = \sum_i \Sigma_T^i. \tag{1.4}$$

Die mittlere freie Weglänge in einem homogenen Medium. Schreibt man (1.2) differentiell als Änderung der Strahlintensität bei Durchsetzen einer Schicht von x nach $x + \mathrm{d}x$, nämlich

$$J(x) - J(x + \mathrm{d}x) = J(x) \cdot \Sigma_T \cdot \mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

so folgt

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x} = -J(x) \cdot \Sigma_T, \tag{1.6}$$

mit der Lösung

$$J(x) = J_0 \cdot \mathrm{e}^{-\Sigma_T \cdot x}. \tag{1.7}$$

Der Bruchteil

$$p(x) = \frac{J(x)}{J_0} = \frac{n(x)}{n_0} = e^{-\Sigma_T \cdot x} \tag{1.8}$$

der einfallenden Neutronen befindet sich nach der Strecke x noch im Strahl. $p(x)$ ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron auf der Strecke x keinen Stoß erleidet.

Oft benötigt man die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron eine bestimmte Strecke x ohne Stoß durchsetzt und dann zwischen x und $x + dx$ stößt. Hierfür gilt

$$w(x)\,dx = p(x)\Sigma_T\,dx. \tag{1.9}$$

Mit Sicherheit stößt das Neutron in einer unendlich dicken Schicht. D. h. es ist

$$\int_{x=0}^{\infty} w(x)\,dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\Sigma_T x}\,\Sigma_T\,dx = 1. \tag{1.10}$$

Für die mittlere freie Weglänge λ_T eines Neutrons bis zu seinem ersten Stoß gilt

$$\lambda_T = \frac{\int_{x=0}^{\infty} x\,w(x)\,dx}{\int_{x=0}^{\infty} w(x)\,dx} = \int_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\Sigma_T x}\,\Sigma_T\,dx = \frac{1}{\Sigma_T}. \tag{1.11}$$

Für die mittlere freie Weglänge in Kerngemischen gilt mit (1.4)

$$\frac{1}{\lambda_T} = \sum_i \frac{1}{\lambda_{Ti}}. \tag{1.12}$$

In festen Stoffen ist der Zahlenwert von λ_T in der Größenordnung cm.

Streuweglänge und mittlere Lebensdauer eines thermischen Neutrons. In Übertragung des Begriffs der mittleren freien Weglänge $\lambda_T = 1/\Sigma_T$ spricht man auch von der Streuweglänge $\lambda_S = 1/\Sigma_S$ und von der Absorptionsweglänge $\lambda_A = 1/\Sigma_A$. Die hierzu gehörenden Wirkungsquerschnitte Σ_S und Σ_A für Streuung und Absorption werden weiter unten erläutert.

Während λ_T die geradlinige Strecke zwischen zwei Stößen ist, erstreckt sich λ_A über den gesamten Zickzackweg bis zur Absorp-

tion. Ist v die mittlere Geschwindigkeit des Neutrons, so ist die mittlere Lebensdauer bis zur Absorption

$$l_0 = \frac{\lambda_A}{v} = \frac{1}{v\,\Sigma_A}\,. \tag{1.13}$$

Die Flußdichte. Die Formulierung der Stoßratendichte (1.1a) bezogen wir auf die Volumeneinheit einer plättchenförmigen Probe, deren Dicke d in Strahlrichtung klein gegenüber der freien Weglänge λ_T ist, denn nur dann gilt die Proportionalität der Stoßrate zur Probendicke, s. (1.1). Wenn nun die Abmessungen der Probe diese Bedingung in allen Richtungen erfüllen, ist der Bezug auf einen gerichteten Strahl nicht mehr notwendig. Die Bestrahlung eines Volumelementes aus allen Richtungen entspricht den Verhältnissen im Reaktor. Wir verstehen daher hinfort unter n die Zahl der Neutronen in der Volumeinheit mit der Geschwindigkeit v in allen möglichen Flugrichtungen. Das häufig vorkommende Produkt $n \cdot v$ bezeichnen wir als Flußdichte Φ:

$$\Phi = n \cdot v\,. \tag{1.14}$$

Φ ist ein Skalar mit der Dimension einer Stromdichte, Neutronen/cm^2s. In der elementaren Theorie der Bewegung von Neutronen in Materie, der Diffusionstheorie, werden wir für Φ eine quasiisotrope Verteilung der Flugrichtungen voraussetzen. Φ bedeutet anschaulich den Weg, der von allen n Neutronen aus der Volumeinheit in der Sekunde zurückgelegt wird.

1.2. Wirkungsquerschnitte für verschiedenartige Stoßprozesse

Sofern man nicht die totale Stoßrate der Neutronen beschreiben will, sondern das Eintreten eines bestimmten Prozesses wie Streuung, Einfang oder Kernspaltung ausdrücken möchte, führt man die zugehörigen partiellen Wirkungsquerschnitte ein. Die Summe aller möglichen partiellen Wirkungsquerschnitte gibt den totalen Wirkungsquerschnitt.

Die Bezeichnung der Wirkungsquerschnitte erfolgt, soweit möglich, durch das nach der Wechselwirkung emittierte Teilchen (Nomenklatur von H. GOLDSTEIN [1]). Bei einem Streuakt, einem (n, n)-Prozeß, ist es das Neutron selbst, daher ist das Formelzeichen für den Streuquerschnitt σ_n. Eine Streuung kann elastisch oder unelastisch, d. h. unter Kernanregung, erfolgen. Für den Wirkungsquer-

schnitt einer unelastischen Streuung (n, n′) schreiben wir $\sigma_{n'}$. Die Summe der beiden Querschnitte bezeichnen wir als Streuquerschnitt schlechthin:

$$\sigma_S = \sigma_n + \sigma_{n'}. \tag{1.15}$$

Alle anderen Wechselwirkungen im Reaktor werden als Absorptionen bezeichnet. Also gilt:

$$\sigma_A = \sigma_T - \sigma_S. \tag{1.16}$$

Die Absorptionen erfolgen gewöhnlich über eine, wenn auch nur sehr kurzzeitige Anregung des Kerns. Die hierbei auftretende überschüssige Energie kann durch verschiedene Teilchen abgeführt werden. Geschieht dies durch ein γ-Quant, also einen (n, γ)-Prozeß, so spricht man von Neutroneneinfang (im engeren Sinne), Einfangsquerschnitt $= \sigma_\gamma$. Erfolgt eine Spaltung des Kerns, ein (n, f)-Prozeß, so bezeichnet man den zugehörigen Wirkungsquerschnitt durch σ_f (f Abkürzung für fission = Spaltung). In der Reaktorphysik spielen andere Möglichkeiten der Energieabgabe kaum eine Rolle, daher ist bei spaltbaren Kernen gewöhnlich

$$\sigma_A = \sigma_\gamma + \sigma_f, \tag{1.17}$$

während bei den übrigen Kernen in dem in Frage kommenden Energiebereich der Neutronen meist σ_A mit σ_γ identisch ist. Ausnahmen kommen durch die bei leichten Kernen wie ^{6}Li, ^{10}B, ^{14}N möglichen (n, α)- und (n, p)-Prozesse zustande. Z. B. gilt für Bor: $\sigma_A = \sigma_\alpha$.

Die spezielle Einheit des atomaren Wirkungsquerschnitts ist das „barn".*

$$1\,\text{b} = 10^{-24}\,\text{cm}^2.$$

Diese Einheit liegt etwa in der Größe des geometrischen Kernquerschnitts. Für ^{238}U ergibt sich z. B. nach (I. 1.1.) $\pi R^2 = 2\,\text{b}$. Der totale atomare Wirkungsquerschnitt für langsame Neutronen der Energie $E = \text{k}\,T_0 = 0{,}0253\,\text{eV}$ ($T_0 = 293°\text{K}$) beträgt dagegen $\sigma_T^{238} = 11\,\text{b}$. Bei der Ableitung des Wirkungsquerschnitts aus der wellenmechanischen Beschreibung des Stoßes Neutron-Atomkern zeigt sich, daß der Wirkungsquerschnitt σ_T bei bestimmten Energien den geometrischen Querschnitt um viele Größenordnungen übersteigen kann.

* barn = Scheune, ursprünglich Laborbezeichnung für große Wirkungsquerschnitte.

Tab. 1.1: Bezeichnung der Wirkungsquerschnitte für Neutronen.

σ_T = totaler Wirkungsquerschnitt,

σ_n = Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung,
= $\sigma_{n,\,pot} + \sigma_{n,\,res} + \sigma_{n,\,int}$,
$\sigma_{n,\,pot}$ = Wirkungsquerschnitt für Potentialstreuung,
$\sigma_{n,\,res}$ = Wirkungsquerschnitt für Resonanzstreuung,
$\sigma_{n,\,int}$ = Wirkungsquerschnitt für Interferenzstreuung (Interferenz zwischen Resonanz- und Potentialstreuung),

$\sigma_{n'}$ = Wirkungsquerschnitt für unelastische Streuung,

σ_S = $\sigma_n + \sigma_{n'}$ = Wirkungsquerschnitt für Streuung,

σ_A = $\sigma_T - \sigma_S$ = Wirkungsquerschnitt für Absorption,

σ_γ = Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang unter γ-Emission,

σ_f = Wirkungsquerschnitt für Kernspaltung,

σ_p = Wirkungsquerschnitt für die (n, p)-Reaktion,

σ_α = Wirkungsquerschnitt für den (n, α)-Prozeß,

σ_{2n} = Wirkungsquerschnitt für den (n, 2n)-Prozeß,

σ_X = $\sigma_T - \sigma_n$ = Wirkungsquerschnitt für nichtelastische Stöße oder Reaktionsquerschnitt,

σ_C = Wirkungsquerschnitt für Zwischenkernbildung,

σ_{tr} = $\sigma_T - \bar{\mu}\,\sigma_n$ = Transportquerschnitt.

Umfangreiche Sammlungen gemessener Wirkungsquerschnitte wurden z. B. vom Brookhaven National Laboratory [2], vom Atomic Weapons Research Establishment [3] und vom Kernforschungszentrum Karlsruhe [4] herausgegeben. Die nachstehenden Tabellen und graphischen Darstellungen gründen sich darauf. In Tab. 1.2 sind die Zahlenwerte der Wirkungsquerschnitte einiger Reaktormaterialien für thermische Neutronen zusammengestellt.

1.3. Differentieller und integraler Wirkungsquerschnitt

Bei der Streuung der Neutronen im Reaktor interessiert nicht nur der bisher betrachtete „integrale Streuquerschnitt" σ_n, sondern auch der „differentielle Wirkungsquerschnitt" $\sigma_n(\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}')$ für die elastische Streuung eines Neutrons aus der Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v}/v$ ($\boldsymbol{v}$ = Neutronengeschwindigkeit, $v = |\boldsymbol{v}|$) vor dem Streuakt in die

Tab. 1.2: Wirkungsquerschnitte und Dichten einiger Reaktormaterialien für Neutronen mit der Energie $E = k\,T_0 = 0{,}0253\,\text{eV}$ ($T_0 = 293\,°\text{K}$), entsprechend einer Neutronengeschwindigkeit von 2200 m/s.

Material	Dichte g/cm	N, cm^{-3}	σ_n, b	σ_γ, b	σ_f, b	Bemerkung
^{233}U	18,5	4,8 10^{22}	13	49	524,5	Spaltstoffe
^{235}U	18,7	4,8 10^{22}	15	101	577	Spaltstoffe
^{239}Pu	19,7—15,8	5,0—4,0 · 10^{22}	9,5	274	740,6	Spaltstoffe
^{232}Th	11,7	3,0 · 10^{22}	13	7,4	0	Brutstoffe
^{238}U	18,9	4,8 · 10^{22}	8,2	2,73	0	Brutstoffe
Natururan	18,9	4,8 · 10^{22}	8,3	3,45	4,21	99,27 % ^{238}U, 0,73 % ^{235}U
D_2O	1,10	3,31 · 10^{22}	14,5	0,001	0	Moderatoren
Graphit, rein	1,60	8,03 · 10^{22}	4,8	0,0034	0	Moderatoren
H_2O	1,00	3,35 · 10^{22}	105	0,664	0	Moderatoren
O			4,2	0,0002	0	Bestandteil von H_2O, D_2O, UO_2 usw.
Al	2,70	6,02 · 10^{22}	1,3	0,23	0	Konstruktionsmaterialien
Zr	6,4	4,23 · 10^{22}	6,4	0,188	0	Konstruktionsmaterialien
Fe	7,86	8,48 · 10^{22}	11	2,55	0	Konstruktionsmaterialien
Ni	8,90	9,13 · 10^{22}	18	4,6	0	Konstruktionsmaterialien
B	2,45	13,64 · 10^{22}	4	$\sigma_\alpha = 759$	0	Steuerstäbe
Cd	8,65	4,64 · 10^{22}	7	2450	0	Steuerstäbe
^{135}Xe				2,72 · 10^6	0	Neutronengifte
^{149}Sm				4,08 · 10^4	0	Neutronengifte

Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{v}'/v'$ nach dem Streuakt. Der integrale Wirkungsquerschnitt umfaßt alle diese Streumöglichkeiten:

$$\sigma_n = \int_{\boldsymbol{\Omega}'} \sigma_n(\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}')\, d\boldsymbol{\Omega}'. \tag{1.18}$$

Der Einheitsvektor $\boldsymbol{\Omega}'$ in der Streurichtung kann durch den Polarwinkel ψ relativ zu $\boldsymbol{\Omega}$ als Polarachse und durch einen Azimutwinkel α, den Drehwinkel der Streu-Ebene in einer Fläche senkrecht zur Polarachse, beschrieben werden (s. Abb. 1.1). $d\boldsymbol{\Omega}'$ ist das Raum-

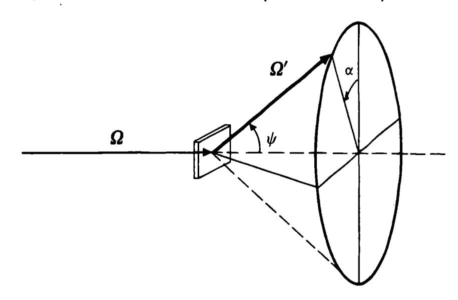


Abb. 1.1: Zur Ableitung des differentiellen Streuquerschnitts im Laborsystem.

winkelelement (Oberflächenelement auf der Einheitskugel) um die Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega}'$ (s. Abb. 1.1):

$$d\boldsymbol{\Omega}' = \sin\psi\, d\psi\, d\alpha, \tag{1.19}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt gibt den Bruchteil aller Streuungen an, der in das Raumwinkelelement $d\boldsymbol{\Omega}'$ bei $\boldsymbol{\Omega}'$ fällt, dividiert durch dieses Raumwinkelelement, also

$$\sigma_n(\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}') = \frac{d\sigma_n}{d\boldsymbol{\Omega}'}. \tag{1.20}$$

Wenn auch der Raumwinkel eine dimensionslose Größe ist, gibt man zur Kennzeichnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts als „Dimension“ nicht einfach barn, sondern barn/sr an, wobei sr die Abkürzung für das englische steradian ist.

Mit Hilfe des differentiellen und integralen Streuquerschnitts können wir die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Streuprozeß eine Streuung in das Raumwinkelelement $d\boldsymbol{\Omega}'$ um $\boldsymbol{\Omega}'$ auftritt, in folgender Form schreiben:

$$w(\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}')\, d\boldsymbol{\Omega}' = \frac{\sigma_n(\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}')\, d\boldsymbol{\Omega}'}{\sigma_n}. \tag{1.21}$$

Ganz entsprechend können differentielle Wirkungsquerschnitte für andere Stoßprozesse wie (n, n′), (n, γ) usw. angegeben werden.

1.4 Effektiver Wirkungsquerschnitt unter Berücksichtigung der Wärmebewegung der Atome

Bei Berechnung der Stoßrate (1.1) hatten wir angenommen, daß die Atomkerne vor dem Stoß ruhen. Tatsächlich führen aber die Atome eine Wärmebewegung aus. Infolge der Wärmebewegung ändert sich die Relativgeschwindigkeit zwischen Neutron und Kern, und damit die Stoßrate.

Trifft z. B. ein Neutron mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ auf einen Atomkern mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ (s. Abb. 1.2), so beträgt die Relativgeschwindigkeit des Neutrons

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \tag{1.22}$$

$$v_{\mathrm{rel}}^2 = v^2 + v_{\mathrm{A}}^2 - 2\, v\, v_{\mathrm{A}}\, \mu_{\mathrm{A}}. \tag{1.23}$$

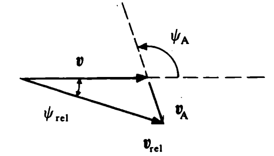


Abb. 1.2: Zur Ableitung des effektiven Wirkungsquerschnitts unter Berücksichtigung der Wärmebewegung der Atome.

Dabei ist $\mu_{\mathrm{A}} = \cos\psi_{\mathrm{A}}$ und $\psi_{\mathrm{A}} = \sphericalangle\,(\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{v})$. Die entsprechende kinetische Energie der Relativbewegung des Neutrons beträgt

$$E_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{n}}\, v_{\mathrm{rel}}^2 = E + \frac{1}{A} E_{\mathrm{A}} - 2 \sqrt{\frac{E \cdot E_{\mathrm{A}}}{A}} \cdot \mu_{\mathrm{A}}. \tag{1.24}$$

Die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ der N Kerne im cm³ seien durch die Verteilungsfunktion $N(\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}})$ gegeben.

$$N = \int_{\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}} N(\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \tag{1.25}$$

wobei für $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ in kartesischen oder Polarkoordinaten zu schreiben ist

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = \mathrm{d}v_{\mathrm{A},x}\, \mathrm{d}v_{\mathrm{A},y}\, dv_{\mathrm{A},z} = {v_{\mathrm{A}}}^2\, \mathrm{d}v_{\mathrm{A}}\, \mathrm{d}\mu_{\mathrm{A}}\, \mathrm{d}\varphi_{\mathrm{A}}.$$

Wir nehmen im folgenden Verhältnisse wie in einem Gas an: die Geschwindigkeitsverteilung der Gasatome folgt der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$N(\boldsymbol{v}_A)/N = M(\boldsymbol{v}_A, T), \tag{1.26}$$

$$M(\boldsymbol{v}_A, T) = \frac{e^{-\frac{1}{2} m_A \cdot \boldsymbol{v}_A^2/kT}}{\int\limits_{\boldsymbol{v}_A} e^{-\frac{1}{2} m_A \cdot \boldsymbol{v}_A^2/kT} d\boldsymbol{v}_A} = \left(\frac{m_A}{2\pi k T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} m_A \cdot \boldsymbol{v}_A^2/kT}.$$

Lamb [5] hat gezeigt, daß auch für die Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Festkörper in erster Näherung eine Maxwell-Verteilung gilt. Anstelle von kT ist jedoch die mittlere Energie je Schwingungsfreiheitsgrad einschließlich der Nullpunktsenergie einzusetzen.

Sind im cm^3 n monoenergetische Neutronen mit der Geschwindigkeit v, so beträgt die Zahl der Stöße dieser Neutronen mit den in thermischer Bewegung befindlichen Kernen je s und cm^3

$$F = \int\limits_{\boldsymbol{v}_A} v_{rel}\, n\, N\, \sigma(v_{rel})\, M(\boldsymbol{v}_A, T)\, d\boldsymbol{v}_A. \tag{1.27}$$

Es ist sprachlich bequem, wenn man die Stoßratendichte (1.27) mit der Neutronengeschwindigkeit v statt der Relativgeschwindigkeit v_{rel}, also in der Form (1.1a) wie bei ruhenden Kernen bildet. Das gelingt durch Einführung sog. effektiver Wirkungsquerschnitte, in die die Geschwindigkeitsabweichungen einbezogen werden. Man setzt also

$$F = v\, n\, N\, \sigma_{eff}(v, T). \tag{1.28}$$

Durch Vergleich von (1.28) mit (1.27) ergibt sich als Definitionsgleichung für σ_{eff}:

$$\sigma_{eff}(v, T) = \int\limits_{\boldsymbol{v}_A} \frac{v_{rel}}{v}\, \sigma(v_{rel})\, M(\boldsymbol{v}_A, T)\, d\boldsymbol{v}_A. \tag{1.29}$$

Transformiert man (1.29) mit Hilfe der Beziehungen (s. Abb. 1.2)

$$v_A^2 = v_{rel}^2 + v^2 - 2\, v\, v_{rel}\, \mu_{rel}, \tag{1.30}$$

$$v = v_A\, \mu_A + v_{rel}\, \mu_{rel}, \tag{1.31}$$

$$\varphi_A = \varphi_{rel} \tag{1.32}$$

von den Koordinaten der Kerngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ auf die Koordinaten der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{rel}$ des Neutrons, so erhält man

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A = v_A^2\,\mathrm{d}v_A\,\mathrm{d}\mu_A\,\mathrm{d}\varphi_A = v_{rel}^2\,\mathrm{d}v_{rel}\,\mathrm{d}\mu_{rel}\,\mathrm{d}\varphi_{rel} \tag{1.33}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{m_n^{3/2}}\sqrt{E_{rel}}\,\mathrm{d}E_{rel}\,\mathrm{d}\mu_{rel}\,\mathrm{d}\varphi_{rel}.$$

Nach Integration über φ_{rel} und μ_{rel} ergibt sich dann aus (1.29) für den effektiven atomaren Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{eff}(E, T) = \frac{1}{2\,E}\sqrt{\frac{A}{\pi\,\mathrm{k}T}}\int\limits_{E_{rel}=0}^{\infty}\sqrt{E_{rel}}\cdot\sigma(E_{rel})\cdot$$
$$\cdot\left[\mathrm{e}^{-\frac{A}{\mathrm{k}T}(\sqrt{E_{rel}}-\sqrt{E})^2} - \mathrm{e}^{-\frac{A}{\mathrm{k}T}(\sqrt{E_{rel}}+\sqrt{E})^2}\right]\mathrm{d}E_{rel}. \tag{1.34}$$

Wir wollen die Formel (1.34) an zwei Beispielen erläutern. Nehmen wir an, der Wirkungsquerschnitt sei unabhängig von der Energie

$$\sigma(E_{rel}) = \sigma = \text{const}. \tag{1.35}$$

Dann ist $\sigma_{eff}\,(E,\,T)$ nach (1.29) nicht konstant, da das Verhältnis von gemittelter Relativgeschwindigkeit v_{rel} zu Neutronengeschwindigkeit v mit abnehmender Neutronengeschwindigkeit ansteigt. Aus (1.34) folgt mit (1.35) nach Integration über E_{rel}

$$\sigma_{eff}\,(E,\,T) = \sigma\left[\left(1+\frac{\mathrm{k}T}{2AE}\right)\Phi\left(\sqrt{\frac{AE}{\mathrm{k}T}}\right) + \sqrt{\frac{\mathrm{k}T}{\pi AE}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{A}{\mathrm{k}T}\cdot E}\right] \tag{1.36}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{t=0}^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\Phi(-x) \tag{1.37}$$

ist die Fehlerfunktion. Es ist $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(\infty) = 1$. $\sigma_{eff}\,(E,\,T)$ ist demnach größer als σ. Nur im Grenzfall verschwindender Temperatur ($T \to 0$), hoher Neutronenenergie E oder sehr schwerer

Kerne ($A \to \infty$), d. h. wenn die Kernbewegung vernachlässigbar ist, geht der effektive Wirkungsquerschnitt (1.36) in den konstanten Wert σ über.

Hängt der Wirkungsquerschnitt nach einem $1/v$-Gesetz von der Relativgeschwindigkeit ab

$$\sigma(E_{\text{rel}}) = \frac{C}{\sqrt{E_{\text{rel}}}}, \tag{1.38}$$

so ergibt sich für den effektiven Wirkungsquerschnitt wieder ein $1/v$-Gesetz, unabhängig von der Temperatur

$$\sigma_{\text{eff}}(E, T) = \frac{C}{\sqrt{E}}. \tag{1.39}$$

Aufgaben

1.1. Man berechne die mittlere freie Weglänge langsamer Neutronen (Wirkungsquerschnitte nach Tab. 1.2) in H_2O, Graphit, Natururan und reinem ^{235}U und vergleiche sie mit den Dimensionen einer Brennstoffzelle, Daten in Abschn. I. 4.4.

1.2. Man vergleiche die mittlere freie Weglänge eines thermischen Neutrons im H_2-Gas mit der mittleren freien Weglänge eines H_2-Moleküls. $\sigma_n^H\,(kT) = 35$ b.

1.3. Wie oft stößt ein thermisches Neutron in reinem D_2O (bzw. Graphit, H_2O, Natururan), ehe es absorbiert wird?

1.4. Um welchen Faktor wird ein Strahl langsamer Neutronen beim Durchgang durch eine Cd-Schicht von $d = 0{,}2$ mm geschwächt?

1.5. Man beweise die Gleichung (1.39) unter Voraussetzung von (1.38).

1.6. Im Zentrum eines Unterrichtsreaktors SUR-100 wird eine Folie aus 0,1 g Gold bestrahlt. Durch Neutroneneinfang mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_\gamma = 87$ b entsteht aus ^{197}Au das Isotop ^{198}Au. ^{198}Au geht durch β-Zerfall mit der Halbwertszeit $\tau_{1/2} = 2{,}7$ d in den Kern ^{198}Hg über. Wie groß ist die Neutronenflußdichte $\Phi = n \cdot v$, wenn die Folie nach einstündiger Bestrahlung eine Aktivität von 500 Zerfällen/s aufweist?

1.7. Man schätze die mittlere Neutronenflußdichte ab, die im Brennstoff eines thermischen Leichtwasser-Leistungsreaktors mit einer durchschnittlichen Leistungsdichte von 40 kW/l und in einem schnellen Brutreaktor mit einer durchschnittlichen Leistungsdichte von 0,25 MW/l auftritt. Für den thermischen Reaktor gelte $V^{H_2O}/V^{UO_2} = 2$, ^{235}U-Anreicherung 3%. Das Volumen des schnellen Reaktors sei wie folgt zusammengesetzt: 30% Brennstoff, 20% Strukturmaterial, 50% Na als Kühlmittel. Der Brennstoff bestehe zu 10% aus $^{239}PuO_2$ und zu 90% aus $^{238}UO_2$. Die Spaltquerschnitte sind für $E_{th} \approx kT_0$ der Tab. 1.2 und für $E_s \approx 0{,}2$ MeV der Abb. 3.5 zu entnehmen.

1.8. Man zeige für die Neutronendichten aus Aufgabe 1.7, daß in Reaktoren die Stöße zwischen Neutronen untereinander gegenüber den Stößen zwischen Neutronen und Atomkernen vernachlässigt werden können.

1.9. Nach welcher Zeit (der sog. Verdopplungszeit) ist in einem schnellen Brüter eine Plutoniummenge in Höhe der ursprünglich eingesetzten Spaltstoffmenge im Überschuß erzeugt worden, wenn die mittlere Neutronenflußdichte $5 \cdot 10^{15}\ cm^{-2} \cdot s^{-1}$, der Absorptionsquerschnitt des Plutoniums 1,8 b und die Brutrate BR = 1,4 beträgt?

1.10. In einem homogenen Lösungsreaktor (FRF = Forschungsreaktor Frankfurt) besteht die Spaltzone aus einer Lösung von Uranylsulfat in destilliertem Wasser: $UO_2SO_4 + H_2O$. Das ^{235}U ist auf 20 % angereichert. Die Konzentration beträgt 250 g Uran/kg H_2O. Wie groß ist das Produkt $f \cdot \eta$ in der Multiplikationskonstante?

1.11. In einem heterogenen Leichtwasser-Leistungsreaktor mit $V^{H_2O}/V^{UO_2} = 2$ und einer ^{235}U-Anreicherung von 2 % gelte für das Verhältnis der mittleren Neutronenflußdichten im Wasser und im Uran $\Phi^{H_2O}/\Phi^{UO_2} = 1{,}1$. Wie groß ist der f-Faktor in der Multiplikationskonstante? Wieviel Borsäure müßte dem H_2O zugesetzt werden, um die Multiplikationskonstante um 1 % zu erniedrigen? Wirkungsquerschnitte s. Tab. 1.2.

2. Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte

Neutronengeschosse dringen im Gegensatz zu geladenen Teilchen schon bei geringen Energien in den Kern ein. Die Wirkungsquerschnitte hängen daher im allgemeinen sehr spezifisch von der Struktur und Größe des jeweiligen Kerns ab. Wir können zwei Grundformen der Wechselwirkung zwischen Neutron und Atomkern unterscheiden:

a) Rasch ablaufende Prozesse, bei denen das Neutronengeschoß lediglich im Potentialfeld des Kerns abgelenkt wird oder den Kern nach einer Wechselwirkung mit einem oder sehr wenigen Nukleonen wieder verläßt.

b) Relativ langsam ablaufende Prozesse, bei denen das Neutron mit dem Zielkern vorübergehend einen gebundenen Zustand, den Zwischenkern, bildet.

Die Wirkungsquerschnitte für die rasch und langsam ablaufenden Wechselwirkungen unterscheiden sich deutlich in ihrer Energieabhängigkeit: Die rasch ablaufenden Prozesse sind schwach energieabhängig. Die über einen Zwischenkern ablaufenden Prozesse weisen dagegen im allgemeinen starke Änderungen des Wirkungsquerschnitts in Abhängigkeit von der Energie des Neutronengeschosses auf (Resonanzquerschnitte).

Beide Prozesse können zu elastischer Streuung oder zu Kernreaktionen führen. Nach der elastischen Streuung befindet sich der Kern im Grundzustand. Bei Kernreaktionen ändert sich dagegen die innere Struktur des Atomkerns.

2.1. Die Potentialstreuung für langsame und mittelschnelle Neutronen

Die schwächste Energieabhängigkeit besitzt die sog. Potentialstreuung, die Ablenkung der Neutronen durch das Potentialfeld des Kerns. Solange die Materiewellenlänge des Neutronenstrahls

$$\lambda_M = \frac{h}{p} = \frac{2{,}86 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E}}\,\text{cm}, \qquad (2.1)$$

p = Neutronenimpuls = $\sqrt{2\, m_n E}$,
E = Neutronenenergie im Laborsystem in eV,
h = Plancksches Wirkungsquantum.

sehr viel größer als der Radius R des Atomkerns ist, kann die Potentialstreuung als nahezu konstant betrachtet werden. Diese Bedingung ist für langsame und mittelschnelle Neutronen erfüllt:

$$\sigma_{n,\,pot} = 4\,\pi\, a^2 \quad \text{für } \lambda \gg R. \qquad (2.2)$$

Die Größe a heißt „Streulänge“.

Aus Abb. 2.1 ist zu ersehen, daß sich z. B. bei Wasserstoff der Bereich des konstanten Potentialstreuquerschnitts von 1 eV bis hinauf zu 10^4 eV erstreckt. Unterhalb 1 eV wird die Potentialstreuung infolge der chemischen Bindung und der Wärmebewegung

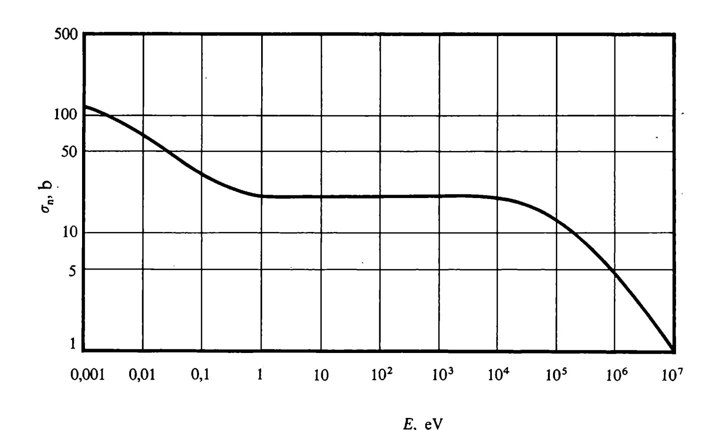


Abb. 2.1: Streuquerschnitt des Wasserstoffs (nach [2]).

der Streukerne energieabhängig. Den Einfluß der Wärmebewegung zeigt Abb. 2.2 am Beispiel des atomaren Wasserstoffs und Sauer-

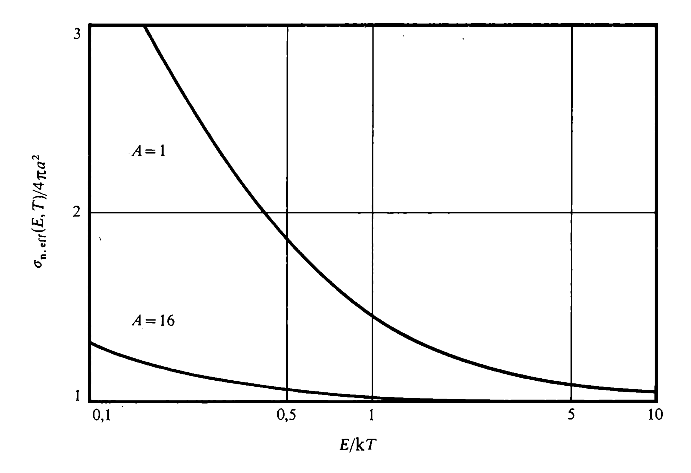


Abb. 2.2: Der effektive Streuquerschnitt $\sigma_{n,eff}(E, T)$ für $A = 1$ (Wasserstoff) und $A = 16$ (Sauerstoff) nach Gl. (2.24).

stoffs. Die Kurven ergeben sich aus (1.36) für $\sigma = 4\pi a^2$. Bei Wasserstoff gilt $4\pi a^2 = 20{,}4$ b, bei Sauerstoff $4\pi a^2 = 3{,}8$ b. Infolge der chemischen Bindung eines Kerns mit dem Atomgewicht A an ein Streusystem mit Atomgewicht M kann der Wirkungsquerschnitt bei sehr kleinen Neutronenenergien maximal um den Faktor $(1 + 1/A)^2/(1 + 1/M)^2$ größer werden als der Wirkungsquerschnitt des freien Kerns. Bei Wasserstoffgas ($A = 1$, $M = 2$) ergibt sich danach ein Faktor 1,78, bei Bindung des Wasserstoffs an ein schweres Streusystem (z. B. Zirkonkristall, $M \to \infty$) ein Faktor 4.

Den Einfluß der Wärmebewegung und der chemischen Bindung zeigt Abb. 2.3 am Beispiel des Wasserstoffs in den Verbindungen H_2O, Zirkonhydrid und H_2-Gas.

Bei thermischen Neutronen mit Energien um $E = kT_0 = 0{,}0253$ eV liegt die Materiewellenlänge nach (2.1) in der Größe der Atomabstände von 10^{-8} cm, so daß bei regelmäßigen Atomanordnungen (Kristall, Molekül) Interferenzen zwischen den Streuwellen, die von verschiedenen Atomen ausgehen, auftreten können.

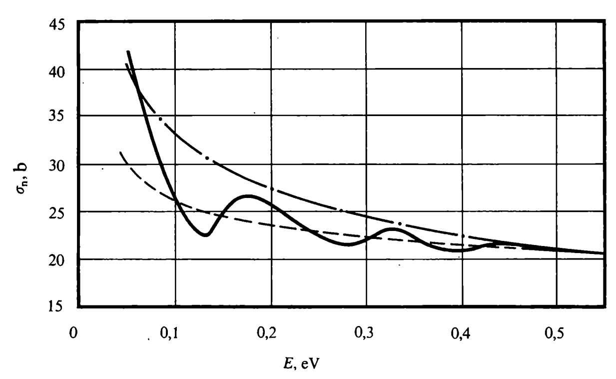


Abb. 2.3: Der Streuquerschnitt σ_n von Wasserstoff in verschiedenen chemischen Verbindungen unterhalb 0,5 eV (nach [2] und [20]) bei Zimmertemperatur.
Strichpunktiert: H in H_2O, ausgezogen: H in Zirkonhydrid, gestrichelt: H in H_2.

2.2. *Wirkungsquerschnitte im Resonanzbereich*

2.2.1. *Breit-Wigner-Einniveauformel*

In schroffem Gegensatz zu der relativ schwachen Energieabhängigkeit der Potentialstreuung steht die starke Energieabhängigkeit der Resonanzprozesse, die über einen Zwischenkern ablaufen. Dringen Neutronen in den Kern ein, so geben sie mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in unelastischen Wechselwirkungen mit den Nukleonen des Atomkerns ihre Energie ab und werden in den Kern eingebaut: Aus Neutronengeschoß und Zielkern bildet sich ein angeregter Zwischenkern. Die Anregungsenergie setzt sich aus der kinetischen Energie des Neutronengeschosses und aus der Bindungsenergie E_b des Neutrons im Zwischenkern (6–8 MeV) zusammen (Abb. 2.4).

Die kinetische Energie des Neutrons im Laborsystem, $E = \frac{1}{2}\, m_n v^2$, kann beim Stoß mit einem ruhenden Zielkern nicht restlos in Anregungsenergie des Zwischenkerns umgesetzt werden, da die Translationsenergie E_s des Schwerpunktes von Neutron und Zielkern nach dem Stoß als Bewegungsenergie des Zwischenkerns auftritt. Übertragen wird lediglich die Differenz

$$E - E_s = \frac{1}{2}\,\mu\, v^2 = \frac{\mu}{m_n}\, E\,, \tag{2.3}$$

wobei

$$\mu = \frac{m_n \cdot m_A}{m_n + m_A} \tag{2.4}$$

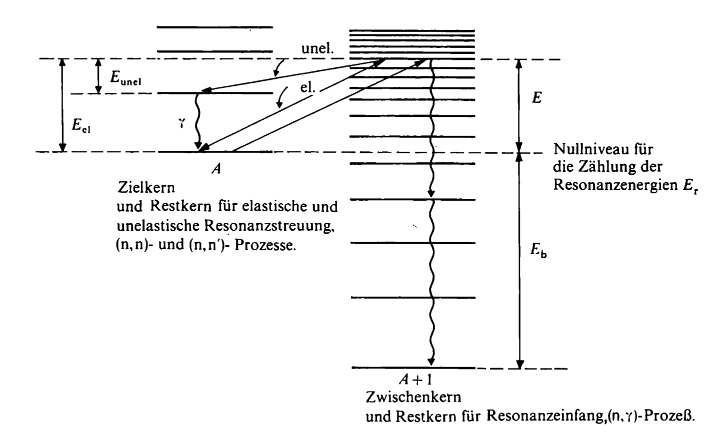


Abb. 2.4: Darstellung der elastischen und unelastischen Resonanzstreuung und des Resonanzeinfangs am Termschema des Zwischenkerns und Restkerns. E = Energie des Neutrons vor dem Stoß, E_b = Bindungsenergie des Neutrons im Zwischenkern, E_{el} = Neutronenenergie nach elastischer Streuung = E, E_{unel} = Neutronenenergie nach unelastischer Streuung.

die reduzierte Masse darstellt. Der Unterschied zwischen der Neutronenenergie im Schwerpunktsystem und im Laborsystem kann jedoch in erster Näherung vernachlässigt werden, wenn die Kernmasse groß gegen die Neutronenmasse ist, d. h. $\mu \approx m_n$. Dies sei im folgenden stets angenommen.

Bei hohen Anregungsenergien sind viele Nukleonen an den Zwischenkernzuständen beteiligt (Mehrkörperproblem). Die Dichte der Zwischenkernniveaus E_r ist daher groß (s. Abb. 2.4), besonders bei schweren Kernen. Die einzelnen Zustände sind nicht einer definierten Energie zugeordnet, sondern weisen eine bestimmte Unschärfe um die Energie E_r auf. Die Lebensdauer τ der Zwischenkernzustände ist relativ lang verglichen mit der Flugzeit eines MeV-Neutrons durch den Kern (10^{-12} cm/10^9 cm/s = 10^{-21}s). Ist die Halbwertsbreite des Zwischenkernniveaus Γ, so gilt

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{0{,}66 \cdot 10^{-15}}{\Gamma[\mathrm{eV}]}\,\mathrm{s}. \qquad (2.5)$$

Für ^{235}U mit $\Gamma \approx 0{,}1$ eV ergibt sich eine Lebensdauer des Zwischenkerns von $\tau \approx 10^{-14}$ s ($\gg 10^{-21}$ s).

Je nach der Höhe der Anregungsenergie gibt es verschiedene Zerfallsmöglichkeiten (Zerfallskanäle) für den Zwischenkern. Sie

unterscheiden sich einmal durch die Art des Zerfalls (Emission von Neutronen, γ-Quanten, Protonen und α-Teilchen sowie Spaltung), zum anderen durch den Anregungszustand des Restkerns nach dem Zerfall.

Erfolgt der Zerfall durch Neutronenemission und führt er zum Grundzustand des Restkerns, so liegt elastische Resonanzstreuung vor. Bleibt dagegen der Restkern in einem angeregten Zustand zurück, so wird das Neutron mit entsprechend niedrigerer Energie emittiert (Abb. 2.4). Diese unelastische Streuung ist erst möglich, wenn die Energie des einfallenden Neutrons größer als die Energie des ersten angeregten Zustandes des Zielkerns ist. Bei leichten Kernen liegt der erste angeregte Zustand mehrere MeV über dem Grundzustand, bei schweren Kernen dagegen im allgemeinen nur 10^4 bis 10^5 eV. Der im angeregten Zustand zurückbleibende Restkern geht unter γ-Emission in den Grundzustand über. Gibt der Zwischenkern seine Anregungsenergie nicht durch Emission eines Neutrons, sondern eines oder mehrerer γ-Quanten ab, so liegt ein Resonanzeinfang vor. In diesem Fall müssen die γ-Quanten die kinetische Energie und die Bindungsenergie des Neutronengeschosses abführen (Abb. 2.4).

Ist $\lambda_i = 1/\tau_i$ die Zerfallskonstante für den Zerfall des Zwischenkerns durch den i-ten Kanal, so gilt für den Beitrag des i-ten Prozesses zur Halbwertsbreite Γ gemäß (2.5)

$$\Gamma_i = \hbar\, \lambda_i .$$

Die gesamte Niveaubreite ist

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i .$$

Die relative Wahrscheinlichkeit, daß der Zwischenkern durch den i-ten Kanal zerfällt, beträgt Γ_i/Γ.

Der Zerfall des Zwischenkerns ist weitgehend unabhängig von der Art der Bildung. Der Grund liegt in der langen Lebenszeit des Zwischenkerns, in der sich quasi ein statistisches Gleichgewicht einstellen kann. Dabei „vergißt" der Zwischenkern, wie er gebildet wurde. Nur über die Erhaltungssätze für Energie, Drehimpuls und Parität bleibt eine „Erinnerung" an den Anfangszustand erhalten. Sie kann sich in einer Abweichung von der isotropen Verteilung der emittierten Teilchen ausdrücken. Diese ist noch symmetrisch zur Ebene senkrecht zur Einfallsrichtung.

Erfolgt die Bildung des Zwischenkerns durch den Kanal a und der Zerfall durch den Kanal b, so gilt für den Wirkungsquerschnitt des Gesamtprozesses

$$\sigma_{ab} = \sigma_{aC} \cdot \frac{\Gamma_b}{\Gamma} . \tag{2.6}$$

Der Wirkungsquerschnitt σ_{aC} für die Bildung des Zwischenkerns hat bei weit getrennten Zwischenkernniveaus die folgende Form (vgl. Lehrbücher der Kernphysik, z. B. [19])

$$\sigma_{aC} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} g_J \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} . \tag{2.7}$$

$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda_M}{2\pi}$, λ_M = Materiewellenlänge (2.1) des Neutrons,

E_r = Resonanzenergie,

$g_J = \frac{2J + 1}{2(2I + 1)}$ = statistisches Gewicht,

I = Spinquantenzahl des Zielkerns,

J = Spinquantenzahl des Zwischenkerns.

(2.7) drückt aus, daß der Zwischenkern besonders leicht gebildet wird, wenn die Neutronenenergie E in der Nähe der Resonanzenergie E_r liegt. Für den Prozeß (a, b) gilt somit nach (2.6–7)

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} g_J \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} . \tag{2.8}$$

Dies ist die Breit-Wigner-Einniveauformel. Sie gilt, solange die Niveaubreite Γ sehr viel kleiner als der Abstand der Zwischenkernniveaus ist, d. h. für deutlich getrennte Resonanzen. Ist $\Gamma \ll E_r$ (Normalfall), so bekommt man eine Resonanzlinie, die eine relativ geringe Breite auf der Energieskala einnimmt (Abb. 2.5).

Im Resonanzfall $E = E_r$ erreicht σ_{ab} den größten Wert

$$\hat{\sigma}_{ab} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2}_r g_J \frac{\Gamma_a(E_r) \cdot \Gamma_b(E_r)}{\Gamma(E_r)^2}$$

$$= \frac{2{,}604 \cdot 10^6}{E_r[\mathrm{eV}]} g_J \frac{\Gamma_a(E_r) \cdot \Gamma_b(E_r)}{\Gamma(E_r)^2} \text{ barn} . \tag{2.9}$$

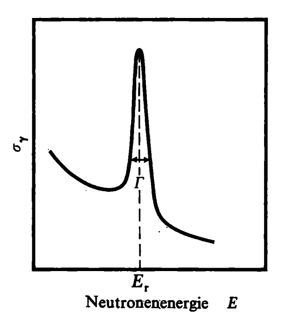


Abb. 2.5: Energieabhängigkeit des Neutroneneinfangquerschnitts in der Nähe der Resonanzenergie E_r.

Die höchsten Resonanzspitzen treten bei den niedersten Resonanzenergien E_r auf, wo die Neutronen gemäß (2.1) große Materiewellenlängen besitzen. Im eV-Gebiet können die Wirkungsquerschnitte Werte von bis zu 10^6 b annehmen. Für $E - E_r = \Gamma/2$ ist der Wirkungsquerschnitt auf die Hälfte abgesunken. Man nennt daher Γ die Halbwertsbreite der Resonanzlinie.

Im Gebiet der deutlich getrennten Resonanzen treten vor allem elastische Streuung, Einfang und Spaltung mit den partiellen Halbwertsbreiten Γ_n, Γ_γ und Γ_f auf. Da die Zwischenkernbildung im Reaktor stets durch Neutronen erfolgt, gilt $\Gamma_a = \Gamma_n$. Die Bezeichnung der Wirkungsquerschnitte kann in diesem Fall durch Unterdrückung des ersten Index vereinfacht werden (s. Tab. 1.1): $\sigma_{ab} \rightarrow \sigma_b$. Für elastische Resonanzstreuung ($\sigma_{n,\,res}$), Resonanzeinfang (σ_γ) und Resonanzspaltung (σ_f) gelten dann folgende Breit-Wigner-Formeln:

$$\sigma_{n,\,res} = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\, g_J \frac{\Gamma_n^{\,2}}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \qquad (2.10a)$$

$$\sigma_\gamma = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\, g_J \frac{\Gamma_n \; \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \qquad (2.10b)$$

$$\sigma_f = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\, g_J \frac{\Gamma_n \; \Gamma_f}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \qquad (2.10c)$$

An den Flanken der Resonanzen, wo Potentialstreuung und Resonanzstreuung in der gleichen Größe liegen, beobachtet man verschiedentlich auffallende Interferenzeffekte: Der Streuquerschnitt sinkt unter den Wert der Potentialstreuung (s. Abb. 2.6). Dabei

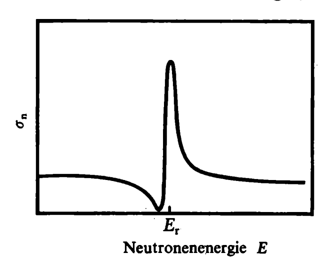


Abb. 2.6: Energieabhängigkeit des Streuquerschnitts in der Nähe der Resonanzenergie E_r.

überlagern sich die Streuamplituden der Potential- und Resonanzstreuung kohärent. Für langsame und mittelschnelle Neutronen mit $\lambda_M \gg R$ gilt

$$\sigma_n = \pi \bar{\lambda}^2 g_J \left| \frac{\Gamma_n}{(E - E_r) + i\frac{\Gamma}{2}} + 2\frac{a}{\bar{\lambda}} \right|^2 + 4\pi a^2 (1 - g_J). \tag{2.11}$$

Nach Ausrechnen des Betragsquadrats erhalten wir folgende Aufspaltung des Streuquerschnitts

$$\sigma_n = \sigma_{n,\,pot} + \sigma_{n,\,res} + \sigma_{n,\,int}. \tag{2.12}$$

Der Potentialstreuquerschnitt $\sigma_{n,\,pot}$ ist dabei durch (2.2), der Resonanzquerschnitt $\sigma_{n,\,res}$ durch (2.10) definiert. Für den Interferenzquerschnitt $\sigma_{n,\,int}$ folgt dann

$$\sigma_{n,\,int} = 4\pi a \bar{\lambda} g_J \frac{(E - E_r)\Gamma_n}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \tag{2.13}$$

2.2.2. *Die Resonanzparameter in der Breit-Wigner-Einniveauformel*

Die Halbwertsbreiten für die Emission des γ-Quants und für den Zerfall des Zwischenkerns in Spaltprodukte können in der Umge-

bung einer Resonanz als unabhängig von der Energie betrachtet werden: $\Gamma_\gamma = \text{const}$, $\Gamma_f = \text{const}$. Die Neutronenhalbwertsbreite Γ_n wächst dagegen mit der Neutronenenergie E an, da energiereichere Neutronen leichter in den Kern eindringen und leichter aus dem Kern entkommen können. Für Neutronen mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l ist die Neutronenhalbwertsbreite gegeben durch

$$\Gamma_n^l(E) = \Gamma_{n\,r}^l \sqrt{\frac{E}{E_r}}\; v_l(E). \tag{2.14}$$

In Tabellenwerken wird oft nicht Γ_{nr}^l, sondern die sogenannte reduzierte Neutronenhalbwertsbreite $\Gamma_{nr}^{(0)l} = \Gamma_{nr}^l/\sqrt{E_r}$ angegeben [2]. Der Faktor $v_l(E)$ beschreibt die Durchlässigkeit der „Zentrifugalschwelle" für Neutronen mit der Drehimpulsquantenzahl l:

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 \\ v_1 &= \frac{(R/\lambda\!\!\!^{-})^2}{1 + (R/\lambda\!\!\!^{-})^2}, \\ v_2 &= \frac{(R/\lambda\!\!\!^{-})^4}{9 + 3(R/\lambda\!\!\!^{-})^2 + (R/\lambda\!\!\!^{-})^4}. \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2.15}$$

Da die Reichweite des Wechselwirkungspotentials zwischen Neutron und Kern in der Größe des Kernradius R liegt, tragen zum Wirkungsquerschnitt bei Neutroneneinfallsenergien E bzw. den entsprechenden Impulsen $p = \sqrt{2 m_n E}$ nur jene Neutronen merklich bei, die im Abstand $< R$ am Kern vorbeifliegen. Der Drehimpuls $|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ dieser Neutronen um den Kern ist kleiner als $R \cdot p$:

$$\hbar \sqrt{l(l+1)} \leq R \cdot p = R \cdot \sqrt{2 m_n E}. \tag{2.16}$$

Selbst bei Stößen mit schweren Kernen spielen danach für Neutronenenergien unterhalb 0,1 MeV im wesentlichen nur die Partialwellen mit $l = 0$ (s-Wellen) eine Rolle. Entsprechend der geringen Wahrscheinlichkeit für die Zwischenkernbildung mit $l = 1$ (p-Wellen) ist

$$\Gamma_n^{l=1} < \Gamma_n^{l=0}, \text{ solange } \frac{R}{\hbar} \sqrt{2 m_n \cdot E} \ll 1.$$

Ist I die Spinquantenzahl des Zielkerns, so können durch Neutronenpartialwellen mit $l = 0$ (s-Wellen) Zwischenkernniveaus mit den Spinquantenzahlen

$$J = I + \tfrac{1}{2} \text{ und } \left| I - \tfrac{1}{2} \right|$$

angeregt werden. In einem Zielkern mit $I = 0$ (^{238}U) haben daher die meisten Zwischenkernniveaus die Spinquantenzahl $J = \frac{1}{2}$, also nach (2.7) das statistische Gewicht $g_{J=\frac{1}{2}} = 1$.

Partialwellen mit $l = 1$ (p-Wellen) führen auf Zwischenkernniveaus mit

$$J = I + \tfrac{3}{2}\,, I + \tfrac{1}{2}\,, \left| I - \tfrac{1}{2} \right|, \left| I - \tfrac{3}{2} \right|$$

und entgegengesetzter Parität, verglichen mit den durch s-Wellen erzeugten Niveaus. Ist $I = 0$, so treten Niveaus mit $J = \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ auf. Die statistischen Gewichte betragen $g_{J = 1/2} = 1$ und $g_{J = 3/2} = 2$.

Die Niveauabstände im Zwischen- und Restkern sind bei den verschiedenen Kernen sehr verschieden. Bei leichten Kernen können sie in der Größe von MeV, bei schweren Kernen in der Größe von eV liegen. Wegen der geringen Niveaudichte stehen in leichten Kernen für den Zerfall des Zwischenkerns nur wenige Ausgangskanäle zur Verfügung. Der Zerfall durch den Eingangskanal ist daher bei leichten Kernen sehr wahrscheinlich. Dies entspricht der Beobachtung, daß bei den Resonanzen in leichten Kernen die elastische Streuung überwiegt. In den schweren Kernen stehen viele Zerfallskanäle zur Verfügung. Hier überwiegt im allgemeinen die Absorption (Einfang unter γ-Emission und evtl. Spaltung). Letzteres geht aus den Tab. 2.1–3 hervor, wo die Resonanzparameter für die ersten Resonanzen von ^{238}U, ^{235}U und ^{239}Pu dargestellt sind [2].

Bei ^{235}U zerfallen die meisten Zwischenkernzustände mit größter Wahrscheinlichkeit durch Spaltung. Weniger häufig wird die gesamte Anregungsenergie durch γ-Emission abgeführt und sehr unwahrscheinlich ist, insbesondere bei den untersten Spitzen, die Resonanzstreuung. Entsprechend ist bei den meisten Spaltstoffen $\Gamma_f > \Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$.

Wie aus Tab. 2.1 hervorgeht, sind die ^{238}U-Resonanzen weit getrennt (Resonanzabstand $\gg \Gamma$), so daß die Verwendung der Breit-Wigner-Einniveauformel gerechtfertigt ist. Die ^{235}U-Resonanzen liegen dagegen infolge der hohen Anregungsenergie von $E_b + E \approx$ 6,4 MeV (s. Tab. I. 2.1) ziemlich dicht, etwa im Abstand von 1 eV. Eine Anwendung der Breit-Wigner-Einniveauformel auf so dicht liegende, interferierende und sich überlappende Resonanzen ist streng genommen nicht mehr zulässig.

Tab. 2.1: Einniveau-Resonanzparameter für ^{238}U ($I = 0$) [2].

E_r, eV	Γ_γ, meV	Γ_n, meV	l	g_J
6,67 + 0,02	26 ± 2	1,52 ± 0,02	0	1
10,2	24 ± 2	0,0014	1	1
21,0 ± 0,2	26 ± 4	8,5 ± 0,5	0	1
36,7 ± 0,3	26 ± 4	31,0 ± 0,9	0	1
66,2 ± 0,4	24 ± 2	25,0 ± 1,2	0	1
81,1 ± 0,5	21 ± 15	2,0 ± 0,2	0	1
89,5 ± 1,5	(24 ± 2)	0,085 ± 0,013	1	1
102,7 ± 0,1	24 ± 3	68 ± 3	0	1

Tab. 2.2: Einniveau-Resonanzparameter für ^{235}U ($I = 7/2$) [2].

E_r, eV	Γ_γ, meV	Γ_f, meV	$2\,g_J\,\Gamma_n$, meV
−0,95 *	27,6	169,4	$1{,}488 \cdot \sqrt{E}$
0,290 ± 0,010	35 ± 3	100 ± 8	0,0032 ± 0,0005
1,135 ± 0,010	42 ± 5	115 ± 10	0,0154 ± 0,0011
2,040 ± 0,010	37 ± 4	10 ± 1	0,0077 ± 0,0003
2,84 ± 0,05	(40)	160 ± 100	0,008 ± 0,005
3,15 ± 0,02	47 ± 6	90 ± 2	0,029 ± 0,002
3,61 ± 0,01	42 ± 4	45 ± 4	0,047 ± 0,002
4,845 ± 0,010	35 ± 4	4 ± 1	0,058 ± 0,004

Tab. 2.3: Einniveau-Resonanzparameter für ^{239}Pu ($I = \frac{1}{2}$) [2].

E_r, eV	Γ_γ, meV	Γ_f, meV	Γ_n, meV	J	g_J
−1,200*	39	201	$0{,}771 \cdot \sqrt{E}$	1	0,75
0,296 ± 0,002	39 ± 3	60 ± 4	0,242 ± 0,008	0	0,25
7,85 ± 0,02	41 ± 4	40 ± 4	0,88 ± 0,03	1	0,75
10,95 ± 0,05	40 ± 10	130 ± 20	1,75 ± 0,13	1	0,75
11,90 ± 0,05	41 ± 6	22 ± 4	1,07 ± 0,05	1	0,75
14,30 ± 0,05	50 ± 20	60 ± 20	0,45 ± 0,08	1	0,75
14,68 ± 0,06	40 ± 20	30 ± 15	6,4 ± 0,4	0	0,25
15,50 ± 0,07	(40)	800 ± 100	0,80 ± 0,13	1	0,75

* Diese Resonanz liegt unterhalb des Nullniveaus für die Zählung der Resonanzenergie, s. Abb. 2.4 und Abschn. 2.2.5. Γ_n wird für $E < 0$ imaginär.

2.2.3. Darstellung der Resonanzquerschnitte bei dicht liegenden Resonanzen

Für die dicht liegenden Resonanzen der Spaltstoffe müßten eigentlich Mehrniveauformeln herangezogen werden, die eine gegenseitige Beeinflussung der eng benachbarten Resonanzen berücksichtigen. Mehrniveauformeln sind jedoch schwer handhabbar [6]. Einen Fortschritt in deren Darstellung brachte in jüngster Zeit die Formulierung von F. T. und D. B. ADLER [18]. Diese Autoren stellen die Überlappung und Interferenz der Spaltstoffresonanzen durch eine Überlagerung asymmetrischer Linien dar:

$$\begin{aligned}
\sigma_f &= \frac{C}{\sqrt{E}} \cdot \sum_j \frac{\nu_j \cdot G_j^{(f)} + (\mu_j - E) \cdot H_j^{(f)}}{(E - \mu_j)^2 + \nu_j^2}, \\
\sigma_\gamma &= \frac{C}{\sqrt{E}} \cdot \sum_j \frac{\nu_j\, G_j^{(\gamma)} + (\mu_j - E) \cdot H_j^{(\gamma)}}{(E - \mu_j)^2 + \nu_j^2}, \\
\sigma_T &= \frac{C}{\sqrt{E}} \cdot \sum_j \frac{\nu_j\, G_j^{(T)} + (\mu_j - E)\, H_j^{(T)}}{(E - \mu_j)^2 + \nu_j^2}, \qquad (2.17) \\
\sigma_n &= \sigma_T - \sigma_f - \sigma_\gamma, \\
C &= 6{,}52 \cdot 10^5\ \mathrm{b} \cdot \mathrm{eV}.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Resonanzparameter μ_j, ν_j, G_j und H_j sind für ^{235}U bis 35 eV publiziert [18]. Die Parameter für die untersten Spitzen sind in Tab. 2.4 angegeben.

2.2.4. Wirkungsquerschnitte im Bereich der unaufgelösten Resonanzen

Nach (2.10, 14) sind die Resonanzen bei niederen Energien hoch und schmal, bei hohen Energien dagegen nieder und breit.

Die Resonanzparameter für ^{238}U sind heute bis etwa 5 keV, die Parameter für ^{235}U und ^{239}Pu bis etwa 100 eV experimentell bekannt. Die höher liegenden Resonanzen sind zwar gemäß Theorie zunächst immer noch deutlich getrennt (bei ^{238}U bis etwa 50 keV), konnten aber experimentell noch nicht aufgelöst werden. Man spricht vom Energiebereich der unaufgelösten Resonanzen. Bei noch höheren Energien überlappen sich die Resonanzen mehr und mehr.

Tab. 2.4: Mehrniveau-Resonanzparameter für den Kern ^{235}U [18].

μ	ν	$10^4 \cdot G^{(T)}/\nu$	$10^4 \cdot H^{(T)}/\nu$	$10^4 \cdot G^{(f)}/\nu$	$10^4 \cdot H^{(f)}/\nu$
— 0,95 eV	0,10 eV	211,2 $(eV)^{-\frac{1}{2}}$	10,82 $(eV)^{-\frac{1}{2}}$	159,63 $(eV)^{-\frac{1}{2}}$	5,63 $(eV)^{-\frac{1}{2}}$
0,286	0,070	0,948	— 0,298	0,659	— 0,289
1,138	0,079	1,908	0,500	1,311	0,470
2,036	0,025	2,245	0,052	0,467	0,048
2,838	0,080	0,082	— 0,209	0,068	— 0,203
3,145	0,068	1,712	0,200	1,083	0,170
3,61	0,048	5,150	0,830	2,910	0,520
4,84	0,020	13,580	— 0,770	1,129	— 0,681

In großen schnellen Brutreaktoren mit keramischen Brennstoffen liegt der Hauptbeitrag zur Resonanzabsorption im Energiebereich von etwa 0,1 bis 50 keV, d. h. ein wesentlicher Beitrag fällt in den Bereich der unaufgelösten Resonanzen. Zur Berechnung der Resonanzabsorption in den vielen unaufgelösten Resonanzen bedient man sich statistischer Gesetzmäßigkeiten über die Verteilung der Halbwertsbreiten (Thomas-Porter-Verteilung [10]) und der Niveauabstände (Wigner-Verteilung [11, 12]). Bezüglich der Darstellung dieser Thematik verweisen wir auf Spezialliteratur [4].

2.2.5. Das 1/v-Gesetz

Für Neutronenenergien $E \ll E_r$ ist der Resonanznenner nahezu energieunabhängig. Wir erhalten in diesem Fall für den Einfang- und Spaltquerschnitt nach (2.10) unter Berücksichtigung von $\Gamma_n^{l=0} \sim \sqrt{E}$ (vgl. (2.14)) ein $1/v$-Gesetz:

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &= \text{const}/v, \\ \sigma_f &= \text{const}/v. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Der Streuquerschnitt wird für $\Gamma, E \ll E_r$ konstant und liefert einen „Untergrundbeitrag" zur Potentialstreuung.

$$\sigma_{n,\,res} = \text{const}. \tag{2.19}$$

Bei den Spaltstoffen ^{235}U und ^{239}Pu ist das $1/v$-Gesetz allerdings nicht streng erfüllt. Das liegt an der Einwirkung von „gebundenen" Niveaus. Diese gehören zu Anregungsenergien des Zwischenkerns knapp unter der Bindungsenergie des Neutrons (vgl. Abb. 2.4). So liegt z. B. beim ^{235}U, eng benachbart zum ersten „ungebundenen" Niveau bei $E_r = +\,0{,}29$ eV, ein „gebundenes" Niveau bei $E_r = -\,0{,}95$ eV. Schließt man das „gebundene" Niveau in die Mehrniveausumme (2.17) ein, so kann damit der richtige Querschnittsverlauf wiedergegeben werden, der beim ^{235}U steiler und beim ^{239}Pu flacher als $1/v$ verläuft.

2.2.6. Temperaturabhängigkeit der Resonanzquerschnitte

Den Einfluß der Wärmebewegung der Atomkerne auf den Verlauf des Resonanzquerschnitts zeigt Abb. 2.7 am Beispiel der Resonanz des ^{238}U bei 21 eV. Die Resonanzspitze sinkt mit wachsender Temperatur ab und die Flanken verbreitern sich. Man spricht von der Dopplerverbreiterung der Resonanzlinien.

Die Formeln für die dopplerverbreiterten Resonanzlinien erhalten wir aus (1.34), wenn wir dort für $\sigma(E_{rel})$ die Resonanzquer-

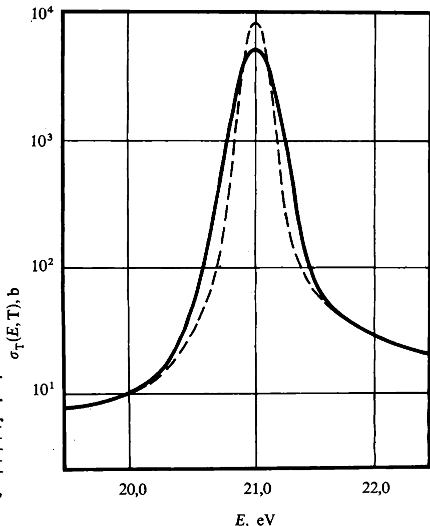


Abb. 2.7: Totaler Wirkungsquerschnitt in der Umgebung der Resonanzlinie des ^{238}U bei 21,0 eV bei einer Materialtemperatur von $T = 300°$ K (gestrichelte Kurve) und $T = 1000°$ K (ausgezogene Kurve). $\Gamma_\gamma = 26$ meV, $\Gamma_n = 8{,}5$ meV, $\sigma_{n,pot} = 10$ b.

schnitte (2.10, 13) einsetzen. Da im Resonanzbereich die Neutronenenergie gewöhnlich groß gegen kT ist, können wir näherungsweise die Exponentialfunktion $\exp\left[-\frac{A}{kT}\left(\sqrt{E_{rel}}+\sqrt{E}\right)^2\right]$ gegenüber $\exp\left[-\frac{A}{kT}\left(\sqrt{E_{rel}}-\sqrt{E}\right)^2\right]$ vernachlässigen. Die größten Beiträge zum Integral erhalten wir für E und E_{rel} in der Nähe der Resonanzenergie E_r. Mit wachsendem $E - E_r$ und $E_{rel} - E_r$ nehmen die Beiträge rasch ab. Wir können daher das Argument der Exponentialfunktion wie folgt entwickeln:

$$\frac{A}{kT}\left(\sqrt{E_{rel}}-\sqrt{E}\right)^2 = \frac{A\,E_r}{kT}\left(\sqrt{1+\frac{E_{rel}-E_r}{E_r}} - \sqrt{1+\frac{E-E_r}{E_r}}\right)^2 \approx \frac{A\,E_r}{kT}\left[\left(1+\frac{E_{rel}-E_r}{2\,E_r}+\dots\right) - \left(1+\frac{E-E_r}{2\,E_r}+\dots\right)\right]^2 \approx \frac{A}{kT}\,\frac{(E_{rel}-E)^2}{4\,E_r}. \tag{2.20}$$

Im Rahmen dieser Näherung dürfen wir auch die gegenüber $1/[(E_{rel} - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2]$ langsam veränderlichen Faktoren $\sqrt{E_{rel}}$ und $1/E$ durch ihren Wert an der Resonanzstelle ersetzen. Führen wir noch die Abkürzungen

$$x = \frac{2(E - E_r)}{\Gamma}, \tag{2.21}$$

$$y = \frac{2(E_{rel} - E_r)}{\Gamma}, \tag{2.22}$$

$$\zeta = \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Gamma}{\sqrt{4\,E_r\,\mathrm{k}T/A}}. \tag{2.23}$$

Δ = Dopplerbreite

ein, so erhalten wir aus (1.34) (gültig für E in der Umgebung von E_r)

$$\sigma_{eff}(E, T) = \frac{\hat{\sigma}\,\zeta}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{y=-\frac{2E_r}{\Gamma}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2\zeta^2}{4}}}{1+y^2}\,dy. \tag{2.24}$$

Da gewöhnlich $E_r \gg \Gamma$ gilt, können wir die untere Grenze des Integrals als außerhalb der Resonanz liegend durch $-\infty$ ersetzen. Damit erhalten wir für die dopplerverbreiterten Resonanzlinien schließlich:

$$\sigma_\gamma(E, T) = \hat{\sigma}_\gamma \cdot \psi(x, \zeta), \tag{2.25}$$

$$\sigma_f(E, T) = \hat{\sigma}_f \cdot \psi(x, \zeta), \tag{2.26}$$

$$\sigma_{n,\,res}(E, T) = \hat{\sigma}_n \cdot \psi(x, \zeta) \tag{2.27}$$

mit der Formfunktion

$$\psi(x, \zeta) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2\zeta^2}{4}}}{1+y^2}\,dy, \tag{2.28}$$

und $\hat{\sigma}$ nach (2.9). Ganz entsprechend erhalten wir für die Interferenzstreuung

$$\sigma_{\mathrm{n,\,int}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\mathrm{n}}\,\sigma_{\mathrm{n,\,pot}}\,g_J}\cdot\chi(x,\zeta), \tag{2.29}$$

mit der Formfunktion

$$\chi(x,\zeta) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{y=-\infty}^{+\infty}\frac{2\,y}{1+y^2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2\zeta^2}{4}}\,\mathrm{d}y. \tag{2.30}$$

Bei Verwendung der Mehrniveaudarstellung (2.17) von ADLER für dichtliegende Spaltstoffresonanzen kann die Dopplerverbreiterung der Resonanzlinien ebenfalls durch die ψ- und χ-Funktion ausgedrückt werden [18].

Die Formfunktionen haben folgende Eigenschaften

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,\zeta)\,\mathrm{d}x = \pi, \tag{2.31}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi(x,\zeta)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.32}$$

Die Funktion $\psi(x,\zeta)$ kann für $x=0$ geschlossen dargestellt werden:

$$\psi(0,\zeta) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\zeta\,\mathrm{e}^{+\frac{\zeta^2}{4}}\left[1-\Phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right]. \tag{2.33}$$

Φ ist die Fehlerfunktion (1.37). Für $x \neq 0$ muß (2.28) numerisch ausgewertet werden. Ist $\psi(x,\zeta)$ bekannt, kann $\chi(x,\zeta)$ über

$$\chi(x,\zeta) = 2\,x\,\psi(x,\zeta) + \frac{4}{\zeta^2}\,\frac{\mathrm{d}\psi(x,\zeta)}{\mathrm{d}x} \tag{2.34}$$

berechnet werden.

Abb. 2.8 zeigt Ergebnisse einer numerischen Auswertung von (2.28). Weitere Werte können Tabellen von M. E. ROSE u. a. [7] entnommen werden. Geeignete Integrationsverfahren für Rechenmaschinen sind z. B. bei D. M. O'SHEA und H. C. THACHER [8] mitgeteilt. Eine strenge Integration der Formel (1.34) hat ISHIGURO [9] durchgeführt. Besonders bei den Resonanzen im thermischen

Bereich, für welche die eingangs erwähnten Näherungen nicht mehr gelten, ist das Verfahren von ISHIGURO von Vorteil.

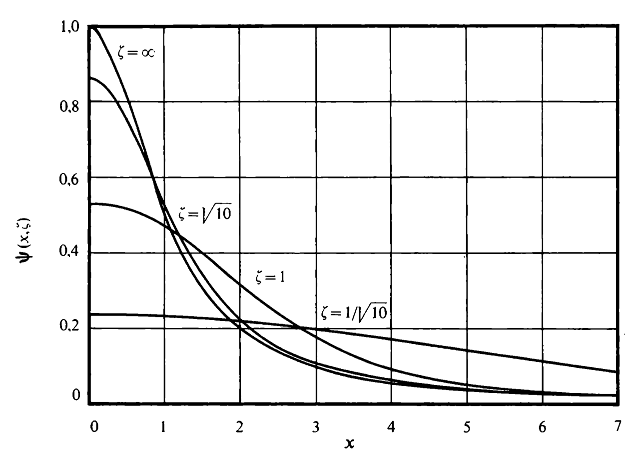


Abb. 2.8: Die Formfunktion $\psi(x, \zeta)$.

2.3. *Wirkungsquerschnitte im Bereich der schnellen Neutronen*

Ist die Neutronenenergie genügend groß, so können neben elastischer Streuung (n, n), Spaltung (n, f) und Neutroneneinfang (n, γ) auch unelastische Streuung (n, n′), die Emission mehrerer Neutronen (n, 2 n), (n, 3 n) und die Emission geladener Teilchen (n, p), (n, α) auftreten. Die Emission geladener Teilchen ist bei schweren Kernen durch den Coulombwall benachteiligt.

Abb. 2.9 zeigt die Wirkungsquerschnitte für die unelastische Streuung am ^{238}U. $\sigma_{n'E_i}$ ist der Wirkungsquerschnitt für jenen Teil der unelastischen Streuung, bei welchem der Kern im Anregungszustand mit der Anregungsenergie E_i zurückbleibt. Dieser Prozeß ist nur möglich für $E > E_i$ (s. Abb. 2.4), E_i ist die Schwellenenergie für $\sigma_{n'E_i}$. Das Neutron verliert bei diesem unelastischen Stoß gerade die Energie E_i (Schwerpunkt- und Laborsystem fallen wegen $A \gg 1$ praktisch zusammen). Neben den Anregungsquerschnitten für die einzelnen Niveaus ist in Abb. 2.9 die Summe aller Anregungsquerschnitte, der integrale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{n'}$ für unelastische Streuung, aufgetragen. Die Aufteilung des integralen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{n'}$ in die Anregungsquerschnitte

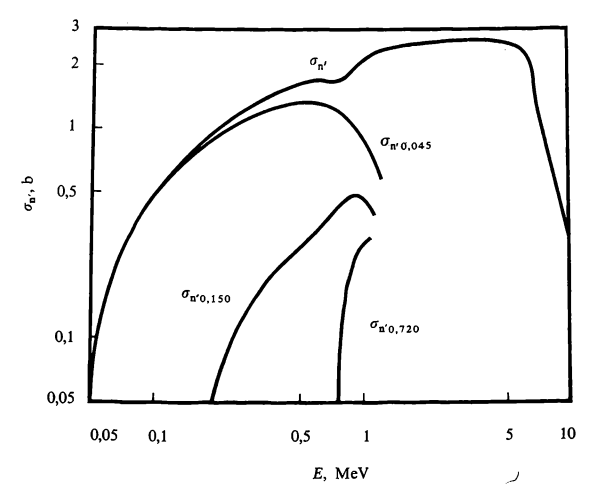


Abb. 2.9: Anregungsquerschnitte $\sigma_{n'E_i}$ und integraler Wirkungsquerschnitt für unelastische Streuung $\sigma_{n'}$ für ^{238}U (nach [4]). E_i gibt das Anregungsniveau an, Zahlen in MeV.

$\sigma_{n'E_i}$ ist gewöhnlich nur bis zu Neutronenenergien von wenigen MeV experimentell bekannt. Berechnungen der experimentell unbekannten Anregungsquerschnitte $\sigma_{n'E_i}$ können nach der HAUSER-FESHBACH-Theorie [14] durchgeführt werden, sofern Spin und Parität der angeregten Niveaus bekannt sind.

Bei Übergängen in höhere, relativ dicht liegende Restkernniveaus kann näherungsweise das Verdampfungsmodell verwendet werden. Ist E die Energie des einfallenden Neutrons, so gilt die Wahrscheinlichkeit, daß die Energie des abgedampften Neutrons im Intervall dE' bei E' liegt,

$$w(E \to E')\,\mathrm{d}E' \sim E' \exp\left(-E'/\mathrm{k}T_K(E)\right).$$

Dabei bezeichnet $T_K(E)$ die Temperatur des Restkerns in Abhängigkeit von der Einschußenergie E des Neutrons und der Massenzahl A des Kerns: $\mathrm{k}T_K(E) \approx 3{,}2\sqrt{E/A}$ MeV, E in MeV [15, 24].

Die unelastische Neutronenstreuung, (n, p)-Prozesse usw., können auch über eine „direkte Wechselwirkung" des Neutrons mit einzelnen Nukleonen oder Nukleonengruppen ohne Bildung eines Zwischenkerns ablaufen. Bei den im Reaktor vorherrschenden

Neutronenenergien (< 10 MeV) ist dieser Typ der Wechselwirkung jedoch meist zu vernachlässigen.

Mit zunehmender Neutronenenergie, d. h. wachsender Anregungsenergie des Zwischenkerns, werden die Halbwertsbreiten Γ nach (2.14) schließlich größer als die Abstände D der Resonanzen. Auf diese Weise überdecken sich die Resonanzen oberhalb einiger MeV (die leichten Kerne ausgenommen), so daß die Resonanzstruktur grundsätzlich, nicht nur infolge der experimentellen Auflösungsgrenze, verschwindet.

Messungen ergeben, daß der totale Wirkungsquerschnitt σ_T im Kontinuumsgebiet schwach energieabhängig ist. In Abständen von der Größenordnung 10 MeV treten flache Maxima und Minima auf (Abb. 2.10), die „Riesenresonanzen". Lage und Breite der Resonanzen lassen sich durch ein Einteilchenmodell mit komplexem Potential (Optisches Kernmodell) verstehen.

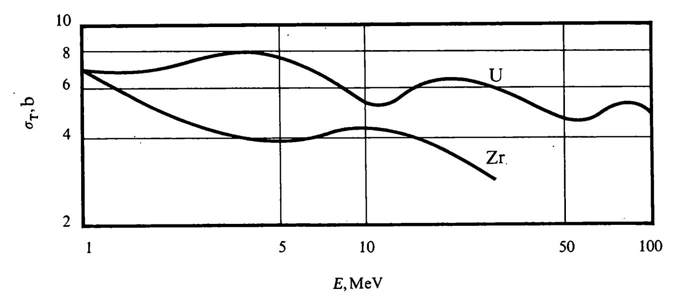


Abb. 2.10: Riesenresonanzen im totalen Wirkungsquerschnitt σ_T bei Zirkon und Uran (natürliches Isotopengemisch).

Die Materiewellenlänge (2.1) liegt bei den schnellen Neutronen mit Energien von einigen MeV in der Größe des Kerndurchmessers. In diesem Energiebereich tritt Beugung am Kern auf. Die Winkelverteilung der Potentialstreuung, die für langsame und mittelschnelle Neutronen mit $\lambda \gg R$ kugelsymmetrisch im Schwerpunktsystem ist, wird dadurch im MeV-Bereich anisotrop. Abb. 2.11 zeigt als Beispiel den differentiellen elastischen Streuquerschnitt von ^{238}U für verschiedene Neutronenenergien. Unterhalb 50 keV ist die Winkelverteilung bei der elastischen Streuung isotrop. Mit wachsender Neutronenenergie wächst die Vorwärtsstreuung.

Die experimentellen Daten über Winkelverteilungen sind vielfach lückenhaft. Man ist daher oft auf Berechnungen nach dem Optischen Kernmodell [17] angewiesen.

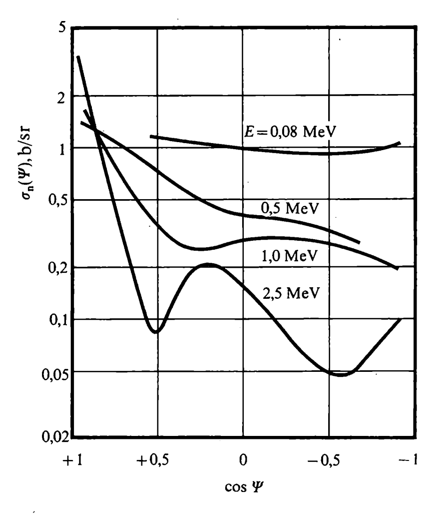


Abb. 2.11: Der differentielle elastische Streuquerschnitt $\sigma_n(\Psi)$ des Kerns ^{238}U für schnelle Neutronen (nach [21]). Ψ = Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Für $A \gg 1$ gilt $\Psi \approx \psi$ = Streuwinkel im Laborsystem.

Aufgaben

2.1. Man berechne σ_f und σ_γ für ^{235}U für 0,025, 0,15, 0,2 und 0,5 eV aus den Daten der Resonanzlinien bei E_r = —0,95, 0,29 und 1,13 eV gem. Tab. 2.2. nach Formel (2.10). Der Dopplereffekt werde vernachlässigt.

2.2. Man vergleiche die dopplerverbreiterten Resonanzwirkungsquerschnitte für T = 1000°K und 300°K in Abb. 2.7 mit dem Resonanzwirkungsquerschnitt für $T \rightarrow 0$. Zeige anhand der Formeln in Abschn. 2.2.6., daß die Flächen unter den Resonanzlinien unabhängig von der Temperatur sind.

3. Die Wirkungsquerschnitte der Reaktormaterialien und ihre Bedeutung für den Reaktor

3.1. Wirkungsquerschnitte der Spalt- und Brutstoffe

Spalt- und Einfangquerschnitte. Der wichtigste Wirkungsquerschnitt im Reaktor ist der Spaltquerschnitt σ_f der Spaltstoffe. Wir beginnen bei ^{235}U, dem einzigen in der Natur vorkommenden

Spaltstoff. Abb. 3.1 gibt den Spaltquerschnitt dieses Uranisotops im Energiebereich der Reaktorneutronen bis hinauf zu 10 MeV wieder. Wir können deutlich drei Bereiche unterscheiden (Begründung s. Abschn. 2): den $1/v$-Bereich unterhalb der ersten Resonanz, d. h. für Neutronenenergien $< 0{,}1$ eV, den der aufgelösten Resonanzen zwischen 0,1 eV und etwa $10^2 - 10^3$ eV und den Bereich der unaufgelösten Resonanzen mit dem Kontinuumsgebiet oberhalb 10^3 eV. Die höchsten Spaltquerschnitte treten im $1/v$-Bereich auf. Für thermische Neutronen mit $E = kT_0 = 0{,}0253$ eV gilt z. B. $\sigma_f = 577$ b. Im Kontinuumsgebiet sinkt dagegen der Spaltquerschnitt auf wenige barn ab. Die hohen Spaltquerschnitte im $1/v$-Bereich tragen dazu bei, daß thermische Reaktoren mit einem Minimum an Spaltstoff auskommen. Schnelle Reaktoren werden infolge der Abnahme der Wirkungsquerschnitte mit wachsender Neutronenenergie nur mit einem höheren Spaltstoffeinsatz kritisch. Um trotz der kleinen Spaltquerschnitte hohe Leistungsdichten zu erzielen, muß die Neutronenflußdichte in schnellen Reaktoren gewöhnlich höher sein als in thermischen Reaktoren.

Der Wirkungsquerschnitt σ_γ für Neutroneneinfang weist im $1/v$-Gebiet etwa dieselbe Energieabhängigkeit wie der Spaltquerschnitt auf, ist jedoch kleiner. Für thermische Neutronen mit $E = 0{,}0253$ eV gilt $\sigma_\gamma = 101$ b. Das Verhältnis α von Einfang- zu Spaltwahrscheinlichkeit (s. Abschn. I.3.2) können wir mit Hilfe der Wirkungsquerschnitte wie folgt ausdrücken

$$\alpha = \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_f}. \tag{3.1}$$

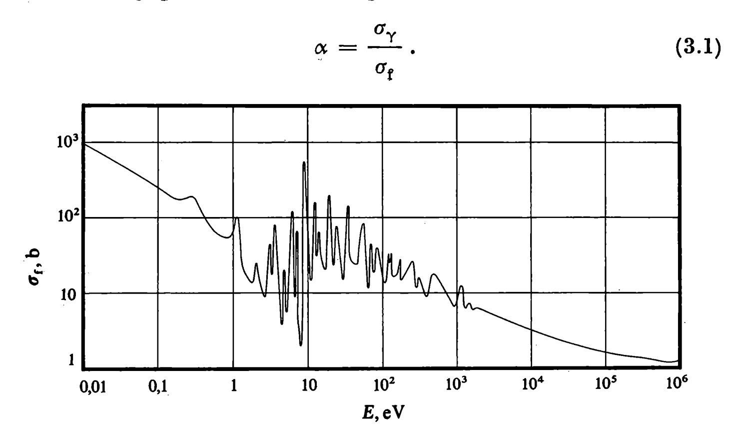


Abb. 3.1: Der Spaltquerschnitt σ_f des Kerns ^{235}U in Abhängigkeit von der Neutronenenergie (nach [2]).

Neutronenfreisetzung je Absorption im Spaltstoff. Für ein im Spaltstoff absorbiertes Neutron werden nach Gl. (I.3.17) unter Beachtung von (3.1)

$$\eta = \frac{\nu}{1 + \alpha} = \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma} \,. \tag{3.2}$$

schnelle Neutronen emittiert. Berechnet man aus den Wirkungsquerschnitten σ_f, σ_γ und aus der Neutronenzahl ν die η-Werte der Spaltstoffe, so erhält man in Abhängigkeit von der Energie die Darstellung der Abb. 3.2. Es zeigt sich, daß ^{239}Pu bei Bestrahlung mit schnellen Neutronen die weitaus besten Multiplikationseigenschaften der drei Spaltstoffe besitzt.

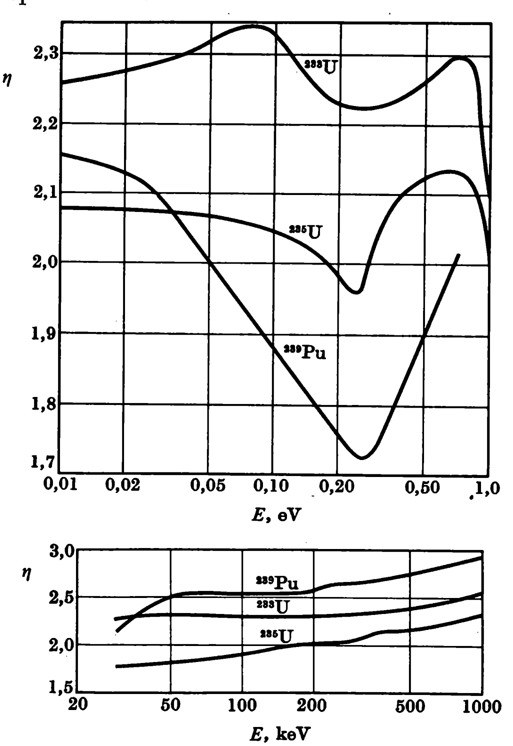


Abb. 3.2: Die Größe η für ^{233}U, ^{235}U und ^{239}Pu in Abhängigkeit von der Energie (nach [2]), a) für langsame Neutronen, b) für schnelle Neutronen.

Von den η Neutronen, die für jeden durch Neutronenabsorption verbrauchten Spaltstoffkern entstehen, wird 1 Neutron zur Aufrechterhaltung der Kettenreaktion benötigt, $\eta - 1$ stehen zur Deckung der unvermeidlichen Neutronenverluste und zur künstlichen Herstellung der Spaltstoffe ^{233}U und ^{239}Pu zur Verfügung. Durch geeignete Anordnung von ^{239}Pu und ^{238}U ist es im schnellen Brutreaktor auf Grund des hohen η-Wertes möglich, im Mittel mehr als 1 Neutron von den $\eta - 1$ Überschußneutronen zur Erzeugung neuen Plutoniums aus ^{238}U zu nützen.

Aus Abb. 3.2 geht ferner hervor, daß im Bereich der thermischen Neutronen der Spaltstoff ^{233}U die besten Multiplikationseigenschaften aufweist. Das gleiche gilt für den Bereich der mittelschnellen Neutronen (Resonanzbereich).

Wirkungsquerschnitte der Brennstoffe im thermischen Bereich. In der Abb. 3.3 sind die Spaltquerschnitte der drei Spaltstoffe ^{233}U, ^{235}U und ^{239}Pu im Energiebereich der langsamen Neutronen miteinander verglichen. Auffallend ist die ausgeprägte Pu-Resonanz bei 0,3 eV und das Abweichen vom $1/v$-Gesetz (s. auch Abschn. 2.2.5) bei den verschiedenen Spaltstoffen. Auf Grund des hohen Wirkungsquerschnitts unterhalb 0,5 eV kann ^{239}Pu im thermischen

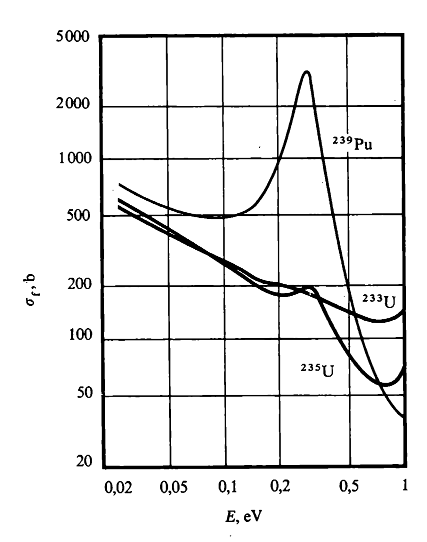


Abb. 3.3: Die Spaltquerschnitte der Spaltstoffe ^{233}U, ^{235}U und ^{239}Pu für langsame Neutronen (nach [2]).

Reaktor besser mit anderen Neutronenabsorbern (Strukturmaterial, Kühlmittel, Moderator) konkurrieren als ^{233}U und ^{235}U, d. h. der thermische Nutzfaktor f ist bei ^{239}Pu relativ groß. Andererseits ist η bei ^{239}Pu in einem weiten Bereich unterhalb 0,5 eV kleiner als bei ^{235}U und ^{233}U.

Zur Beurteilung des relativen Wertes der verschiedenen Spaltstoffe über eine bestimmte Betriebszeit des Reaktors muß auch der Einfluß der höheren Isotope berücksichtigt werden, die aus den Spaltstoffen durch Neutroneneinfang entstehen. Von diesen hat ^{240}Pu bei 1 eV eine sehr hohe Einfangresonanz mit etwa 10^5 b bei einem Spaltquerschnitt von etwa 0,1 b (s. Abb. 3.4). ^{239}Pu mit merklichen Beimischungen von ^{240}Pu ist daher im thermischen Reaktor gewöhnlich ein schlechterer Brennstoff als ^{235}U. Das Isotop ^{241}Pu, das bei langen Bestrahlungszeiten aus dem ^{240}Pu „erbrütet" werden kann, hat wieder ausgezeichnete Spalteigenschaften (s. Tab. I. 3.1–2).

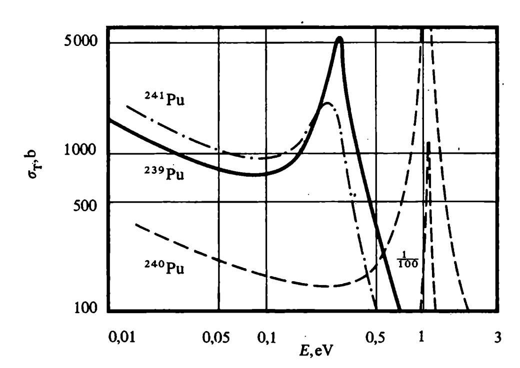


Abb. 3.4: Wirkungsquerschnitte der Plutonium-Isotope im eV-Bereich (nach [22]).

Wirkungsquerschnitte der Brennstoffe im MeV-*Bereich.* Abb. 3.5 gibt die Spaltquerschnitte der Spaltstoffe im MeV-Bereich wieder. Nach dem eingangs beschriebenen Abfall des Spaltquerschnitts bis 1 MeV erfolgt bei höheren Energien (6, 12 MeV) ein stufenförmiger Anstieg. Bei diesen Einfallsenergien wird die Anregungsenergie des Zwischenkerns so groß, daß selbst nach der Emission von 1, 2, . . . Neutronen bei (n, n′)- bzw. (n, 2n)- Reaktionen eine Kernspaltung energetisch möglich ist (second-chance-fission, third-chance-fission). Die Öffnung dieser neuen Spaltkanäle drückt sich in einem Anstieg des Spaltquerschnitts aus.

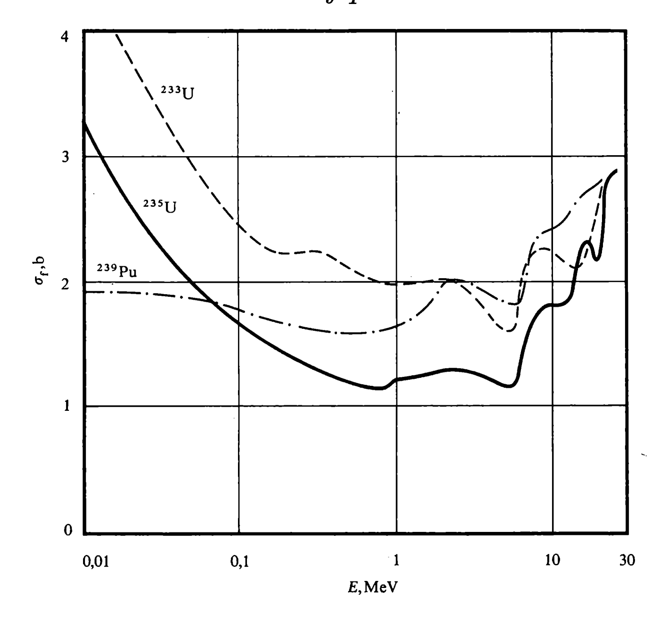


Abb. 3.5: Die Spaltquerschnitte der Spaltstoffe im MeV-Bereich (nach [2]).

Die Abb. 3.6–7 zeigen die Wirkungsquerschnitte aller überhaupt möglichen Prozesse, die bei Stößen schneller Neutronen mit ^{235}U und ^{239}Pu in dem für schnelle Reaktoren wichtigen Energiebereich

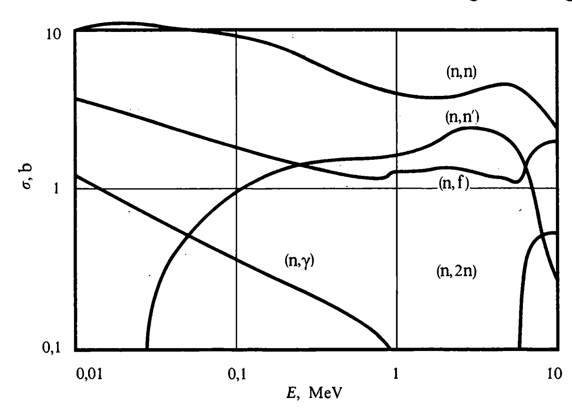


Abb. 3.6: Die Wirkungsquerschnitte des ^{235}U für schnelle Neutronen (nach [3]).

zwischen 0,01 und 10 MeV auftreten. Es sind dies (n, f)-, (n, γ)-, (n, n')- und (n, 2n)-Prozesse sowie die elastische Streuung (n, n). Der Verlauf ist bei beiden Kernen sehr ähnlich. Die elastische Streuung überwiegt. Die Vorwärtskomponente der elastischen Streuung nimmt mit wachsender Neutronenenergie stark zu, analog zu ^{238}U (s. Abb. 2.11). Dadurch wird der Transport schneller Neutronen in der Flugrichtung des einfallenden Neutrons begünstigt. Die unelastische Streuung setzt bei etwa 0,03 MeV merklich ein und erreicht Werte in der Größe des Spaltquerschnitts von 1 bis 2 b. Die damit verbundene Neutronenbremsung ist im schnellen Reak-

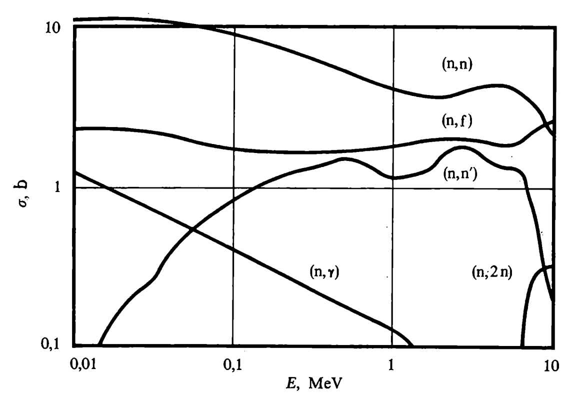


Abb. 3.7: Die Wirkungsquerschnitte des ^{239}Pu für schnelle Neutronen (nach [3]).

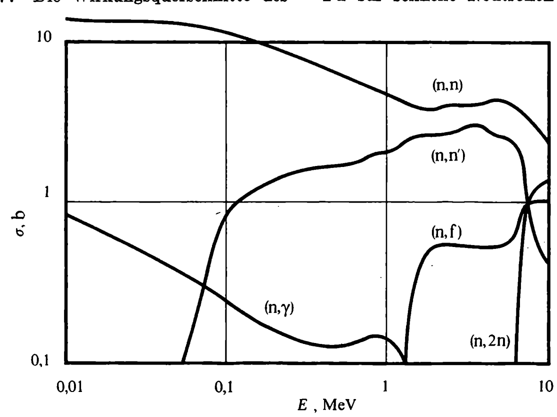


Abb. 3.8: Die Wirkungsquerschnitte des ^{238}U für schnelle Neutronen (nach [3]).

tor nicht erwünscht. Die (n, 2 n)-Reaktion tritt erst oberhalb 5–6 MeV auf. Ähnliche Verhältnisse findet man bei ^{233}U.

Die Wirkungsquerschnitte des Brutstoffs ^{238}U sind in Abb. 3.8 für den MeV-Bereich dargestellt. Für ^{238}U wie für alle Brutstoffe ist die Spaltschwelle bei etwa 1 MeV (s. Abb. 3.9) charakteristisch. Oberhalb dieser Schwelle tragen die Brutstoffe zur Erhöhung der Multiplikationskonstante bei. Verglichen mit ^{238}U und ^{232}Th ist der Spaltquerschnitt des ^{240}Pu relativ hoch. Er liegt oberhalb 1 MeV in der Größe des Spaltquerschnitts von ^{239}Pu. Das sogenannte „schmutzige" Plutonium mit merklichen Anteilen von ^{240}Pu ist daher im schnellen Reaktor (im Gegensatz zum thermischen Reaktor) ein ausgezeichneter Brennstoff.

Wirkungsquerschnitt im Resonanzbereich und darunter. Unterhalb 1 MeV wirken die Brutstoffe im wesentlichen nur noch als Streuer

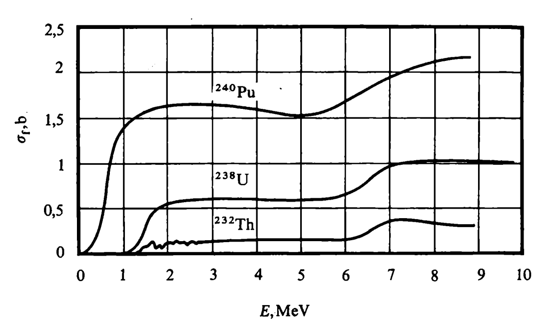


Abb. 3.9: Die Spaltquerschnitte der Brutstoffe im MeV-Bereich (nach [23]).

und Absorber. Abb. 3.10 zeigt die hohen Resonanzspitzen von ^{238}U im Energiebereich zwischen 1 und 10^3 eV. Sie sind überwiegend Absorptionsresonanzen (s. Tab. 2.1). Die Neutroneneinfänge in den Resonanzen verschlechtern zwar die Neutronenbilanz und gefährden die Erzeugung einer Kettenreaktion. Ist aber erst einmal durch besondere Maßnahmen (z. B. hohe Spaltstoffkonzentration, Abbremsung der Neutronen im Moderator außerhalb des Urans) eine Kettenreaktion sichergestellt, so führen die Neutroneneinfänge im Brutstoff zur Bildung neuen Spaltstoffs und verbessern dadurch die Brennstoffausnützung.

In einem Brennstoff aus Spaltstoff und Brutstoff bezieht man die Emission von Spaltneutronen häufig auf eine Absorption im Brennstoff, nicht auf eine Absorption im Spaltstoff. Wir wollen diese Größe zur Unterscheidung von der für den reinen Spaltstoff

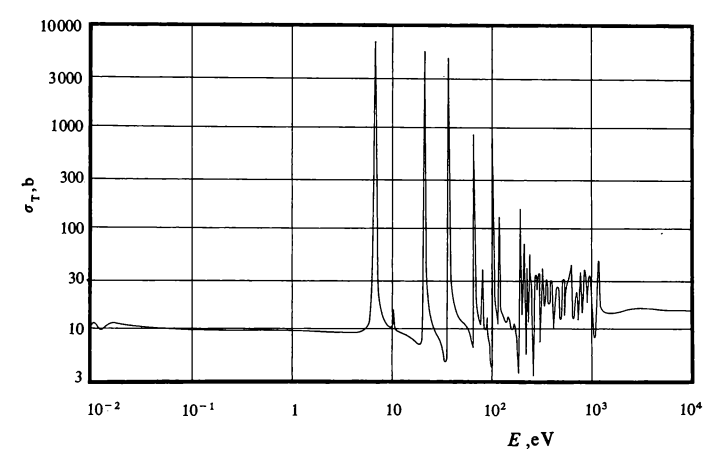


Abb. 3.10: Der totale Wirkungsquerschnitt σ_T des Kerns ^{238}U in Abhängigkeit von der Neutronenenergie (nach [2]).

definierten Größe η mit η' bezeichnen. Die thermische Nutzung muß in diesem Fall als Bruchteil aller Absorptionen im Brennstoff (nicht im Spaltstoff) definiert werden. Der η'-Wert des Natururans

$$\eta' = \frac{x \cdot \sigma_f^{235} \cdot \nu^{235}}{x\,(\sigma_f^{235} + \sigma_\gamma^{235}) + (1-x)\,\sigma_\gamma^{238}}\,; \qquad (3.3)$$

x = Bruchteil der ^{235}U-Kerne (Natururan $x = 0{,}0072$)

sinkt im Resonanzbereich unter 1. Erst unterhalb 1 eV Neutronenenergie wird der η'-Wert des Natururans durch das starke Anwachsen des Spaltquerschnitts von ^{235}U größer als 1. Bei $E = kT_0 = 0{,}0253$ eV gilt z. B. für Natururan $\eta' = 1{,}33$ verglichen mit $\eta = 2{,}07$ für reines ^{235}U. Mit Rücksicht auf den kleinen Neutronenüberschuß $\eta' - 1$ dürfen bei Natururanreaktoren als Moderatoren und Konstruktionsmaterialien nur schwach absorbierende Stoffe wie D_2O oder Graphit (s. Tab. 1.2) und Al oder Zr verwendet werden. Um größere Freiheit in der Materialwahl zu haben, muß das ^{235}U-Isotop künstlich angereichert werden. Die η'-Werte für verschiedene Anreicherungsgrade sind in Tab. 3.1 nach (3.3) wiedergegeben. Schwache Anreicherungen erhöhen den η'-Wert ganz beträchlich. Bei 20 % Anreicherung ist der Grenzwert von 2,07 nahezu erreicht.

Tab. 3.1: η'-Werte für angereichertes Uran bei $E = kT_0 = 0{,}0253$ eV.

^{235}U-Gehalt, %	0,72	1	2	3	5	10	20
η'	1,33	1,48	1,73	1,83	1,92	2,00	2,04

In modernen Leistungsreaktoren werden die Spalt- und Brutstoffe gewöhnlich in Form von UO_2 und PuO_2 verwendet. Die keramischen Brennstoffe haben gegenüber metallischen Brennstoffen den Vorteil, daß sie hohe Brennstoffabbrände zulassen und eine

gute Verträglichkeit mit anderen Reaktormaterialien aufweisen. Tab. 3.2 gibt die Uran- und Plutoniumdichten in verschiedenen chemischen Verbindungen an. Damit können auch die makroskopischen Wirkungsquerschnitte $\Sigma = N \cdot \sigma$ für die verschiedenen Brennstoffe berechnet werden.

3.2. Wirkungsquerschnitte von Moderatoren und Kühlmitteln

Die Güte eines Moderators hängt von der Massenzahl, der Größe des Streu- und Absorptionsquerschnitts sowie von der Teilchendichte ab. Erwünscht ist eine wirkungsvolle Neutronenbremsung auf kleinem Raum ohne Verluste. Der ideale Moderator müßte daher kleines Atomgewicht, großen Streuquerschnitt, verschwindenden Absorptionsquerschnitt und hohe Teilchendichte aufweisen. Diese Forderungen werden jedoch von den wirklichen Moderatoren nur zum Teil erfüllt (s. Tab. 1.2). Von den leichten Kernen unterhalb des Kohlenstoffs scheiden Lithium und Bor wegen zu großer Neutronenabsorption (71 b bzw. 755 b) und Helium wegen zu geringer Teilchendichte aus. Damit kommen als Moderatoren Wasserstoff- und Deuteriumverbindungen mit hoher Teilchendichte, wie H_2O, D_2O, Polyphenyle und Metallhydride sowie Beryllium und Graphit in Frage. Bei Zirkonhydrid trägt auch die unelastische Streuung am Zirkon merklich zur Abbremsung bei.

Eigenschaften des Wasserstoffs. Wasserstoff hat für die Neutronenbremsung das günstigste Atomgewicht und den größten Streuquerschnitt (s. Abb. 2.1 und Tab. 1.2), lagert jedoch mit relativ großer Wahrscheinlichkeit Neutronen an: $\mathrm{H} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{D}$. Es entsteht der schwere Wasserstoff. Infolge der damit verbundenen Neutronenverluste sinkt die thermische Nutzung (s. Abschn. I.4) beträchtlich unter 1. Aus diesem Grunde kann der leichte Wasserstoff in Natururanreaktoren nicht als Moderator verwendet werden, wohl aber in Reaktoren mit einer Anreicherung des $^{235}\mathrm{U}$.

In Tab. 3.3 ist die thermische Nutzung f_{th} für eine homogene Mischung aus H_2O-Moderator und UO_2-Brennstoff in Abhängigkeit vom Volumverhältnis V^{H_2O}/V^{UO_2} für Natururan ($x = 0{,}0073$) und angereichertes Uran ($x = 0{,}03$ und $0{,}20$) dargestellt. Es gilt

$$f_{\mathrm{th}} = \frac{\Sigma_A^{UO_2} \cdot V^{UO_2}}{\Sigma_A^{UO_2} \cdot V^{UO_2} + \Sigma_A^{H_2O} \cdot V^{H_2O}} = \tag{3.4}$$

$$= \frac{x(\sigma_f^{235} + \sigma_\gamma^{235}) + (1-x)\,\sigma_\gamma^{238}}{x(\sigma_f^{235} + \sigma_\gamma^{235}) + (1-x)\,\sigma_\gamma^{238} + (N^{H_2O}\,V^{H_2O}/N^{UO_2}\,V^{UO_2})\,\sigma_\gamma^{H_2O}}$$

Tab. 3.2: Eigenschaften von metallischen und keramischen Brennstoffen.

Brennstoff	Dichte ϱ g/cm³	U- oder Pu-Dichte g/cm³	U- bzw. Pu-Kerne je cm³	Schmelzpunkt °C	Wärmeleitzahl λ W/cm grd
U-Metall	18,9	18,9	$4{,}8 \cdot 10^{22}$	1133	0,4 bei 700 °C
UO_2	10,9	9,7	$2{,}2 \cdot 10^{22}$	2760	0,03 bei 700 °C
UC	13,6	13,0	$3{,}3 \cdot 10^{22}$	2400	0,24 bei 700 °C
UN	14,3	13,5	$3{,}4 \cdot 10^{22}$	2885	0,08 —
Pu-Metall	19,7–15,8 (je nach Phase)	19,7–15,8	$5{,}0–4{,}0 \cdot 10^{22}$	640	0,08–0,33 bei 0–500 °C
PuO_2	11,5	10,1	$2{,}6 \cdot 10^{22}$	2360	0,03 bei 700 °C
PuC	13,6	13,1	$3{,}3 \cdot 10^{22}$	1650	ca. 0,1 —
PuN	—	13,5	$3{,}4 \cdot 10^{22}$	~ 2800	— —

Tab. 3.3: Thermische Nutzung f_{th} einer homogenen Mischung aus H_2O und UO_2 nach (3.4) für Neutronen der Energie $E = kT_0 =$ 0,0253 eV.

Anreicherung	V^{H_2O}/V^{UO_2}			
	1	2	3	4
$x = 0{,}0072$	0,884	0,791	0,716	0,655
$x = 0{,}03$	0,958	0,919	0,884	0,850
$x = 0{,}20$	0,993	0,986	0,978	0,972

Der große Streuquerschnitt des Wasserstoffs und sein günstiges Atomgewicht $A = 1$ erlauben es, einen Leichtwasserreaktor sehr kompakt zu bauen. Schwach angereicherte Leichtwasserreaktoren haben sich als Leistungsreaktoren in der Druck- und Siedewasserversion sehr bewährt, stark angereicherte Leichtwasserreaktoren dienen vielfach als Forschungsreaktoren mit hoher Neutronenflußdichte. Das Wasser wird dabei nicht nur als Moderator, sondern auch als Kühlmittel und Reflektor verwendet.

Tab. 3.4: Thermische Nutzung einer homogenen Mischung aus D_2O und UO_2 (Natururan) fürNeutronen der Energie $E = kT_0 =$ 0,0253 eV.

V^{D_2O}/V^{UO_2}	10	20	30	40
f_{th}	0,998	0,996	0,994	0,992

Eigenschaften des Schweren Wassers. Deuterium hat das Atomgewicht $A = 2$ und einen kleineren Streuquerschnitt als der leichte Wasserstoff (Abb. 3.11), bremst daher nicht so gut wie dieser. Schwerwasserreaktoren sind folglich größer als Leichtwasserreaktoren. Der Vorzug des Deuteriums ist eine äußerst geringe Neutronenabsorption, die nur etwa 1/700 der Wasserstoffabsorption beträgt. Die thermische Nutzung f_{th} einer Mischung aus D_2O und UO_2 liegt dicht bei 1 (vgl. Tab. 3.4). Schweres Wasser eignet sich daher als Moderator (und Reflektor) für Natururanreaktoren. Der Nachteil

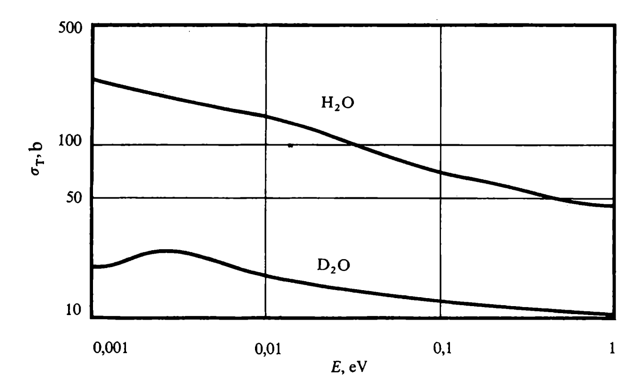


Abb. 3.11: Der Wirkungsquerschnitt des leichten und schweren Wassers (nach [2]).

liegt im Preis. Das schwere Wasser kommt mit einer Häufigkeit von nur $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ im gewöhnlichen Wasser vor, muß also erst künstlich angereichert werden.

Wirkungsquerschnitt von Kohlenstoff. Geringe Absorption zeichnet auch den Kohlenstoff aus. Er kann, wie der Deuteriumkern als Moderator und Reflektor für Natururanreaktoren verwendet werden. Seine Bremswirkung ist allerdings infolge des relativ hohen Atomgewichts $A = 12$ und des kleinen Streuquerschnitts (vgl. Abb. 3.12) geringer als bei Deuterium. Natururan-Graphit-Reaktoren sind daher sehr groß. Die erste gesteuerte Kettenreaktion wurde von FERMI und Mitarbeitern am 2. Dezember 1942 in Chicago in einem großen „Meiler" aus etwa 400 t Graphit und 40 t Natururan (überwiegend in Form von UO_2 und U_3O_8) erzeugt. Es war gelungen, einen sehr reinen Graphit, insbesondere ohne merkliche Beimengen des starken Neutronenabsorbers Bor, herzustellen. Im Gegensatz zu Wasser kann Graphit auch bei höheren Temperaturen als Moderator verwendet werden. Moderne Hochtemperaturreaktoren sind mit angereichertem Uran, Graphitmoderator und Gaskühlung (He, CO_2 u. a.) ausgestattet.

Der totale Wirkungsquerschnitt des Kohlenstoffkerns ist zwischen 10^{-1} und 10^5 eV nahezu konstant gleich 4,8 b. Die Resonanzspitzen, die bei den schweren Kernen (Abb. 3.1, 10) schon im eV-Gebiet beginnen, setzen hier erst im MeV-Gebiet ein (Abb. 3.12). Bei kleinen Neutronenenergien ($< 0{,}1$ eV) kommt im Kohlenstoff-

querschnitt neben den Effekten der chemischen Bindung und der thermischen Bewegung auch die Interferenz der Neutronenwellen zum Ausdruck. Nach der aus der Röntgenphysik bekannten Braggschen Beziehung $\sin \vartheta/2 = n \cdot \lambda/\,2\,d$ tritt für bestimmte Streuwinkel ϑ eine konstruktive Interferenz zwischen den an verschiedenen Netzebenen eines Kristalls elastisch gestreuten Neutronenstrahlen auf. Ist die Neutronenwellenlänge größer als der doppelte maximale Netzebenenabstand des Kristalls, so findet keine kohärente Streuung mehr statt. Die Folge ist eine abrupte Abnahme des Streuquerschnitts an der Bragg-Grenze $\lambda = 2\,d_{\max}$ um den kohärenten elastischen Anteil (Abb. 3.12–13). Der kohärente elastische Anteil der Streustrahlung nimmt mit ansteigender Temperatur ab, da die Anregung der Neutronen durch die Gitterschwingungen mit der Temperatur zunimmt. Der Wirkungsquerschnitt spaltet daher für Neutronenenergien unterhalb der Bragg-Grenze je nach Temperatur in verschiedene Zweige auf. Dieses Verhalten tritt bei den kristallinen Moderatoren Graphit und Beryllium deutlich in Erscheinung.

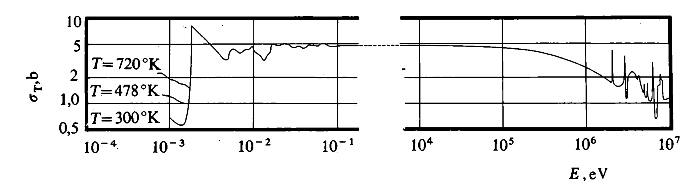


Abb. 3.12: Der totale Wirkungsquerschnitt des Kohlenstoffs (nach [2]).

Beryllium. Be oder BeO wurde bisher lediglich in Sonderfällen als Moderator oder Reflektor diskutiert. Der Be-Gehalt der Erze ist gering, das Metall schwer zu bearbeiten und zudem giftig (Berylliose). Neutronenphysikalisch interessant ist das Beryllium als Neutronenlieferant durch (n, 2 n)-Reaktionen mit schnellen Neutronen (Abb. 3.14).

Kühlmittel bei schnellen Reaktoren. In schnellen Reaktoren ist es notwendig, ein hartes Spektrum aufrechtzuerhalten. Das stark moderierende Wasser entfällt daher als Kühlmittel, es sei denn in Form von Dampf. Gaskühlung ist zwar vom nuklearen Standpunkt aus geeignet, aber nicht so sehr vom thermodynamischen, da schnelle Reaktoren aus wirtschaftlichen Gründen mit einer hohen Leistungsdichte gefahren werden, d. h. intensiv gekühlt werden müssen. Metallische Kühlmittel, wie z. B. Natrium, sind dagegen für

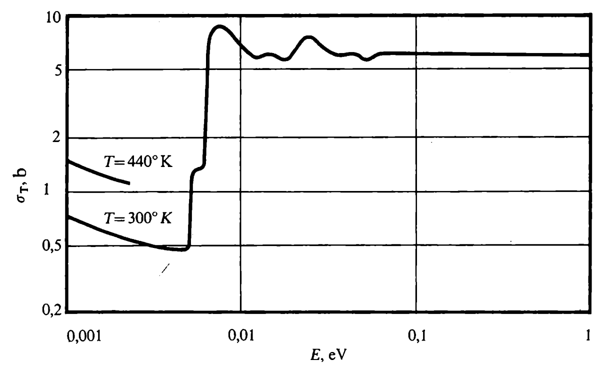


Abb. 3.13: Der totale Wirkungsquerschnitt des Berylliums (nach [2]).

schnelle Reaktoren günstig. Neben ausgezeichneten thermodynamischen Eigenschaften haben sie relativ hohes Atomgewicht, bremsen also bei elastischen Stößen wenig. Für den Neutronenhaushalt erwünscht ist darüber hinaus eine geringe unelastische Streuung

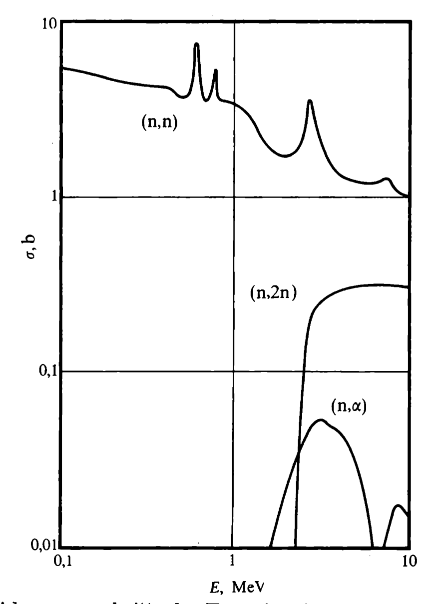


Abb. 3.14: Wirkungsquerschnitte des Kerns ^{9}Be für schnelle Neutronen (nach [2]).

(geringe Bremsung durch Kernanregung) und eine hohe elastische Streuung (geringe Leckverluste). Abb. 3.15 gibt die Wirkungsquerschnitte des ^{23}Na für den Bereich der schnellen Neutronen wieder.

3.3. Wirkungsquerschnitte von Reaktorwerkstoffen und Neutronengiften

Struktur- und Hüllmaterialien. Im Hinblick auf die Neutronenökonomie sollten Struktur- und Hüllmaterialien einen möglichst kleinen Einfangquerschnitt haben. Magnesium und Aluminium sind in diesem Sinne geeignete Stoffe. Sie können jedoch wegen ihres niederen Schmelzpunktes nur in einem engen Temperaturbereich verwendet werden (s. Tab. 3.5).

Tab. 3.5: Wirkungsquerschnitte von Strukturmaterialien gegenüber thermischen Neutronen
(nach zunehmendem Einfangquerschnitt geordnet).

Stoff	Schmelzpunkt, °C	σ_γ, b	σ_n, b
C	3700	0,0045	4,8
Mg	650	0,059	3,6
Zr	1850	0,188	6,4
Al	660	0,23	1,3
Mo	2620	2,4	7
Fe	1525	2,55	11
Cr	1800	2,9	3
Ni	1450	4,5	17,5
V	1800	4,8	5
Ti	1800	5,8	4
Mn	1250	12,6	2,3
W	3370	19,2	5
Ta	3030	21,3	5

Zirkon mit seinem hohen Schmelzpunkt und einem Einfangquerschnitt zwischen Mg und Al ist diesen Metallen überlegen. Allerdings ist es relativ teuer.

Stahl absorbiert etwa 10mal so viel Neutronen wie Aluminium, kann daher nur in angereicherten Reaktoren eingesetzt werden. Bei sehr hohen Temperaturen kommen als Werkstoffe Graphit, Kar-

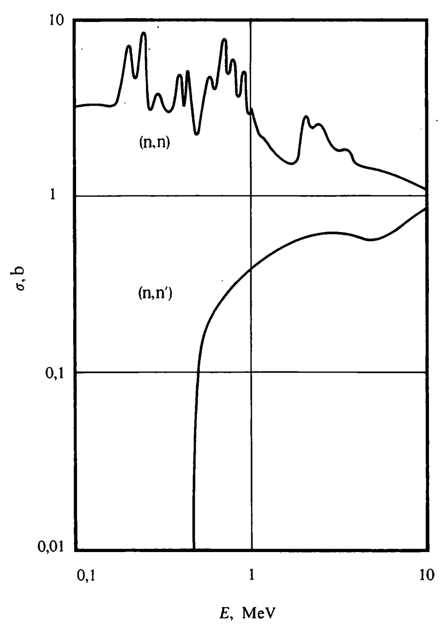


Abb. 3.15: Elastischer und unelastischer Streuquerschnitt des Kerns ^{23}Na für schnelle Neutronen (nach [3]).

bide, keramische Stoffe und die sog. „Cermets", Verbindungen keramischer Stoffe und schwer schmelzbarer Metalle, in Frage. Die Einfangquerschnitte der schwer schmelzbaren Metalle sind im allgemeinen recht groß. Molybdän absorbiert etwa so viel wie Stahl, Wolfram und Tantal ungefähr das 10fache.

Bei hohen Neutronenenergien sind die Einfangquerschnitte sehr klein (Ausnahmen sind z. B. $^{6}_{3}Li$ und $^{10}_{5}B$). Bei schnellen Reaktoren ist man daher in der Wahl der Strukturmaterialien freier. Für schnelle Leistungsreaktoren werden heute vor allem Cr-Ni-Stähle verwendet. Störend für den Neutronenhaushalt sind vorwiegend die leichten Elemente (Moderatoren) und solche mit hoher unelastischer Streuung.

Neutronengifte. Einige wenige Kerne weisen im Gebiet der langsamen Neutronen sehr hohe Neutronenabsorptionsquerschnitte auf (s. Tab. 3.6). Es sind dies einmal die leichten Kerne ^{3}He, ^{6}Li und

^{10}B, die beim Stoß eines Neutrons mit sehr großer Wahrscheinlichkeit ein geladenes Teilchen (Proton, bzw. α-Teilchen) emittieren.

$$^3_2He + n \longrightarrow {}^3_1H + p,$$
$$^6_3Li + n \longrightarrow {}^3_1H + \alpha,$$
$$^{10}_5B + n \longrightarrow {}^7_3Li + \alpha.$$

Auffallend bei den Absorptionsquerschnitten dieser Kerne ist ein ausgeprägtes $1/v$-Gesetz bis hinauf zu Neutronenenergien von etwa 0,1 MeV (s. Abb. 3.16).

Tab. 3.6: Absorptionsquerschnitte und Halbwertszeit von Neutronengiften.

Element	σ_A, b für $E = 0{,}0253$ eV	$\tau_{\frac{1}{2}}$
^3He	5327	stabil
^6Li	945	stabil
Li	71	stabil
^{10}B	3837	stabil
B	759	stabil
^{113}Cd	$2 \cdot 10^4$	stabil
Cd	2450	stabil
^{135}Xe	$2{,}72 \cdot 10^6$	9,2 h
^{149}Sm	$4{,}08 \cdot 10^4$	stabil
^{151}Sm	$1 \cdot 10^4$	80 a
^{151}Eu	7700	stabil
^{152}Eu	5500	9,3 h
^{153}Eu	420	stabil
^{154}Eu	1500	16 a
^{155}Eu	$1{,}4 \cdot 10^4$	1,7 a
^{155}Gd	$6{,}1 \cdot 10^4$	stabil
^{157}Gd	$2{,}4 \cdot 10^5$	stabil
Dy	950	stabil
^{174}Hf	1500	stabil

Die zweite Gruppe der starken Neutronenabsorber bilden Cadmium und Xenon sowie die seltenen Erden Samarium, Europium,

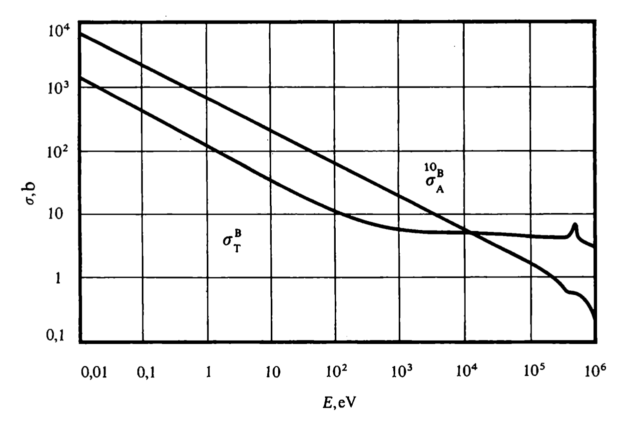


Abb. 3.16: Absorptionsquerschnitt des Isotops $^{10}_{5}B$ und totaler Wirkungsquerschnitt des natürlichen Isotopengemisches von Bor, in dem $^{10}_{5}B$ mit 18,8 % enthalten ist [3].

Gadolinium, Dysprosium und Hafnium. Diese Kerne absorbieren Neutronen unter Emission von γ-Quanten (Strahlungseinfang (n, γ)). Der stärkste Neutronenfänger ist $^{135}_{54}Xe$, mit $\sigma_\gamma = 2{,}72 \cdot 10^6$ b bei E = 0,0253 eV. Dieser Kern besitzt 81 Neutronen, hat also in der Hauptschale mit 82 Plätzen (s. Abschn. I. 1.2) gerade ein Neutronenloch. ^{135}Xe fällt im Reaktor einmal direkt als Spaltprodukt, zum anderen über zwei β-Zerfälle aus den Spaltprodukten ^{135}Te und ^{135}J an (s. Abschn. I. 3.1).

$$^{135}_{52}Te \xrightarrow[<0{,}5\,min]{\beta^-} {}^{135}_{53}J \xrightarrow[6{,}7\,h]{\beta^-} {}^{135}_{54}Xe \xrightarrow[9{,}2\,h]{\beta^-} {}^{135}_{55}Cs \xrightarrow[2{,}6\cdot 10^6\,a]{\beta^-} {}^{135}_{56}Ba$$

^{135}Xe verschwindet im Reaktor durch radioaktiven Zerfall mit einer Halbwertszeit von 9,2 h oder durch Neutroneneinfang. Die Konzentration des Neutronengiftes ^{135}Xe hängt somit von der Höhe der Neutronenflußdichte ab. Nach Abschalten des Reaktors kann die Xenonkonzentration vorübergehend ansteigen und damit ein erneutes Anfahren des thermischen Reaktors gefährden. Weitere Neutronengifte im Gefolge des Spaltprozesses sind die seltenen Erden, allen voran Samarium. Diese Kerne sind meist stabil oder besitzen so große Halbwertszeiten, daß sie als stabil betrachtet werden können.

Bor und Cadmium werden als Neutronenabsorber in Steuerstäben verwendet, Bor z. B. als B_4C in Stahlhüllen. Wie schon erwähnt, ist

Bor in einem weiten Bereich ein $1/v$-Absorber (s. Abb. 3.16). Cadmium hat dagegen eine hohe Resonanzspitze bei 0,18 eV (s. Abb. 3.17). Sie rührt vom Isotop ^{113}Cd her, das mit 12,3% im natürlichen Isotopengemisch enthalten ist. Der Einfangquerschnitt des Cd fällt nach höheren Energien hin sehr rasch ab, so daß er bei wenigen eV schon unter 1 b gesunken ist. Cadmium ist daher auch als Filter zu verwenden, das Neutronen mit $E < 0{,}5$ eV absorbiert, schnellere Neutronen dagegen durchläßt.

Neben dem Wirkungsquerschnitt des Cadmiums ist in Abb. 3.17 der Wirkungsquerschnitt des Indiums eingetragen. Dieses zeichnet sich vor allem durch eine sehr hohe Absorptionsspitze bei 1,44 eV aus. Indium wird beim Neutroneneinfang radioaktiv, eignet sich daher zur Messung der Neutronenflußdichte mit Hilfe der Aktivität. Mißt man einmal mit und einmal ohne Cadmiumhülle um die Indiumsonde, so läßt sich aus den Indiumaktivitäten das Verhältnis von epithermischen zu thermischen Neutronen im Reaktor bestimmen.

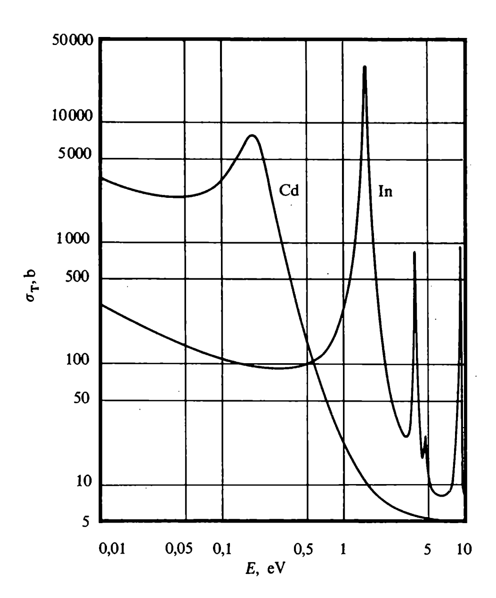


Abb. 3.17: Totaler Wirkungsquerschnitt von Cadmium und Indium (natürliche Isotopengemische) [3].

Literaturverzeichnis

[1] GOLDSTEIN, H.: Nomenclature scheme for experimental monoenergetic nuclear cross sections, in: Fast neutron physics II. Interscience Publishers, New York 1963.
[2] Neutron cross sections. BNL-325. Sec. Ed., incl. Suppl. (1958–66).
[3] BUCKINGHAM, B. R. S., K. PARKER, and E. D. PENDLEBURY: Neutron cross sections. AWRE-Report No. 0-28/60 March 1961.
[4] SCHMIDT, J. J.: Neutron cross sections for fast reactor materials. KFK 120, Part I–III (1962–1966).
[5] LAMB, W. E., JR.: Capture of neutrons by crystals. Phys. Rev. **55**, 190 (1941).
[6] VOGT, E.: Resonance theory of neutron cross sections of fissionable nuclei. Phys. Rev. **112**, 203 (1958).
[7] ROSE, M. E., W. MIRANKER, P. LEAK, L. ROSENTHAL, and J. K. HENDRICKSON: A table of the ψ-function. WAPD-SR-506, 1954.
[8] O'SHEA, D. M., and H. C. THACHER: Trans. ANS **6**, 36 (1963).
[9] ISHIGURO, Y.: A rigorous expression for the shape of a Doppler-broadened resonance. Nucl. Sci. and Eng. **24**, 375 (1966).
[10] PORTER, C. E., and R. G. THOMAS: Fluctuations of nuclear reaction widths. Phys. Rev. **104**, 483 (1956).
[11] MEHTA, M. L.: On the statistical properties of the level-spacings in nuclear spectra. Nucl. Phys. **18**, 395 (1960).
[12] WIGNER, E. P.: Conference on neutron physics by time-of-flight, Gatlinburg, Tennessee. ORNL-2309, 59 (1957).
[13] HARVEY, J. A.: Time of flight conference, Saclay, p. 23 (1961).
[14] GOLDMAN, D. T., C. R. LUBITZ: Calculation of inelastic neutron scattering. KAPL-2163 (1961).
[15] SZWARCBAUM, G., M. SIEGER and S. YIFTAH: Inelastic scattering of high-energy neutrons in fast reactors. Proc. Third Int. Conf., Geneva 1964, Vol. 6, P/511.
[16] GOLDBERG, M. D.: Angular distributions in neutron-induced reactions. BNL-400 (1962).
[17] BJORKLUND, R., and S. FERNBACH: Phys. Rev. **109**, 1295 (1958).
[18] ADLER, F. T., and D. B. ADLER: Calculation of resonance integrals for fissile materials, in: Reactor physics in the resonance and thermal region, Vol. II. p. 47. MIT-Press 1966.
[19] HERTZ, G.: Lehrbuch der Kernphysik, Bd. 2, Teubner, Leipzig/Dausien, Hanau 1961.
[20] WHITTEMORE, W. L., and A. W. MCREYNOLDS: Effects of chemical binding on the neutron cross section of hydrogen. Phys. Rev. **113**, 809 (1959).
[21] Angular distributions in neutron-induced reactions. BNL 400. First and Sec. Ed. (1962).
[22] Progress in plutonium utilization. HW-83 601, December 1964.
[23] Plutonium as a power reactor fuel. HW-75 007, December 1962.
[24] WEINBERG, A. M., and E. P. WIGNER: The physical theory of neutron chain reactors. University of Chicago Press 1958.

III. NEUTRONENBREMSUNG

Im Reaktor haben wir Neutronen sehr verschiedener Energie. Bei der Kernspaltung entstehen Neutronen im Energiebereich von 0,1 bis 10 MeV mit einer Verteilung, die wir in (I. 3.18) angegeben haben. Diese Neutronen verlieren durch Streuakte mit den Kernen des umgebenden Mediums Energie und können so bis auf thermische Energien ($E_{th} \approx 0{,}0253$ eV) abgebremst werden. Im thermischen Reaktor hat den wesentlichen Anteil die elastische Streuung, bei der die kinetische Energie der Teilchen vor und nach dem Stoß die gleiche ist. Ist der Stoß unelastisch, z. B. bei der Streuung schneller Neutronen mit $E > 5 \cdot 10^4$ eV am Urankern, so geht ein Teil der kinetischen Energie in Anregungsenergie des Kerns über, die in Form von Gammaquanten abgestrahlt wird. Diese Art der Neutronenbremsung herrscht in schnellen Reaktoren vor. Die Gesetze der Neutronenbremsung und die daraus resultierenden Neutronenspektren sind für einen Reaktor ebenso wichtig wie die Gesetze der räumlichen Ausbreitung der Neutronen. In diesem Kapitel betrachten wir vorwiegend die Auswirkung der elastischen Streuung der Neutronen auf das Neutronenspektrum des unendlichen Mediums.

1. Energie- und Winkelbeziehungen beim Stoß

1.1. Der Einzelstoß

Es stoße ein Neutron (Massenzahl 1) mit einem Kern der Massenzahl A zusammen. Die Energie des Neutrons sei so hoch, daß die Wärmebewegung des Kerns gegenüber der Neutronengeschwindigkeit vernachlässigbar ist. Wir können dann den Kern als ruhend ansehen. Beim Stoß wird das Neutron abgelenkt und überträgt einen Teil seines Impulses auf den Kern. Wir fragen nach seiner Energie nach dem Stoß. Zur Beantwortung dieser Frage analysieren wir den Prozeß im Schwerpunktsystem.

Großgeschriebene Buchstaben beziehen sich immer auf das Schwerpunktsystem, kleingeschriebene auf das Laborsystem. Die Bezeichnungen im einzelnen sind aus Tab. 1.1 zu entnehmen.

Der Impuls des Schwerpunktes im Laborsystem $m(A+1)\,\boldsymbol{v}_S$ ist durch die Summe der Impulse von Neutron $(m \cdot \boldsymbol{v})$ und Kern $(m\,A\,\boldsymbol{v}_A)$ bestimmt, also

$$m(A+1)\,\boldsymbol{v}_S = m\,\boldsymbol{v} + m\,A\,\boldsymbol{v}_A .$$

Daraus ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ im Laborsystem zu berechnen. Bei ruhendem Kern $(\boldsymbol{v}_A = 0)$ gilt demnach $\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}/(1+A)$. Vom Schwerpunkt aus betrachtet $(\boldsymbol{V}_S = 0)$ bewegt sich der (im Laborsystem ruhende) Kern mit der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{V}_A = -\,\boldsymbol{v}_S = -\frac{\boldsymbol{v}}{1+A}, \tag{1.1}$$

und das Neutron mit der Geschwindigkeit (s. Abb. 1.1)

$\boldsymbol{v}$ $\quad \boldsymbol{v}_A = 0$

$\boldsymbol{V}$ $\quad \boldsymbol{V}_A$ $\quad \boldsymbol{V}_S = 0$

Abb. 1.1: Geschwindigkeiten vor dem Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem.

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S = \frac{A}{1+A}\,\boldsymbol{v}. \tag{1.2}$$

Nach dem Impulssatz gilt vor und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem (Abb. 1.2):

$$\boldsymbol{V} + A\,\boldsymbol{V}_A = 0, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{V}' + A\,\boldsymbol{V}_A' = 0. \tag{1.4}$$

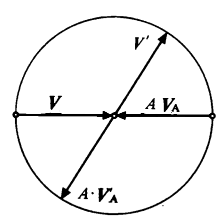


Abb. 1.2: Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem.

Tab. 1.1: Bezeichnung im Schwerpunkt- und Laborsystem.

		Streuwinkel	Neutronenenergie	Geschwindigkeit Neutron Masse: m	Geschwindigkeit Kern $m_A = Am$	Geschwindigkeit Schwerpunkt $m_S = (A+1)\,m$
Laborsystem	vor Stoß	ψ	E	v	v_A	v_S
	nach Stoß		E'	v'	v_A'	v_S'
Schwerpunktsystem	vor Stoß	Ψ	—	V	V_A	$V_S = 0$
	nach Stoß		—	V'	V_A'	$V_S' = 0$

Der Energiesatz fordert

$$\frac{1}{2}\, \boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} A\, \boldsymbol{V}_A^{\ 2} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{V}'^2 + \frac{1}{2} A\, \boldsymbol{V}'^2_A\,. \tag{1.5}$$

Setzen wir $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}'$ aus (1.3–4) in (1.5) ein, so ergibt sich

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{V}'^2,\ \boldsymbol{V}_A^{\ 2} = \boldsymbol{V}'^2_A, \tag{1.6}$$

$$|\boldsymbol{V}| = |\boldsymbol{V}'|,\ |\boldsymbol{V}_A| = |\boldsymbol{V}'_A|\,.$$

Mit den Formeln (1.1–6) ist der Streuakt im Schwerpunktsystem beschrieben. Es gilt jetzt, diese Formeln auf das Beobachtersystem zu übertragen und dort in der gewünschten Weise auszuwerten. Wir bekommen die Neutronengeschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ nach dem Stoß im Laborsystem, wenn wir zu $\boldsymbol{V}'$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S = -\boldsymbol{V}_A$ vektoriell addieren, also

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{V}' - \boldsymbol{V}_A\,. \tag{1.7}$$

Der Betrag dieser Geschwindigkeit ist nach dem Kosinussatz aus Abb. 1.3 zu errechnen:

$$v'^2 = V'^2 + V_A^{\ 2} + 2 \cdot V' \cdot V_A \cdot \cos \Psi. \tag{1.8}$$

Elimination von V' und V_A mit (1.1–3, 6) zugunsten von v ergibt

$$v'^2 = v^2 \left\{1 - \frac{2A}{(A+1)^2}\,(1 - \cos \Psi)\right\} = v^2\, \frac{A^2 + 2A\cos \Psi + 1}{(A+1)^2} \tag{1.9}$$

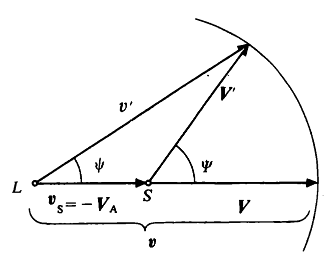


Abb. 1.3: Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ablenkwinkel im Labor- und Schwerpunktsystem. Zur Konstruktion: Kreis mit A ($\sim |\boldsymbol{V}|$) als Radius um den Schwerpunkt S. Das Streuzentrum L im Laborsystem ist in dieser Darstellung aus S um 1 ($\sim |\boldsymbol{v}_S|$) in Richtung $-\boldsymbol{V}$ verschoben (s. Gl. 1.1, 3).

Multipliziert man (1.9) mit der halben Neutronenmasse, so gewinnt man die Beziehung zwischen End- und Anfangsenergie im Laborsystem:

$$E' = E\left\{1 - \frac{2A}{(A+1)^2}(1 - \cos\Psi)\right\}. \tag{1.10}$$

Es ist für das folgende bequem, die Abkürzung

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2, \qquad A = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} \tag{1.11}$$

einzuführen. Damit schreibt sich (1.10)

$$E' = \tfrac{1}{2} E\left\{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\Psi\right\}. \tag{1.12}$$

Hieraus folgt unmittelbar für den Energieverlust

$$\Delta E = E - E' = E\frac{1-\alpha}{2}(1-\cos\Psi) = E\cdot\frac{2A}{(A+1)^2}(1-\cos\Psi). \tag{1.13}$$

Minimale Ablenkung bedeutet $\Psi = 0$, maximale Ablenkung $\Psi = \pi$. Dem entsprechen maximale bzw. minimale Energien nach dem Stoß:

$$E'_{\max} = E, \tag{1.14a}$$

$$E'_{\min} = E\left\{1 - \frac{4A}{(A+1)^2}\right\} = E\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \alpha E. \tag{1.14b}$$

Das Energieintervall, in dem ein Neutron nach einem Stoß wiederzufinden ist, ist also

$$E'_{\max} - E'_{\min} = (1-\alpha)E. \tag{1.14c}$$

Wenn man die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Energie nach dem Stoß auftritt, angeben will, muß man die Verteilungsfunktion für $\cos\Psi$ in (1.12) kennen. Ist die Streuung im Schwerpunktsystem isotrop, so gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß beim Stoß eine Streuung aus der Einfallsrichtung $\boldsymbol{\Omega}_s = \boldsymbol{V}/|\boldsymbol{V}|$ in das Raumwinkelelement $d\boldsymbol{\Omega}_s' = \sin\Psi\cdot d\Psi\, d\Phi = -d\cos\Psi\cdot d\Phi$ um die Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega}_s' = \boldsymbol{V}'/|\boldsymbol{V}'|$ auftritt, analog zu (II.1.21)

$$w(\boldsymbol{\Omega}_s \to \boldsymbol{\Omega}_s')\, d\boldsymbol{\Omega}_s' = \frac{d\boldsymbol{\Omega}_s'}{\int\limits_{\Omega'} d\boldsymbol{\Omega}_s'} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}_s'}{4\pi}. \tag{1.15}$$

Da die Streuwahrscheinlichkeit $w(\boldsymbol{\Omega}_s \to \boldsymbol{\Omega}_s{}')\, d\boldsymbol{\Omega}_s{}'$ nicht vom Drehwinkel Φ der Streuebene, sondern lediglich vom Streuwinkel Ψ zwischen $\boldsymbol{\Omega}_s{}'$ und $\boldsymbol{\Omega}_s$ bzw. von $\cos\Psi = \boldsymbol{\Omega}_s{}' \cdot \boldsymbol{\Omega}_s$ abhängt, fassen wir durch Integration über Φ alle Beiträge mit gleichem $\cos\Psi$ zusammen, und erhalten als Verteilungsfunktion für $\cos\Psi$:

$$w(\cos\Psi)\, d\cos\Psi = \int_{\Phi=0}^{2\pi} w(\boldsymbol{\Omega}_s \to \boldsymbol{\Omega}_s{}')\, d\cos\Psi\, d\Phi = \frac{d\cos\Psi}{2}. \tag{1.16}$$

Selbstverständlich muß das Neutron unter irgendeinem Streuwinkel im Bereich $-1 \leq \cos\Psi \leq +1$ gestreut werden, d. h. es ist

$$\int_{-1}^{+1} w(\cos\Psi)\, d\cos\Psi = 1. \tag{1.17}$$

Der mittlere Kosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem ist gegeben durch

$$\overline{\cos\Psi} = \frac{\int_{-1}^{+1} \cos\Psi\, w(\cos\Psi)\, d\cos\Psi}{\int_{-1}^{+1} w(\cos\Psi)\, d\cos\Psi}. \tag{1.18}$$

Die mittlere Energie nach dem Stoß ist hiermit berechenbar:

$$\overline{E'} = E\left\{1 - \frac{2A}{(A+1)^2}(1 - \overline{\cos\Psi})\right\}. \tag{1.19}$$

Oft spricht man auch von mittlerem Energieverlust $\overline{\Delta E}$, definiert durch

$$\overline{\Delta E} = E - \overline{E'} = E \cdot \frac{2A}{(A+1)^2}(1 - \overline{\cos\Psi}). \tag{1.20}$$

Für isotrope Streuung, d. h. mit $w(\cos\Psi)$ nach (1.16), wird

$$\overline{\cos\Psi} = 0. \tag{1.21}$$

Man erhält damit aus (1.19–21) als Spezialfall

$$\overline{E'} = E\left\{1 - \frac{2A}{(A+1)^2}\right\} = E \cdot \frac{1}{2}(1 + \alpha), \tag{1.22}$$

$$\overline{\Delta E} = E \cdot \frac{2A}{(A+1)^2} = E \cdot \frac{1}{2}(1 - \alpha). \tag{1.23}$$

Berechnet man $\overline{\Delta E}$ für anisotrope Streuung im Schwerpunktsystem mit bevorzugter Vorwärtsstreuung, also Bevorzugung kleiner Streuwinkel Ψ, die bei allen Kernen im MeV-Bereich auftritt, so wird $\overline{\cos \Psi} > 0$ und damit der mittlere Energieverlust $\overline{\Delta E}$ für bevorzugte Vorwärtsstreuung kleiner als $\overline{\Delta E}$ für isotrope Streuung. Die Moderationseigenschaften eines Stoffes werden also mit zunehmender Vorwärtsstreuung schlechter. Beim Deuteron tritt zwischen 50 keV und 2 MeV eine Bevorzugung der Rückwärtsstreuung auf.

Tab. 1.2: Maximale und mittlere Energieverluste sowie mittlere Streuwinkel bei isotroper Streuung eines Neutrons an einem Kern der Masse A.

Elemente	A	$1-\alpha = \Delta E_{max}/E$	$\frac{1}{2}(1-\alpha) = \overline{\Delta E}/E$	$\overline{\cos \psi}$	ψ_{Mittel}	ξ	n
H	1	1,0	0,500	0,667	48°	1	18
D	2	0,889	0,445	0,333	70°30′	0,7261	25
Be	9	0,360	0,180	0,074	86°	0,2078	86
C	12	0,284	0,142	0,056	87°	0,1589	114
O	16	0,221	0,110	0,042	87°30′	0,1209	150
U	238	0,0167	0,0083	0,0028	89°50′	0,0084	2172
div.	groß	$4/(A+2)$	$2/(A+2)$	$2/(3A)$	—	$2/(A+2/3)$	$9A+6$

Aus Formel (1.12) ergibt sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Kosinus des Streuwinkels Ψ im Schwerpunktsystem und der Energie E' des Neutrons nach dem Stoß, diese gemessen im Laborsystem. Daher läßt sich bei Kenntnis der Verteilungsfunktion $w(\cos \Psi)$ für den Kosinus des Streuwinkels die zugehörige Verteilungsfunktion für die Energie nach dem Stoß angeben. Die Wahrscheinlichkeit, ein Neutron nach dem Stoß mit einer Energie zwischen E' und $E' + \mathrm{d}E'$ anzutreffen, ist definiert durch

$$w(E \to E')\ \mathrm{d}E' = w(\cos\Psi)\ \frac{\mathrm{d}\cos\Psi}{\mathrm{d}E'}\ \mathrm{d}E'\ . \tag{1.24}$$

Aus (1.12) folgt

$$\frac{\mathrm{d}\cos\Psi}{\mathrm{d}E'} = \frac{2}{(1-\alpha)\,E}\,, \tag{1.25}$$

und wir erhalten

$$w(E \to E')\,\mathrm{d}E' = w(\cos\Psi)\,\frac{2}{(1-\alpha)\,E}\,\mathrm{d}E'. \tag{1.26}$$

Im Falle isotroper Streuung im Schwerpunktsystem erhalten wir mit (1.14, 16) die Energieverteilung

$$w(E \to E')\,\mathrm{d}\,E' = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}E'}{(1-\alpha)\,E} = \dfrac{\mathrm{d}E'}{E'_{\max} - E'_{\min}} & \alpha E \leq E' \leq E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.27}$$

An dieser Formel ist bemerkenswert, daß das Verteilungsgesetz unabhängig von der Endenergie E' des Neutrons ist und nur von der Ausgangsenergie und der Materialkonstanten α abhängt. Die Endenergie liegt mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem Energieintervall $\mathrm{d}E'$ zwischen maximaler und minimaler Energie nach dem Stoß. Integriert man $w(E \to E')$ über den gesamten Energiebereich, so erhält man naturgemäß 1:

$$\int\limits_{\alpha E}^{E} w(E \to E')\,\mathrm{d}\,E' = \int\limits_{\alpha E}^{E} \frac{1}{(1-\alpha)E}\,\mathrm{d}E' = 1\,. \tag{1.28}$$

Den Ausdruck $\dfrac{1}{(1-\alpha)E}$ bezeichnet man als den Kern der elastischen Streuung.

Die Berechnung des Ablenkungswinkels ψ im Laborsystem erfolgt an Hand der Abb. 1.3 durch

$$v'\cos\psi = V_{\mathrm{A}} + V'\cos\Psi, \tag{1.29}$$

$$= \frac{v}{A+1} + \frac{v}{1+A^{-1}}\cos\Psi,$$

gemäß (1.1–2, 6). Elimination von v' mit (1.9) ergibt

$$\cos\psi = \frac{A\cos\Psi + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\Psi + 1}}. \tag{1.30}$$

Die Elimination von $\cos\Psi$ aus (1.29) mit (1.10) ergibt

$$\cos\psi = \frac{A+1}{2}\sqrt{\frac{E'}{E}} - \frac{A-1}{2}\sqrt{\frac{E}{E'}}. \tag{1.31}$$

Man sieht aus (1.30), daß auch bei isotroper Streuung im Schwerpunktsystem die Winkelverteilung im Laborsystem anisotrop wird. Nur für $A \gg 1$ geht $\cos\psi \to \cos\Psi$, und nur in diesem Fall bedingt isotrope Streuung im Schwerpunktsystem eine nahezu isotrope Streuung im Laborsystem.

Die Verteilungsfunktion für $\cos\psi$ im Laborsystem läßt sich aus der Verteilungsfunktion für $\cos\Psi$ im Schwerpunktsystem wie folgt gewinnen

$$w(\cos\psi)\,\mathrm{d}\cos\psi = w(\cos\Psi)\frac{\mathrm{d}\cos\Psi}{\mathrm{d}\cos\psi}\,\mathrm{d}\cos\psi. \tag{1.32}$$

Dabei gilt nach (1.30)

$$\frac{\mathrm{d}\cos\Psi}{\mathrm{d}\cos\psi} = \frac{(1 + A^2 + 2A\cos\Psi)^{3/2}}{A^2\,(A + \cos\Psi)} \tag{1.33}$$

und für isotrope Streuung im Schwerpunktsystem nach (1.16)

$$w(\cos\Psi) = \frac{1}{2}. \tag{1.34}$$

Der mittlere Kosinus des Streuwinkels im Laborsystem – die übliche Bezeichnung ist $\bar{\mu}$ – ergibt sich mit (1.30, 34) zu

$$\overline{\cos\psi} = \int_{-1}^{+1} \frac{A\cos\Psi + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\Psi + 1}}\,w(\cos\Psi)\,\mathrm{d}\cos\Psi = \frac{2}{3A}. \tag{1.35}$$

Bei großem A ist $\overline{\cos\psi}$ sehr klein. Das bedeutet bei isotroper Streuung im Schwerpunktsystem auch annähernd isotrope Streuung im Laborsystem. Neutronen werden also bei Stößen gegen

schwere Kerne ebenso oft rückwärts wie vorwärts gestreut. Im Falle des Wasserstoffs ist $\overline{\cos \psi} = 2/3$, d. h. die Streuung ist im Beobachtersystem bevorzugt vorwärts gerichtet.

1.2. Mittlerer Energieverlust bei einer Folge von Stößen

Die Kenntnis des Energieverlustes, den ein Neutron im Mittel bei einem Stoß erleidet, ist oft nicht ausreichend, da das Neutron im Reaktor i. a. viele Stöße bis zu einem markanten Ereignis macht, und der mittlere Energieverlust nach einer Vielzahl von Stößen nicht elementar auf den mittleren Energieverlust beim Einzelstoß zurückzuführen ist. Wir zeigen dies im folgenden und berechnen gleichzeitig einen passenden Ersatzausdruck.

Möge bei dem ersten Streuakt ein Ablenkungs-Winkel Ψ' (im Schwerpunktsystem) vorkommen, bei dem zweiten ein Winkel Ψ'', so ist die verbleibende Energie nach zwei Stößen nach (1.12)

$$E'' = E \cdot \frac{1}{2}\left\{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos \Psi'\right\} \frac{1}{2}\left\{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos \Psi''\right\}, \tag{1.36}$$

nach n Stößen

$$E^{(n)} = E \cdot \frac{1}{2}\left\{\Psi'\right\} \frac{1}{2}\left\{\Psi''\right\} \cdots \frac{1}{2}\left\{\Psi^{(n)}\right\}. \tag{1.37}$$

Zur Abkürzung wurde eingeführt:

$$\left\{\Psi^{(i)}\right\} = \left\{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos \Psi^{(i)}\right\}.$$

Wir fragen nach dem Zahlenwert von $E^{(n)}$. Wären alle Streuwinkel gleich und bekannt, so wäre diese Zahl leicht zu berechnen. Sie sind jedoch nicht gleich und im einzelnen unbekannt. Wir müssen uns daher mit der Berechnung einer mittleren Energie nach n Stößen oder umgekehrt einer mittleren Stoßzahl, die zu einem vorgegebenen Energieverlust gehört, begnügen. Da der Mittelwert eines Produkts nicht gleich dem Produkt aus den Mittelwerten der einzelnen Faktoren ist, kommen wir bei der Mittelung von (1.37) zunächst nicht weiter. Wir logarithmieren daher (1.37). Im Interesse einer bequemen Schreibweise führen wir die Abkürzung

$$\frac{1}{2}\left\{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos \Psi^{(i)}\right\} = e^{-\xi^{(i)}} \tag{1.38}$$

ein. Damit lautet die logarithmierte Gl. (1.37)

$$\ln \frac{E^{(n)}}{E} = -\left(\xi' + \xi'' + \ldots + \xi^{(n)}\right). \tag{1.39}$$

Wenn wir jetzt mitteln, so entstehen auf der rechten Seite n gleiche Summanden, sofern die Verteilungsfunktion für $\cos \Psi$ (s. Abschn. 1.1) im Energiebereich $E \ldots E^{(n)}$ energieunabhängig ist:

$$\overline{\ln \frac{E^{(n)}}{E}} = -n\,\xi, \quad \xi = \overline{\xi^{(i)}}. \tag{1.40}$$

ξ heißt das mittlere logarithmische Energiedekrement oder der mittlere logarithmische Energieverlust.

Es gilt jetzt, den Wert von ξ zu berechnen. Nach (1.40) ist

$$\xi = \overline{\xi^{(i)}} = -\overline{\ln \frac{E^{(i+1)}}{E^{(i)}}} = \overline{\ln \frac{E}{E'}}. \tag{1.41}$$

Dabei hat man sich die Mittelung entweder über die Gesamtheit der i Stöße, oder bei einem Stoß über alle möglichen Streuwinkel entsprechend deren Häufigkeitsverteilung ausgeführt zu denken. Anstelle der Mittelung über die Streuwinkel kann auch die Mittelung über die Energie nach dem Stoß treten, da diese mit dem Streuwinkel nach (1.12) eindeutig zusammenhängt. Nach der letztgenannten Auffassung ist

$$\xi = \frac{\int\limits_{\alpha E}^{E} \ln \frac{E}{E'}\, w\,(E \to E')\, \mathrm{d}E'}{\int\limits_{\alpha E}^{E} w\,(E \to E')\, \mathrm{d}E'}, \tag{1.42}$$

wobei die Integrationsgrenzen nach (1.14) eingesetzt sind, und $w(E \to E')\,\mathrm{d}E'$ die Wahrscheinlichkeit ist, mit der die Energie nach dem Stoß im Intervall $\mathrm{d}E'$ bei E' liegt. Mit (1.27–28) folgt für isotrope Streuung im Schwerpunktsystem

$$\xi = \int\limits_{\alpha E}^{E} \ln \frac{E}{E'} \cdot \frac{\mathrm{d}E'}{E\,(1-\alpha)}. \tag{1.43}$$

Wir substituieren $\ln \frac{E}{E'} = u'$ und erhalten mit $du' = -\frac{dE'}{E'}$

$$\xi = -\frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{-\ln\alpha}^{0} u' \, e^{-u'} \, du' = -\frac{1}{1-\alpha} \left[e^{-u'} (-u' - 1) \right]_{-\ln\alpha}^{0}$$

$$= 1 + \frac{\alpha \cdot \ln\alpha}{1-\alpha}. \tag{1.44}$$

ξ ist nur von der Massenzahl A abhängig. Für $A > 2$ gilt folgende Näherungsformel:

$$\xi \approx \frac{2}{A + \frac{2}{3}}. \tag{1.45}$$

Der Fehler beträgt bei $A = 2$ nur 3,3 %. In der Tab. 1.2 sind die Zahlenwerte von ξ für das häufigste Isotop verschiedener leichter Elemente angeführt.

Mit den Zahlen ξ können wir die mittlere Stoßzahl n berechnen, die nötig ist, um ein Neutron von einer Energie E_0 auf eine Energie $E^{(n)}$ abzubremsen. Denn es ist nach (1.40)

$$n = -\frac{1}{\xi} \ln \frac{E^{(n)}}{E_0}. \tag{1.46}$$

Im Gegensatz zu (1.39) ist hier $E^{(n)}$ als feste Zahl verstanden, während n die mittlere statt die exakte Stoßzahl ist. Die Zahlen n, die für Abbremsung eines Neutrons von der mittleren Spaltenergie $E_0 = 2$ MeV bis auf die thermische Energie $E_{th} = kT_0 = 0{,}0253$ eV nötig sind, sind gleichfalls in Tab. 1.2 angegeben.

1.3. Einführung der Lethargie

Die bei der Integration von (1.43) verwendete Variable u' ist für viele Darstellungen in der Bremstheorie sehr zweckmäßig. Wir führen daher anstelle der Energie E eine neue Variable u, die Lethargie, ein:

$$u = \ln \frac{E_0}{E}. \tag{1.47}$$

E_0 ist eine feste obere Bezugsenergie. Damit schreibt sich die Stoßzahl (1.46) sehr einfach

$$n = \frac{u}{\xi}. \tag{1.48}$$

Das heißt: bis zur Abbremsung auf die Lethargie u sind u/ξ Stöße notwendig. Die Umkehrung der Funktion (1.47) ergibt

$$E = E_0 \cdot e^{-u}. \tag{1.49}$$

Man sieht daraus, daß u mit abnehmender Energie zunimmt; daher die Bezeichnung Lethargie. Es ist günstig, E_0 gleich der höchsten vorkommenden Neutronenenergie zu setzen. Sofern man das Spaltspektrum berücksichtigt, wäre $E_0 = 10$ MeV zu setzen; wenn man dagegen nur mit einem Mittelwert der Energie der Spaltneutronen rechnet, ist $E_0 = 2$ MeV. Ein Neutron der Energie E_0 hat die Lethargie Null. Neutronen geringerer Energie erhalten positive Lethargiewerte. Die Lethargie eines Neutrons mit thermischer Energie (0,0253 eV) ist 18 bezogen auf $E_0 = 2$ MeV. Der Energie 0 entspricht $u = \infty$.

Bisher haben wir den Stoßprozeß eines einzelnen Neutrons bei gegebener Energie betrachtet. Im folgenden Abschnitt werden wir die Stöße vieler Neutronen verschiedener Energie betrachten. Dazu definieren wir die Neutronendichte $n(\boldsymbol{r}, E, t)\, dE$. Sie gibt die Zahl der Neutronen mit Energien zwischen E und $E + dE$ im cm^3 zur Zeit t an. Die Gesamtzahl der Neutronen im cm^3 ist

$$n(\boldsymbol{r}, t) = \int_0^\infty n(\boldsymbol{r}, E, t)\, dE. \tag{1.50}$$

Analog kann man die Definitionen (II. 1.14) für die Neutronenflußdichte Φ und (II. 1.1a) für die Stoßratendichte F auf eine energieabhängige (differentielle) und energieunabhängige (integrale) Formulierung beziehen, zwischen denen die Beziehung

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \int_0^\infty \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, dE, \tag{1.51}$$

$$F(\boldsymbol{r}, t) = \int_0^\infty F(\boldsymbol{r}, E, t)\, dE \tag{1.52}$$

besteht. Für stationäre Vorgänge entfällt natürlich die Zeitabhängigkeit. Entsprechendes gilt für die Ortskoordinate. Man be-

achte, daß die Dimensionen der differentiellen Größen nicht identisch mit denen der integralen Größen sind. Sie unterscheiden sich um die Dimension der Energie.

Die Umrechnung der auf ein bestimmtes Energieintervall bezogenen Größen, wie energieabhängige Neutronendichte $n(E)$, Neutronenflußdichte $\Phi(E)$, Stoßratendichte $F(E)$ auf lethargieabhängige Größen erfolgt nach dem Schema

$$f(u)\,\mathrm{d}u = -f(E)\,\mathrm{d}E = -f(E)\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u. \tag{1.53}$$

Das Minuszeichen steht, weil die Vorzeichen von $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}E$ verschieden sind.

Da nach (1.47)

$$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}E}{E}, \tag{1.54}$$

folgt

$$f(u) = E \cdot f(E). \tag{1.55}$$

Also gilt speziell für die Neutronendichte

$$n(u) = E \cdot n(E), \tag{1.56}$$

die Flußdichte

$$\Phi(u) = E \cdot \Phi(E), \tag{1.57}$$

und die Stoßratendichte

$$F(u) = E \cdot F(E) = E \cdot \Sigma_{\mathrm{T}}(E) \cdot \Phi(E). \tag{1.58}$$

Aufgaben

1.1. Wie müssen die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit eines Neutrons und eines Protons lauten, damit beim Stoß Labor- und Schwerpunktsystem zusammenfallen?

1.2. Man zeige, daß das Verhältnis von maximalem Energieverlust und Einschußenergie des Neutrons beim elastischen Einzelstoß für $A \gg 1$

$$\frac{\Delta E_{\max}}{E} \approx \frac{4}{A} + \dots$$

ist. Wie groß ist der Fehler bei dieser Relation?

1.3. Man beweise ausgehend von $\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$, daß für $A \gg 1$ die Beziehung (1.45) gilt.

1.4. Berechne die Länge des Zickzackweges, den ein Neutron in Graphit zurücklegt, bis es von $2 \cdot 10^6$ eV auf 0,0253 eV abgebremst ist. Man entnehme den Wirkungsquerschnitt aus Abb. II. 3.12.

1.5. Man berechne die Winkelverteilung für die Streuung eines Neutrons a) an einem Proton, b) an einem Urankern für das Laborsystem, wenn die Streuung im Schwerpunktsystem isotrop ist.

1.6. Man berechne den mittleren logarithmischen Energieverlust für eine Mischung aus verschiedenen streuenden Nukliden.

1.7. Berechne die Zahl der Stöße, die ein Neutron in H_2O, D_2O und BeO im Mittel erleidet, bis es von $2 \cdot 10^6$ eV auf 0,0253 eV abgebremst ist. Man rechne mit den (konstanten) Streuquerschnittswerten des Plateaubereichs (vgl. Abb. II.2.1. für H). $\sigma_n^H = 20$ b, $\sigma_n^D = 3{,}4$ b, $\sigma_n^{Be} = 6$ b, $\sigma_n^O = 3{,}8$ b. Man diskutiere qualitativ, wie sich die Streuresonanzen des Sauerstoffes, die bei 0,3 MeV beginnen, und der Abfall des Wasserstoffstreuquerschnitts auf die Zahl der Stöße auswirkt.

1.8. Man berechne in Erweiterung von Gl. (1.10) die Energie des Neutrons nach dem Stoß bei unelastischer Streuung (Anregungsenergie Q). Man diskutiere diese Formel für eine Energie E, die wenig größer als $Q\ (1 + A)/A$ ist.

2. Neutronenspektren und Stoßratendichten im Bremsbereich

Die Energieverteilung der Bremsneutronen, das sog. Bremsspektrum, ist für die Berechnung eines Reaktors von grundlegender Bedeutung. Da die Wirkungsquerschnitte, vor allem die Einfang- und Spaltquerschnitte, energieabhängig sind, ist das Schicksal der Neutronen und die Entwicklung der Kettenreaktion nur zu erfassen, wenn die Häufigkeitsverteilung über die Energie bekannt ist. Umgekehrt beeinflußt die energieabhängige Absorption die Verteilung.

Das Bremsmedium denken wir uns in diesem Kapitel so weit ausgedehnt, daß jedes Volumelement als gleichberechtigt angesehen werden kann (Bremsung im „unendlich ausgedehnten" Medium). Die Neutronenquelle, repräsentiert durch Kernspaltungen, sei homogen über den Raum verteilt. Sie möge Q_0 Neutronen je cm^3 und s emittieren. Die Energieverteilung ist durch das Spaltspektrum (I. 3.18) beschrieben.

2.1. Aufstellung der Bremsgleichung

Wir gewinnen die Energieverteilung der Neutronen aus der Lösung der sog. Bremsgleichung, die eine Bilanzgleichung zwischen den in ein Energieintervall eingestreuten und den im Energieintervall durch Absorption und Streuung verlorengehenden Neutronen ist.

Verluste: Die Zahl der Neutronen, die aus dem Energieintervall dE bei E durch Streuung oder Absorption entfernt werden, ist je cm^3 und s

$$\left(\Sigma_S(E) + \Sigma_A(E)\right) \Phi(E)\, dE \equiv \Sigma_T(E)\, \Phi(E)\, dE. \tag{2.1}$$

Gewinne: 1. Die Zahl der Quellneutronen in dE ist

$$Q(E)\, dE = Q_0 \cdot \chi(E)\, dE. \tag{2.2}$$

2. Die Zahl der Neutronen, die durch Streuung von höheren Energien nach dE bei E gelangen, ist

$$\int\limits_{E'=E}^{\infty} \Sigma_S(E' \to E)\, \Phi(E')\, dE'. \tag{2.3}$$

Hierbei können verschiedene streuende Kerne im Spiele sein. Bei stationärem Betrieb müssen die Quellen (2.2) und (2.3) durch die Verluste (2.1) kompensiert werden. Also lautet die Bremsgleichung

$$\Sigma_T(E)\, \Phi(E) = Q(E) + \int\limits_{E'} \Sigma_S(E' \to E)\, \Phi(E')\, dE'. \tag{2.4}$$

Die Größe $\Sigma_S(E' \to E) = \Sigma_S(E')\, w(E' \to E)$ bezeichnen wir als Übergangsquerschnitt. Beschränken wir uns auf isotrope elastische Streuung*, so ist $w(E' \to E)\, dE$ aus Gl. (1.27) für den streuenden Kern m $(\Sigma_n(E) \to \Sigma_n^m(E))$ zu entnehmen:

$$w^m(E' \to E)\, dE = \begin{cases} \dfrac{dE}{E'(1 - \alpha^m)} & \text{für } E \le E' \le E/\alpha^m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Für die Gesamtheit der elastischen Streuung in (2.3) gilt

$$\Sigma_n(E')\, w(E' \to E) = \sum_m \Sigma_n^m(E')\, w^m(E' \to E)\,. \tag{2.6}$$

Zunächst beschränken wir uns jedoch einfachheitshalber auf e i n e Kernsorte. Anstelle von (2.4) gilt dann für isotrope elastische Streuung die Bilanzgleichung

$$\Sigma_T(E)\, \Phi(E) = Q(E) + \frac{1}{1 - \alpha^m} \int\limits_{E'=E}^{E/\alpha^m} \Sigma_n^m(E')\, \Phi(E')\, \frac{dE'}{E'}. \tag{2.7}$$

* Die nichtisotrope elastische und die unelastische Streuung soll hier im Interesse einer geschlossenen Darstellung zunächst vernachlässigt werden.

Es ist günstig, in (2.7) zwei Substitutionen vorzunehmen. Als erstes führen wir die Stoßratendichte $F(E) = \Sigma_T(E)\,\Phi(E)$ (s. Gl. (II. 1.1a)) ein. Damit entsteht:

$$F(E) = Q(E) + \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_{E'=E}^{E/\alpha^m} \frac{\Sigma_n^m(E')}{\Sigma_T(E')}\, F(E')\, \frac{dE'}{E'}. \tag{2.8}$$

Als zweites ersetzen wir die Energie durch die Lethargie gemäß (1.47, 49). Das gibt die übliche Form der Bremsgleichung für einen einzelnen Streuer m

$$F(u) = Q(u) + \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} \frac{\Sigma_n^m(u')}{\Sigma_T(u')}\, F(u')\, e^{u'-u}\, du'. \tag{2.9}$$

Liegt ein Gemisch von elastisch streuenden Kernen vor, so ist über die Einstreuung von den verschiedenen Kernen zu summieren, also

$$F(u) = Q(u) + \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} \frac{\Sigma_n^m(u')}{\Sigma_T(u')}\, F(u')\, e^{u'-u}\, du'. \tag{2.9a}$$

Man beachte, daß $\ln\alpha^m$ wegen $\alpha^m < 1$ negativ ist.

Von dieser Integralgleichung kann man durch Differentiation nach u eine Differenzen-Differentialgleichung gewinnen. Sie ist vor allem für numerische Rechnungen gut geeignet. Wir unterdrücken zunächst den Quellbeitrag und erhalten:

$$\frac{dF(u)}{du} = \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \left[\frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) - \frac{\alpha^m\, \Sigma_n^m(u+\ln\alpha^m)}{\Sigma_T(u+\ln\alpha^m)}\, F(u+\ln\alpha^m)\right]$$
$$- \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} \frac{\Sigma_n^m(u')}{\Sigma_T(u')}\, F(u')\, e^{u'-u}\, du'. \tag{2.10}$$

Das Integral in (2.10) wird in (2.9a) eingesetzt. Man erhält nach einer kleinen Zwischenrechnung

$$\frac{dF(u)}{du} = \sum_m \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m} \left[\frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) - \frac{\Sigma_n^m(u+\ln\alpha^m)}{\Sigma_T(u+\ln\alpha^m)}\, F(u+\ln\alpha^m)\right]$$
$$- \frac{\Sigma_A(u)}{\Sigma_T(u)} \cdot F(u). \tag{2.11}$$

Mit Quellbeitrag lautet die differenzierte Bremsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = Q(u) + \frac{\mathrm{d}Q(u)}{\mathrm{d}u} - \frac{\Sigma_A(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) + \tag{2.12}$$

$$+ \sum_m \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m} \left[\frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) - \frac{\Sigma_n^m(u+\ln\alpha^m)}{\Sigma_T(u+\ln\alpha^m)} F(u+\ln\alpha^m) \right].$$

Die Gl. (2.9) oder (2.12) werden bei den im Reaktor vorliegenden Gemischen von Nukliden im allgemeinen numerisch gelöst werden müssen. Dabei schreitet man in Intervallen von $u = 0$ beginnend vorwärts. Die Intervallgröße ist durch die Variation der Wirkungsquerschnitte bestimmt. Sie muß klein an den Resonanzstellen der Kerne sein.

2.2. Analytische Lösung der Bremsgleichung in Spezialfällen

2.2.1. Bremsgleichung und Stoßratendichte bei Bremsung in einatomigen Stoffen, insbesondere Wasserstoff

a) Neutronenbremsung in Wasserstoff ($A = 1$)

Ein sehr einfaches Bremsspektrum ergibt sich für den Fall, daß die Bremsung nur durch ein Element erfolgt. Unter diesen nimmt Wasserstoff eine bevorzugte Stellung ein. Wasserstoff ist für die Neutronenbremsung in Kernreaktoren von großer Bedeutung. Die Theorie wird bei reinem Wasserstoff besonders einfach, da die Integralgleichung (2.9) in diesem Falle exakt auf eine Differentialgleichung statt auf die Differenzen-Differentialgleichung (2.12) zu reduzieren ist.

Lösung mit monoenergetischer Quelle. Wir vernachlässigen zunächst die Energieverteilung der Spaltneutronen und setzen an deren Stelle eine monoenergetische Quelle bei $E_0 = 2$ MeV. Den korrespondierenden Wert der Lethargieskala bezeichnen wir mit u_0. Der Nullpunkt liege bei 10 MeV. Die Quelldichte $Q(u)$ ist bei dieser Festlegung für alle $u \neq u_0$ Null. Mit $\alpha^m = \alpha^H = 0$ vereinfacht sich (2.12) zu

$$\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = -\frac{\Sigma_A(u)}{\Sigma_T(u)} \cdot F(u), \text{ für } u > u_0. \tag{2.13}$$

Die Lösung läßt sich sofort angeben:

$$F(u) = F_0 \cdot e^{-\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')} du'}, \text{ für } u > u_0. \qquad (2.14)$$

Die Konstante F_0 bestimmen wir am Ende dieses Abschnitts, s. Gl. (2.21a). Die Exponentialfunktion bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß das Neutron bis zur Abbremsung auf u nicht absorbiert wird, und heißt Bremsnutzung $p(u_0 \to u)$. Die Lösung der Bremsgleichung ist also auf eine Integration über die Wirkungsquerschnitte zurückgeführt. In (2.14) ist

$$p(u_0 \to u) = e^{-\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')} du'} = e^{-\int\limits_{E}^{E_0} \frac{\Sigma_A(E')}{\Sigma_T(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}}, \qquad (2.15)$$

gültig für Wasserstoff.

Lösung mit spektraler Energieverteilung der Quellneutronen. Benötigt man die Stoßratendichte im Bereich der Quellneutronen, so gilt statt (2.13)

$$\frac{dF(u)}{du} = -\frac{\Sigma_A(u)}{\Sigma_T(u)} \cdot F(u) + Q(u) + \frac{dQ(u)}{du}. \qquad (2.16)$$

Die Lösung des homogenen Teils der Gleichung (2.16) lautet

$$F_{hom}(u) = e^{-\int\limits_{0}^{u} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''}.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich damit zu

$$F(u) = \int\limits_{u'=0}^{u} \left[Q(u') + \frac{dQ(u')}{du'}\right] e^{-\int\limits_{u'}^{u} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''} du'$$

$$= Q(u) + \int\limits_{u'=0}^{u} \frac{\Sigma_n(u')}{\Sigma_T(u')} Q(u') \cdot e^{-\int\limits_{u'}^{u} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''} du'. \qquad (2.17)$$

Die zweite Zeile ergibt sich durch partielle Integration mit $Q(0) = 0$.

Durch Einführung von $p(u' \to u)$ nach (2.15) erhält man

$$F(u) = Q(u) + \int_{u'=0}^{u} \frac{\Sigma_n(u')}{\Sigma_T(u')} Q(u')\, p(u' \to u)\, du'. \qquad (2.18)$$

Die Stoßzahldichte an der Stelle u setzt sich demnach zusammen aus einem Beitrag der Quelle an der Stelle u und einem Beitrag von Quellneutronen mit Lethargien u' unterhalb u (d. h. Energien oberhalb E), die durch Stöße nach u kommen. In der Lösung ist die Abnahme durch Absorptionen während des Bremsprozesses berücksichtigt.

In thermischen Reaktoren ist insbesondere die Resonanzabsorption mit der Lösung (2.18) zu berechnen. Im Energiebereich der Resonanzen ist die Neutronenquelle 0. Ist u_Q die obere Grenze des Spaltspektrums, so wird

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^{u_Q} \frac{\Sigma_n(u')}{\Sigma_T(u')} Q(u') \cdot e^{-\int_{u'}^{u_Q} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''} \cdot e^{-\int_{u_Q}^{u} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''} du' \\ &= F_0' \, e^{-\int_{u_Q}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')} du'}, \quad \text{für } u > u_Q, \end{aligned} \qquad (2.19)$$

wobei

$$F_0' = \int_0^{u_Q} \frac{\Sigma_n(u')}{\Sigma_T(u')} Q(u') \cdot e^{-\int_{u'}^{u_Q} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')} du''} du'$$

die Zahl der Neutronen ist, die die Quelle liefert und die unter Berücksichtigung der Absorptionen im Quellbereich an dessen Rand u_Q gelangen. Die Lösung (2.19) hat die Form von (2.14), die für eine monoenergetische Quelle gilt.

Mit Hilfe der δ-Funktion* können wir die Lösung (2.17) für eine kontinuierliche Quellverteilung auf die Lösung für eine monoenergetische Quelle bei $u = u_0$

$$Q(u) = Q_0 \cdot \delta(u - u_0) \qquad (2.20)$$

* Die δ-Funktion ist in allen Punkten Null, mit Ausnahme des singulären Punktes u_0, wo sie unendlich wird, und zwar so, daß $\int \delta(u - u_0) du = 1$. Es gilt ferner:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \delta(u - u_0)\, du = f(u_0). \qquad (2.20\text{ a})$$

spezialisieren. Für $u \leq u_0$ existiert noch kein Beitrag von gestreuten Neutronen. Das Integral in (2.17) verschwindet, und es gilt

$$F(u) = Q_0 \cdot \delta(u - u_0), \text{ für } u = u_0. \tag{2.21}$$

Für $u > u_0$ verschwindet dagegen der direkte Beitrag von der Quelle, so daß mit (2.20a) gilt

$$F(u) = \frac{\Sigma_n(u_0)}{\Sigma_T(u_0)} \cdot Q_0 \cdot e^{-\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')} du'}, \text{ für } u > u_0. \tag{2.21a}$$

Die Konstante F_0 in (2.14) lautet danach $F_0 = \frac{\Sigma_n(u_0)}{\Sigma_T(u_0)} \cdot Q_0$.

Für die Bremsung im Bereich $u > u_0$ steht nämlich nur noch der Bruchteil $\Sigma_n(u_0)/\Sigma_T(u_0)$ der Quellneutronen zur Verfügung, da der Bruchteil $\Sigma_A(u_0)/\Sigma_T(u_0)$ bereits beim ersten Stoß (mit $u = u_0$) absorbiert wurde.

Wenn die Absorption im Lethargiebereich von u_0 bis u verschwindet, erhält man

$$F(u) = Q_0 = \text{const}, \qquad \Phi(u) = \frac{Q_0}{\Sigma_T(u)}. \tag{2.22}$$

F_0 ist dann bei Wasserstoff gleich der Stärke Q_0 der monoenergetischen Quelle:

$$F_0 = Q_0. \tag{2.22a}$$

Rechnet man mit (1.55) auf die Energieskala um, so ergibt sich

$$F(E) = \frac{Q_0}{E}, \qquad \Phi(E) = \frac{Q_0}{E \cdot \Sigma_T(E)}. \tag{2.23}$$

Die Energieverteilung der Stoßratendichten bei Wasserstoff folgt also einem $1/E$-Gesetz. Wie wir gleich sehen werden, gilt dieses Gesetz näherungsweise auch für andere Moderatoren. Sofern der totale Wirkungsquerschnitt Σ_T sich nur schwach mit der Energie verändert, folgt auch $\Phi(E) = F(E)/\Sigma_T(E)$ näherungsweise dem $1/E$-Gesetz. In der Lethargieskala sind Stoßratendichte und Flußdichte näherungsweise konstant.

b) Neutronenbremsung in Moderatoren mit $A > 1$

Für eine Substanz mit $A > 1$ ist von (2.12) auszugehen. Um den wesentlichen Unterschied zum Wasserstoff zu zeigen, postulieren wir $\Sigma_A = 0$. Dann ist bei einer kontinuierlichen Quelle die Gleichung

$$\frac{dF(u)}{du} = Q(u) + \frac{dQ(u)}{du} + \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m}[F(u) - F(u + \ln \alpha^m)]. \quad (2.24)$$

zu lösen.

Liegt u im ersten Stoßintervall der energiereichsten Neutronen, d. h. $0 < u < -\ln \alpha^m$, so ist das Integral in (2.9) von 0 bis u zu erstrecken. Demzufolge entfällt in Gl. (2.12, 24) der Therm mit $F(u + \ln \alpha^m)$. Die Lösung von (2.24) im ersten Stoßintervall ist analog zu (2.17)

$$F(u) = Q(u) + \frac{1}{1-\alpha^m} \int_0^u Q(u') \cdot e^{\frac{\alpha^m}{1-\alpha^m} \cdot (u-u')} \, du'. \quad (2.25)$$

Bei einer monoenergetischen Quelle, s. (2.20), gilt für $u > u_0$

$$F(u) = \frac{Q_0}{1-\alpha^m} \cdot e^{\frac{\alpha^m}{1-\alpha^m}(u-u_0)}. \quad (2.26)$$

Man sieht, daß die Stoßratendichte nur für Wasserstoff ($\alpha^m = 0$) abgesehen vom Absorptionsterm konstant ist. Für alle anderen Kerne verläuft sie um so steiler, je größer A ist. Einer praktischen Auswirkung des steilen Verlaufs steht allerdings die Größe des Stoßintervalls entgegen, das mit wachsendem A kleiner wird.

Liegt u im 2. Intervall, also $u_0 - \ln \alpha^m \leq u \leq u_0 - 2 \ln \alpha^m$, so erstreckt sich das Integral in (2.9) über Teile des ersten Stoßintervalls, für die $F(u)$ durch (2.26) gegeben ist, und Teile des 2. Stoßintervalls, für die $F(u)$ zu berechnen ist. Die Integralgleichung (2.9) wird also inhomogen. Das gilt für alle weiteren Stoßintervalle entsprechend. Die exakte Lösung [17] soll hier nicht weiter verfolgt werden. Sie ist in Abb. 2.1 für Kohlenstoff als Streuer dargestellt. Es zeigt sich, daß die Stellen $-n \ln \alpha^m$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durch einen Sprung der $(n-1)$. Ableitung von $F(u)$ gekennzeichnet sind. Alle niedrigeren Ableitungen sind stetig.

Die exakte Lösung bewegt sich um die sog. asymptotische Lösung, die um so besser gilt, je größer u ist. Diese erhält man aus (2.9), wenn man die Sprungstellen $u_n = -n \cdot \ln \alpha^m$ ignoriert und

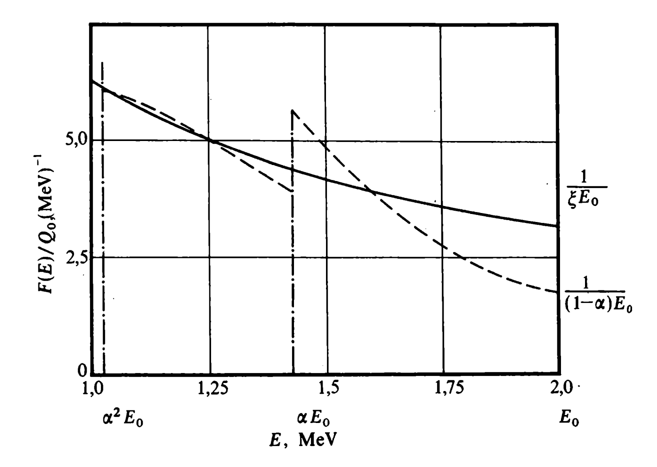


Abb. 2.1: Verlauf der Stoßratendichte in Kohlenstoff im ersten und zweiten Stoßintervall nach der exakten Rechnung (gestrichelt) und nach der asymptotischen Lösung (ausgezogen).

(2.9) als homogene Integralgleichung betrachtet. Die Lösung dieser Gleichung ist eine Konstante (vgl. Lösung der Aufg. 2.3):

$$F(u) = \frac{Q_0}{\xi} = \text{const}, \qquad \text{daraus} \quad \Phi(u) = \frac{Q_0}{\xi \cdot \Sigma_T(u)}. \tag{2.27}$$

In der Energieskala gilt:

$$F(E) = \frac{Q_0}{\xi \cdot E} \qquad \text{und} \qquad \Phi(E) = \frac{Q_0}{\xi \cdot E \cdot \Sigma_T(E)}. \tag{2.27a}$$

Da die Spaltneutronen im Reaktor nicht monoenergetisch sind, verschmieren sich die Abweichungen von der asymptotischen Lösung, die ohnehin nur im ersten Stoßintervall von Belang sind. Man rechnet daher in der Praxis gewöhnlich mit der asymptotischen Lösung.

2.2.2. Bremsung in Gemischen aus Wasserstoff und schweren Nukliden mit langsam veränderlichen Wirkungsquerschnitten

a) Im Bereich des Spaltspektrums

Im Bereich des kontinuierlichen Spaltspektrums ist $F(u)$ sicher eine langsam veränderliche Funktion der Lethargie. Sind die

Wirkungsquerschnitte in diesem Bereich nur schwach lethargieabhängig (keine Resonanzen), so können wir den letzten Term in Gl. (2.12) für $A \gg 1$ durch folgende Entwicklung approximieren:

$$\frac{\Sigma_n^m(u+\ln\alpha^m)}{\Sigma_T(u+\ln\alpha^m)} F(u+\ln\alpha^m) \approx$$
$$\approx \frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) + \ln\alpha^m \frac{d}{du}\left[\frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} F(u)\right]. \qquad (2.28)$$

Die Bremsgleichung (2.12) nimmt damit die folgende Form an:

$$\frac{d}{du}\bar{\xi}(u) F(u) = -\frac{\Sigma_A(u)}{\Sigma_T(u)} F(u) + Q(u) + \frac{dQ(u)}{du}. \qquad (2.29)$$

Als Abkürzung haben wir dabei die Funktion

$$\bar{\xi}(u) = 1 + \sum_m \frac{\Sigma_n^m(u)}{\Sigma_T(u)} \cdot \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m} \cdot \ln\alpha^m \qquad (2.30)$$

eingeführt. Da (2.29) nur außerhalb des Resonanzbereichs gilt, wo gewöhnlich $\Sigma_A \ll \Sigma_T \approx \Sigma_n = \sum_m \Sigma_n^m$ gilt, können wir in guter Näherung setzen

$$\bar{\xi}(u) = \frac{\sum_m \Sigma_n^m(u)\left[1 + \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m}\ln\alpha^m\right]}{\Sigma_n} = \frac{\sum_m \Sigma_n^m \xi^m}{\Sigma_n} \qquad (2.31)$$

mit ξ^m nach (1.44). $\bar{\xi}(u)$ nach (2.31) stellt den mit den Streuquerschnitten gewogenen mittleren Lethargiegewinn je Stoß in einer Mischung aus Nukliden dar.

Die Lösung der Gl. (2.29) lautet analog zu (2.17)

$$F(u) = \frac{Q(u)}{\bar{\xi}(u)} + \qquad (2.32)$$
$$+ \frac{1}{\bar{\xi}(u)} \int_{u'=0}^{u} Q(u')\left[1 - \frac{\Sigma_A(u')}{\bar{\xi}(u')\,\Sigma_T(u')}\right] \cdot e^{-\int_{u'}^{u} \frac{\Sigma_A(u'')}{\bar{\xi}(u'')\,\Sigma_T(u'')}du''} du'.$$

Diese Gleichung ist vor allem im Bereich des Spaltspektrums zu benützen. Sie gilt auch im anschließenden Lethargiebereich, solange

keine Resonanzen auftreten, ist aber dort zweckmäßigerweise noch zu vereinfachen. Für $\bar{\xi} \to 1$ stimmt (2.32) mit der exakten Lösung (2.17) für Wasserstoff überein.

b) Im Bereich außerhalb des Spaltspektrums

Das Spaltspektrum erstreckt sich über den Lethargiebereich $0 \leq u \leq u_Q$. In diesem Bereich ist die Absorption näherungsweise gegenüber der Streuung zu vernachlässigen. Außerhalb des Spaltspektrums, $u > u_Q$, gilt dann nach (2.32)

$$F(u) = \frac{Q_0}{\bar{\xi}(u)} \cdot e^{-\int\limits_{u_Q}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\bar{\xi}(u')\,\Sigma_T(u')} du'} \tag{2.33}$$

mit

$$Q_0 = \int\limits_{u'=0}^{u_Q} Q(u')\,du'. \tag{2.34}$$

Die Bremsnutzung (2.15) hat in diesem Fall die Form

$$p(0 \to u) \approx p(u_Q \to u) = e^{-\int\limits_{u_Q}^{u} \frac{\Sigma_A(u')}{\bar{\xi}(u')\,\Sigma_T(u')} du'} \tag{2.35}$$

Für die Flußdichte Φ in Abhängigkeit von der Energie folgt somit für $E < E_Q$

$$\Phi(E) = \frac{Q_0}{\bar{\xi}(E) \cdot \Sigma_T(E) \cdot E} \cdot e^{-\int\limits_{E'=E}^{E_Q} \frac{\Sigma_A(E')}{\bar{\xi}(E') \cdot \Sigma_T(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}} \tag{2.33a}$$

Man sieht aus (2.31–33), daß die Stoßratendichte $F(u)$ in einem Gemisch bei veränderlichen Wirkungsquerschnitten nicht konstant ist, selbst dann nicht, wenn es reine Streuer sind. Die Variation von $F(u)$ ist um so stärker, je stärker sich $\bar{\xi}(u)$ mit der Lethargie ändert. Das steht im Gegensatz zur Bremsung an einem einzigen Nuklid. Denn hierfür reduziert sich $\bar{\xi}(u)$ gemäß (2.31) auf das ξ des einen Streuers (vgl. auch (2.22), gültig für Wasserstoff, $\xi = 1$).

Wenn die Absorption vernachlässigbar ist und die Streuquerschnitte unabhängig von der Energie sind, gilt für die Flußdichte nach (2.33a) ein $1/E$-Gesetz wie bei Wasserstoff.

Für einen schwach absorbierenden Moderator mit $\Sigma_A(E) = \sqrt{E_{th}/E} \cdot \Sigma_A(E_{th}) \ll \Sigma_T \approx \Sigma_n$ gilt im Bereich der konstanten Streuquerschnitte

$$\Phi(E) = \frac{Q_0}{\xi \cdot \Sigma_n \cdot E} \cdot e^{-\frac{\Sigma_A(E_{th})}{\xi \cdot \Sigma_n} \int\limits_E^{E_Q} \sqrt{\frac{E_{th}}{E'}} \cdot \frac{dE'}{E'}} . \tag{2.36}$$

c) *Güte des Moderators*

Die Güte eines Moderators wird nach dem Bremsvermögen $\xi \Sigma_n$ und nach dem Bremsverhältnis $\xi \Sigma_n/\Sigma_A(E_{th})$ beurteilt. Bei hohem Bremsvermögen werden die Neutronen den Bremsbreich in kurzer Zeit durchlaufen. Die Flußdichte im Bremsbereich ist daher um so kleiner, je höher das Bremsvermögen ist. Das Bremsverhältnis ist ein Maß für die Absorption der Neutronen im Moderator bei Durchlaufen des Bremsbereichs. Für konstante Streuquerschnitte im Bereich $E_{th} \leqq E \leqq E_Q$ gilt für die Zahl der insgesamt im Moderator absorbierten Neutronen

$$\int\limits_{E_{th}}^{E_Q} \Sigma_A(E)\, \Phi(E)\, dE = Q_0 \left(1 - e^{-2\frac{\Sigma_A(E_{th})}{\xi \Sigma_n}}\right) \tag{2.37}$$

$$\approx 2 \cdot \frac{\Sigma_A(E_{th})}{\xi \Sigma_n} \cdot Q_0 .$$

Bei der Auswertung des Integrals (2.37) ist $1/\sqrt{E_Q}$ gegenüber $1/\sqrt{E_{th}}$ vernachlässigt worden.

In Tab. 2.1 sind Zahlenwerte für das Bremsvermögen und das Bremsverhältnis für verschiedene Stoffe angegeben. Man sieht, daß unter diesen eine Reihe von Substanzen eine überragende Rolle spielen. Das sind die Stoffe, die als Moderatoren benutzt werden. Von den Verbindungen des leichten Wasserstoffs sind das insbesondere Wasser, Zirkonhydrid und organische Verbindungen wie Diphenyl C_6H_5–H_5C_6, Terphenyl C_6H_5–CH_4–C_6H_5 und Polyäthylen $(CH_2)_n$. Der Zahlenwert von reinem D_2O erscheint gegenüber der Praxis zu günstig, da D_2O stets Spuren von H_2O enthält. Die Beimengung von 0,5 % H_2O reduziert das Bremsverhältnis bereits auf $^1/_4$ des angegebenen Wertes.

Tab. 2.1: Bremsvermögen und Bremsverhältnis bei thermischer Energie (0,0253 eV.).

Stoff	Dichte ϱ g/cm³	Brems-vermögen $\xi \Sigma_n$ cm⁻¹	Brems-verhältnis $\xi \frac{\Sigma_n}{\Sigma_A}$
H_2O	1	1,36	62
ZrH_2	5,61	1,47	49
$(C_6H_5)_2$	0,87	0,715	83
D_2O	1,1	0,18	5000
Be	1,85	0,16	145
BeO	3,02	0,12	190
Be_2C	2,4	0,16	145
C	1,60	0,06	165
Na	0,97	0,0063	0,53
Mg	1,74	0,011	4,4
Al	2,70	0,0058	0,45
K	0,83	0,0013	0,052
Fe	7,8	0,033	0,16
Zr	6,5	0,0066	0,86
Th	11	0,0031	0,015
U	18,7	0,0033	0,01

2.2.3. Analytische Näherungen für den Flußdichteverlauf in einer Resonanzlinie

Zur Berechnung der mittleren Wirkungsquerschnitte und der Bremsnutzung im Resonanzbereich werden oft analytische Näherungen für den Flußdichteverlauf in den Resonanzlinien verwendet. Für ein Gemisch aus Resonanzabsorber (R) und Moderator (M) gilt die Bremsgleichung (2.9), die wir hier in der Form

$$\Sigma_T(u)\,\Phi(u) = \frac{1}{1-\alpha^M} \int\limits_{u+\ln\alpha^M}^{u} \Sigma_n^M(u')\,\Phi(u')\cdot e^{u'-u}\,du' + \frac{1}{1-\alpha^R} \int\limits_{u+\ln\alpha^R}^{u} \Sigma_n^R(u')\,\Phi(u')\,e^{u'-u}\,du' \qquad (2.38)$$

mit

$$\Sigma_n(u') = \Sigma_n^R(u') + \Sigma_n^M(u')$$

schreiben. Bei allen analytischen Näherungen wird vorausgesetzt, daß die Resonanzlinien so weit getrennt liegen, daß sich zwischen den Resonanzlinien wieder ein ungestörtes Bremsspektrum einstellen kann. Ferner wird angenommen, daß die Resonanzlinie schmal verglichen mit dem maximalen Lethargiegewinn des Neutrons beim Stoß mit einem Moderatorkern ist. In diesem Fall stammt der Hauptbeitrag zum ersten Stoßintegral in (2.38) aus dem Bereich des ungestörten Bremsspektrums außerhalb der Resonanz (s. (2.33) mit $\Sigma_A = 0$ zwischen den Resonanzen):

$$\Phi(u') = \frac{p\,Q_0}{\bar{\xi}\,\Sigma_{n,\,pot}} \quad \text{mit} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi^R\,\Sigma_{n,\,pot}^R + \xi^M\,\Sigma_{n,\,pot}^M}{\Sigma_{n,\,pot}}. \qquad (2.39)$$

$\bar{\xi}$ und $\Sigma_{n,\,pot}$ sind dabei die lethargieunabhängigen Werte im Bereich zwischen den Resonanzen, vgl. (II. 2.12). Die Absorption kann hier vernachlässigt werden. p ist die Bremsnutzung für die bei der Abbremsung bereits durchlaufenen Resonanzlinien. Wertet man näherungsweise das ganze erste Stoßintegral mit (2.39) aus, so folgt

$$\frac{1}{1-\alpha^M} \int\limits_{u+\ln\alpha^M}^{u} \Sigma_n^M(u')\,\Phi(u')\,e^{u'-u}\,du' \approx \frac{\Sigma_{n,\,pot}^M\,p\,Q_0}{\bar{\xi}\,\Sigma_{n,\,pot}}. \qquad (2.40)$$

Die weiteren Näherungen beziehen sich auf die Berechnung des Stoßintegrals für den Resonanzabsorber.

NR-Näherung (*N*arrow-*R*esonance Approximation). Ist die Resonanzlinie nicht nur schmal, verglichen mit dem maximalen Lethargiegewinn des Neutrons beim Stoß mit einem Moderatorkern, sondern auch schmal verglichen mit dem bei einem Absorberkern, so kann das Stoßintegral für den Resonanzabsorber analog zu (2.40) ausgewertet werden:

$$\frac{1}{1-\alpha^R} \int\limits_{u+\ln\alpha^R}^{u} \Sigma_n^R(u')\,\Phi(u')\,e^{u'-u}\,du' \approx \frac{\Sigma_{n,\,pot}^R\,p\,Q_0}{\bar{\xi}\,\Sigma_{n,\,pot}}. \qquad (2.41)$$

Für den Flußdichteverlauf in der Resonanzlinie gilt somit in der NR-Näherung nach (2.38–41)

$$\Phi(u) = \frac{pQ_0}{\bar{\xi}\,\Sigma_T(u)}, \tag{2.42}$$

$$F(u) = \frac{pQ_0}{\bar{\xi}} = \text{const.} \tag{2.43}$$

Die Flußdichte ist also in der NR-Näherung umgekehrt proportional zum totalen Wirkungsquerschnitt in der Resonanz.

IM-Näherung (*I*nfinite *M*ass Approximation)*. Ist die Resonanzlinie breit verglichen mit dem maximalen Lethargiegewinn des Neutrons beim Stoß mit einem Absorberkern, so können wir bei der Auswertung des Stoßintegrals näherungsweise so verfahren, als ob der Resonanzabsorber eine unendlich große Masse hätte. Da in diesem Fall das Stoßintervall auf Null zusammenschrumpft, können wir $\Sigma_n^R(u')\,\Phi(u')$ für $u' = u$ aus dem Stoßintegral herausziehen und das Restintegral auswerten:

$$\lim_{\alpha^R \to 1} \left(\frac{1}{1-\alpha^R} \int\limits_{u+\ln\alpha^R}^{u} e^{u'-u}\, du' \right) = 1. \tag{2.44}$$

Somit gilt in der IM-Näherung nach (2.38) mit (2.40) und (2.44):

$$\Phi(u) = \frac{pQ_0\,\Sigma_{n,\,pot}^M}{\bar{\xi}\left[\Sigma_T(u) - \Sigma_n^R(u)\right]\Sigma_{n,\,pot}}, \tag{2.45}$$

bzw.

$$F(u) = \frac{1}{1 - \Sigma_n^R(u)/\Sigma_T(u)} \cdot \frac{pQ_0\Sigma_{n,\,pot}^M}{\bar{\xi}\,\Sigma_{n,\,pot}}. \tag{2.45a}$$

Wir werden in Abschn. 2.3 zeigen, daß bei einer numerischen Lösung der strengen Bremsgleichung beträchtliche Abweichungen von den analytischen Näherungslösungen (2.42) und (2.45) auftreten können. Für die Berechnung der Resonanzabsorption sind diese analytischen Lösungen jedoch vielfach schon ausreichend.

---

* Häufig auch NRIA-Näherung genannt (*N*arrow *R*esonance *I*nfinite Mass *A*pproximation).

2.3. Numerische Lösung der Bremsgleichung

Zur Berechnung des Neutronenspektrums in Kernreaktoren werden heute weitgehend numerische Verfahren verwendet. Die beiden üblichen Methoden sind das Differenzenverfahren und das Energiegruppenverfahren.

2.3.1. Das Differenzenverfahren

Die Gl. (2.11) beschreibt den Zusammenhang zwischen $F(u)$, $F(u + \ln\alpha^m)$ und $\mathrm{d}F(u)/\mathrm{d}u$. Wenn wir die Lethargieskala in diskrete Intervalle g, in denen die Stoßratendichte konstant F_g sein soll, aufteilen und die Ableitung $\mathrm{d}F(u)/\mathrm{d}u$ durch den Differenzenquotienten ersetzen, so erhalten wir aus (2.11) eine Beziehung zwischen den einzelnen Stoßdichtewerten F_g. Gl. (2.11), für jedes Lethargieintervall angeschrieben, führt auf ein lineares Gleichungssystem. Als Anfangsbedingung müssen wir über die Stoßdichte im Lethargiebereich u_0 bis $u_0 + \ln\alpha^m$ (u_0 ist die untere Lethargiegrenze des zu berechnenden Problems) eine Annahme treffen. Gewöhnlich wird angenommen, $F(u)$ sei in diesem Bereich konstant. Unter dieser Bedingung läßt sich das lineare Gleichungssystem leicht lösen.

Da im Resonanzbereich wegen der starken Wirkungsquerschnittsänderungen die Lethargieintervallbreite klein gewählt werden muß, ist das Verfahren sehr aufwendig.

2.3.2. Das Energiegruppenverfahren

Im Bereich des Spaltspektrums tritt im allgemeinen die unelastische Streuung zur elastischen hinzu, und die elastische Streuung wird anisotrop. In diesen Fällen müssen wir von der allgemeineren Bremsgleichung (2.4) mit den entsprechenden Übergangsquerschnitten $\Sigma_S(E \to E')$ ausgehen. Wegen der komplizierten Energieabhängigkeit dieser Übergangsquerschnitte kann (2.4) nur durch eine direkte numerische Integration oder durch das Energiegruppenverfahren gelöst werden.

Bei der direkten numerischen Lösung der Gl. (2.4) muß für jeden Energiewert $E = E_g$ bzw. $u = u_g$ das Stoßintegral durch einen geeigneten, genügend genauen Summenausdruck, der sich auf diskrete Energiewerte stützt, ersetzt werden:

$$\int \Phi(E')\, \Sigma_s(E' \to E)\, \mathrm{d}E' \approx \sum_{g'} \Phi(E_{g'})\, \Sigma_S(E_{g'} \to E_g)\, h_{g'g}\,.$$

Die Darstellung im Lethargiemaßstab ist ganz entsprechend.

Die Koeffizienten $h_{g'g}$ sind die Summationsgewichte für die Stützpunkte an den Stellen E_g bzw. u_g. Sodann muß die kontinuierliche Mannigfaltigkeit der Energiewerte als eine diskrete Folge gedacht werden, deren Glieder so dicht liegen, daß alle energieabhängigen Größen sicher interpoliert werden können. Man erhält aus (2.4) ein System von gekoppelten Gleichungen:

$$\Sigma_{\mathrm{T}}(E_g)\,\Phi(E_g) = Q(E_g) + \sum_{g'} \Phi(E_{g'})\,\Sigma_{\mathrm{S}}(E_{g'} \to E_g)\,h_{g'g}. \qquad (2.46)$$

Da der Summenausdruck, der das Stoßintegral ersetzt, einige Stützpunkte enthalten muß, wird die Zahl der benötigten Gleichungen sehr groß. Der Energiebereich der Stoßintegrale ist mindestens durch das Stoßintervall der elastischen Streuung zu charakterisieren und reicht dann von E bis E/α^m, bzw. im Lethargiemaßstab von $u + \ln \alpha^m$ bis u, wobei der Index m auf einen bestimmten streuenden Kern deutet. Man kann die erforderliche Zahl der Stützpunkte und damit die Zahl der Gleichungen grob überschlagen. Die Annahme äquidistanter Stützstellen im Lethargiemaßstab führt, wenn die Intervallbreite 1/3 des Stoßintervalls von ^{238}U sein soll*, auf ca. 3000 Gleichungen für den Energiebereich 0,1 eV bis 2 MeV. Bei starker Veränderung der Wirkungsquerschnitte (Resonanzen) reicht diese Zahl noch nicht aus. Die Lösung solcher Systeme ist mit modernen Rechenanlagen zwar noch möglich, aber i. a. nicht ökonomisch.

Man kann durch Zusammenfassung der Neutronen aus größeren Energieintervallen zu „Gruppen" die Zahl der Gleichungen und damit den Rechenaufwand wesentlich reduzieren. Allerdings muß man dann die „Gruppenkonstanten" der Differentialgleichungen aus den Wirkungsquerschnitten unter Zugrundelegung eines plausiblen Flußdichteverlaufs berechnen. Wie groß die Energieintervalle im Einzelfall zu wählen sind, hängt vom Problem und der angestrebten Genauigkeit ab.

Wir definieren die Flußdichte in einem Intervall ΔE_g bzw. Δu_g durch

$$\Phi_g = \int_{\Delta E_g} \Phi(E)\,\mathrm{d}E \qquad \text{bzw. } \Phi_g = \int_{\Delta u_g} \Phi(u)\,\mathrm{d}u\,. \qquad (2.47)$$

Wegen $\Phi(E)\,\mathrm{d}E = -\Phi(u)\,\mathrm{d}u$ sind die Definitionen gleichwertig. Entsprechen Energie- und Lethargieintervall einander, d. h.

* $\ln \alpha^{\mathrm{U}} = -0{,}0166$ und $u_{\mathrm{th}} = 18$.

$\Delta E_g/E_g = -\Delta u_g$, so sind die Flußdichten (2.47) identisch. Die Neutronen werden dadurch in einzelnen Energiegruppen g zusammengefaßt. Eine Bestimmungsgleichung für die Gruppenflußdichten Φ_g erhält man durch Integration der Bremsgleichung über das Energieintervall ΔE_g (bzw. Δu_g)

$$\int\limits_{\Delta E_g} \Sigma_T(E)\, \Phi(E)\, dE = \tag{2.48}$$

$$= \int\limits_{\Delta E_g} Q(E)\, dE + \int\limits_{\Delta E_g} dE \sum_{g'} \int\limits_{\Delta E'_{g'}} dE'\, \Phi(E')\, \Sigma_S(E' \to E).$$

Die Lethargiedarstellung ist analog. Das Stoßintegral in (2.4) wurde bei der Gleichung (2.48) in eine Summe von Teilintegralen über $\Delta E_{g'}$ aufgespalten.

Wir führen jetzt die nachstehenden Abkürzungen, die sog. Gruppenkonstanten, in Anlehnung an (2.47) ein.

$$Q_g = \int\limits_{\Delta E_g} Q(E)\, dE \qquad \text{bzw.} \quad Q_g = \int\limits_{\Delta u_g} Q(u)\, du,$$

$$\Sigma_{Tg} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \Sigma_T(E)\, \Phi(E)\, dE}{\int\limits_{\Delta E_g} \Phi(E)\, dE} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_{Tg} = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \Sigma_T(u)\, \Phi(u)\, du}{\int\limits_{\Delta u_g} \Phi(u)\, du},$$

$$\Sigma_{S\,g' \to g} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} dE \int\limits_{\Delta E'_{g'}} dE'\, \Sigma_S(E' \to E)\, \Phi(E')}{\int\limits_{\Delta E'_{g'}} \Phi(E')\, dE'} \tag{2.49}$$

$$\text{bzw.} \quad \Sigma_{S\,g' \to g} = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} du \int\limits_{\Delta u'_{g'}} du'\, \Sigma_S(u' \to u)\, \Phi(u')}{\int\limits_{\Delta u'_{g'}} \Phi(u')\, du'}.$$

Damit ergibt sich aus (2.48) die Gleichung

$$\Sigma_{Tg}\, \Phi_g = Q_g + \sum_{g'} \Sigma_{S\,g' \to g}\, \Phi_{g'}. \tag{2.50}$$

In der Literatur existieren umfangreiche Sammlungen von Gruppenwirkungsquerschnitten einschließlich der Streumatrizen aus

(2.50) für elastische und unelastische Streuung für alle wichtigen im Kernreaktor vorkommenden Elemente [3–4].

Sind die Lethargie- bzw. Energieintervalle hinreichend klein, so können die Gruppenwirkungsquerschnitte unter Annahme einer konstanten Flußdichte aus den kernphysikalischen Daten berechnet werden. Bei breiteren Energieintervallen wird man im Bereich des Spaltspektrums anstatt mit der Flußdichte $\Phi(u)$ näherungsweise mit dem Spaltspektrum $\chi(u)$ (s. I. 3.2) rechnen. Im Resonanzbereich, wo im allgemeinen eine ganze Resonanzlinie oder auch mehrere Resonanzlinien in ein Lethargieintervall Δu_g fallen, kann man die analytischen Näherungen für den Flußdichteverlauf in der Umgebung einer Resonanzlinie, die NR-Näherung (2.42) oder die IM-Näherung (2.45), zur Berechnung der Gruppenwirkungsquerschnitte heranziehen. Nach der NR-Näherung gilt z. B. für den mittleren Spalt-, Einfang- oder Streuquerschnitt im Intervall Δu_g des Resonanzbereichs für das Element m:

$$\Sigma_g^m = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \Sigma^m(u)\, \Phi(u)\, du}{\int\limits_{\Delta u_g} \Phi(u)\, du} = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \frac{\Sigma^m(u)}{\Sigma_T(u)}\, du}{\int\limits_{\Delta u_g} \frac{du}{\Sigma_T(u)}}. \tag{2.51}$$

Da Σ_T im allgemeinen von einem Nuklidgemisch abhängt, das von Fall zu Fall verschieden ist, können die Gruppenquerschnitte σ_g^m für einzelne Elemente in den Wirkungsquerschnittsammlungen nur näherungsweise angegeben werden. In der Querschnittsammlung von BONDARENKO [4] ist angenommen, daß bei der Mittelung (2.51) für das Element m nur der Wirkungsquerschnitt des Nuklids m lethargieabhängig ist, also

$$\Sigma_T(u) = \Sigma_T^m(u) + \sigma_0^m N^m. \tag{2.52}$$

Die Wirkungsquerschnitte der anderen Elemente in der Mischung können beliebig sein; daher wird über ihre Lethargieabhängigkeit die einfachste Annahme, nämlich Konstanz, getroffen.

Der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_0^m = \frac{1}{N^m} \sum_{m' \neq m} \Sigma_T^{m'} \tag{2.53}$$

stellt dabei den totalen Wirkungsquerschnitt der übrigen Nuklide, bezogen auf einen Kern der Sorte m dar. In dieser Schreibweise gilt anstelle von (2.51):

$$\sigma_g^m = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \frac{\sigma^m(u)}{\sigma_T^m(u) + \sigma_0^m}\, du}{\int\limits_{\Delta u_g} \frac{du}{\sigma_T^m(u) + \sigma_0^m}} . \tag{2.54}$$

Bei unendlicher Verdünnung des Nuklids m geht nach (2.53) σ_0^m gegen ∞. Aus (2.54) folgt für diesen Fall (keine Flußabsenkung in der Resonanz)

$$\sigma_g^m(\sigma_0^m \to \infty) = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \sigma^m(u)\, du}{\int\limits_{\Delta u_g} du} . \tag{2.55}$$

σ_g^m nach (2.54) hängt über den Doppler-Effekt von der Temperatur ab (s. Abschn. II. 1.4), also $\sigma_g^m = \sigma_g^m(\sigma_0^m, T)$.

In der Wirkungsquerschnittsammlung von BONDARENKO [4] sind die Wirkungsquerschnitte (2.55) für unendliche Verdünnung sowie die Verhältnisse (energetische Selbstabschirmfaktoren)

$$f_g^m(\sigma_0^m, T) = \frac{\sigma_g^m(\sigma_0^m, T)}{\sigma_g^m(\sigma_0^m \to \infty)} \tag{2.56}$$

für mehrere σ_0^m-Werte (0, 10, 10^2, 10^3b) und mehrere Temperaturen T (300, 900, 2100 °K) tabelliert. Der Gruppenwirkungsquerschnitt für das Element m kann dann hieraus durch Interpolation bestimmt werden:

$$\sigma_g^m(\sigma_0^m, T) = \sigma_g^m(\sigma_0^m \to \infty) \cdot f_g^m(\sigma_0^m, T) . \tag{2.57}$$

2.3.3. Bremsspektren in Wasser, Graphit und Natururan

Die Abb. 2.2 zeigt numerische Lösungen der Bremsgleichung nach dem Vielgruppenverfahren für die wichtigsten Moderatoren: H_2O, D_2O und Graphit [3]. Im Lethargiebereich $0 \leq u \leq 15$, entsprechend 10 MeV $\geq E \geq$ 3 eV, wurden dabei 60 Gruppen verwendet. Als Quelle ist das Spaltspektrum angenommen. Die Schwankungen der Flußdichte im Bereich des Spaltspektrums rühren von Streuresonanzen in Sauerstoff und Graphit her. Die asymptotische

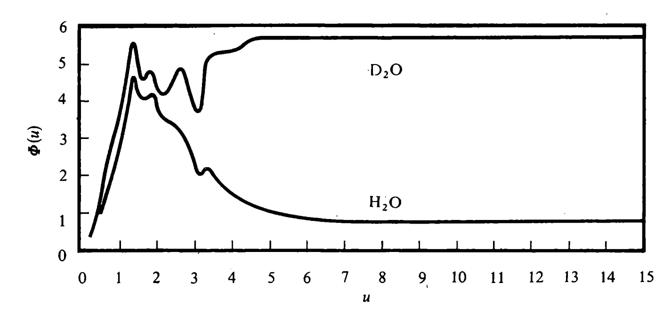


Abb. 2.2a: Bremsspektren in Wasser und schwerem Wasser (Φ in willkürlichen Einheiten) [3].

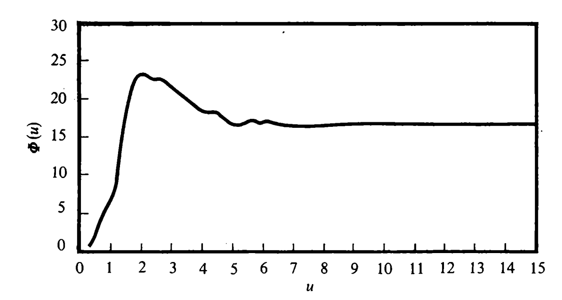


Abb. 2.2.b: Bremsspektrum in Graphit. Gleiche Normierung wie in Abb. 2.2a [3].

Flußdichte ist gemäß (2.27, 33) beim Moderator mit dem geringsten Bremsvermögen (Graphit) am höchsten.

Abb. 2.3 gibt das Neutronenspektrum in Natururan nach einer Vielgruppenrechnung mit den Gruppenkonstanten von BONDARENKO [4] mit und ohne Berücksichtigung der unelastischen Streuung wieder. Zum Vergleich ist auch das Spaltspektrum eingetragen. Man sieht, daß die unelastische Streuung an den schweren Kernen das Neutronenspektrum im MeV-Bereich wesentlich „weicher" macht, d. h. zu kleineren Energien hin verschiebt. Das Maximum des Neutronenspektrums sinkt dadurch unter die Spaltschwelle von ^{238}U, weshalb im Natururan keine Kettenreaktion hergestellt werden kann (vgl. Abschn. I. 4.1).

2.3.4. Bremsspektren in Uran-Moderatorgemischen

Den in Abschn. 2.2.3 berechneten analytischen Näherungen für den Flußdichteverlauf in der Umgebung einer Resonanzlinie sollen

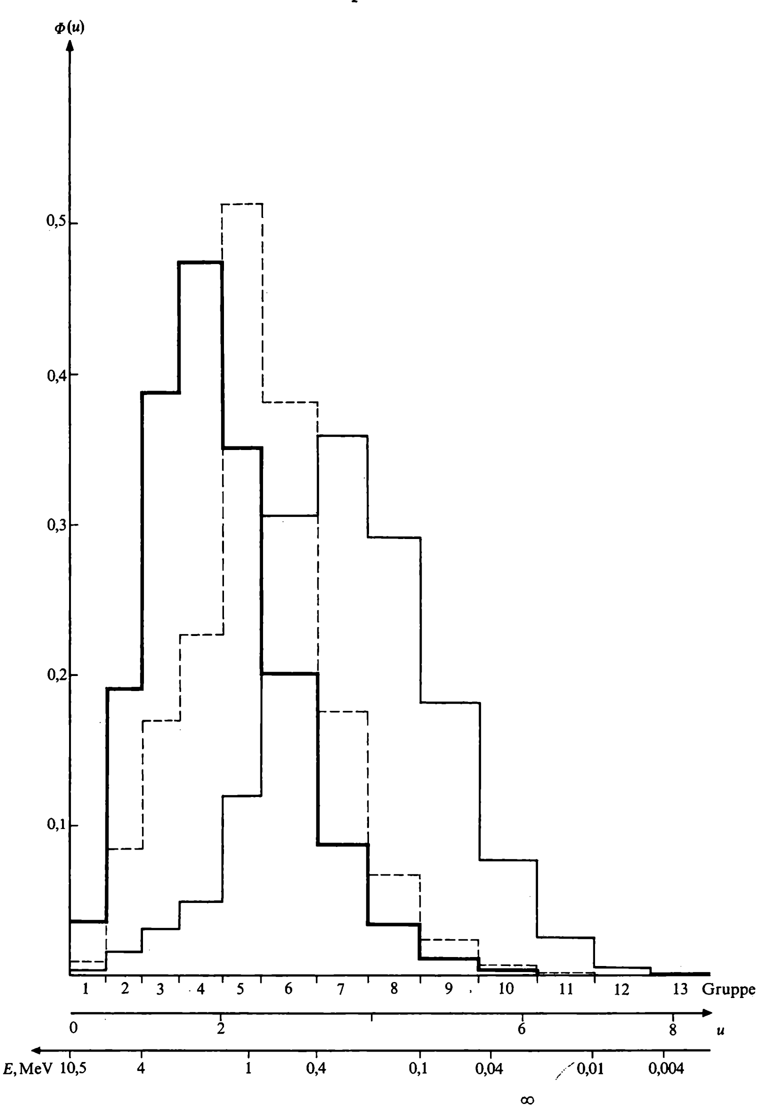


Abb. 2.3: Neutronenspektren in Natururan, normiert auf $\int_0^\infty \Phi(u)\,du = 1$. Schwach ausgezogene Kurve: Berücksichtigung der unelastischen Streuung. Gestrichelte Kurve: ohne unelastische Streuung. Stark ausgezogene Kurve: Spaltspektrum.

in diesem Abschnitt numerische Lösungen der Bremsgleichung (2.11) nach dem Differenzenverfahren gegenübergestellt werden.

a) Mischungen aus Brutstoff und Moderator

Das Neutronenspektrum in der Umgebung einer Resonanzlinie hängt von den Eigenschaften der Resonanzlinie und von der Menge des zugemischten Moderators ab. Wir betrachten zwei charakteristische Resonanzlinien des ^{238}U: die stark absorbierende Linie bei 6,68 eV und die etwa gleich stark streuende und absorbierende Linie bei 36,8 eV. Als Moderator wird Kohlenstoff in zwei Konzentrationen angenommen: mit 30 b und mit 3000 b Potentialstreuquerschnitt je Absorberatom.

Abb. 2.4 zeigt den Verlauf der Stoßratendichte in der 6,68-eV-Resonanz für 30 b Potentialstreuquerschnitt je Absorberatom. In-

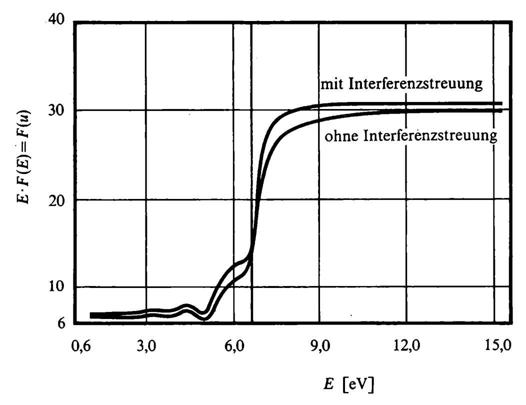


Abb. 2.4: Stoßratendichte $F(u) = E \cdot F(E)$ in der Umgebung der 6,68 eV-Resonanzlinie des ^{238}U für ein ^{238}U-C-Gemisch mit $\Sigma^{C}_{n,pot}/N^{238} = 30$ b, $T = 300$ °K nach numerischer Lösung der Gl. (2.11). Die Interferenz zwischen den Amplituden der Potential- und Resonanzstreuung gem. Gl. (II. 2.13) ist hier unbedeutend [5].

folge der Flußabsenkung in der stark absorbierenden Resonanzlinie (s. Abb. 2.5) nimmt die Stoßratendichte in der Resonanz beträchtlich ab. Die NR-Näherung (2.42) ergibt dagegen eine konstante Stoßratendichte, gleich dem Wert oberhalb der Resonanzlinie, und die IM-Näherung (2.45) liefert ein Minimum der Stoßratendichte in der Resonanz. Die Oszillationen unterhalb der Resonanz sind moderatorabhängig. Sie entstehen durch die Änderung der Einstreuung infolge der Flußstörungen in der Resonanz. Bei der

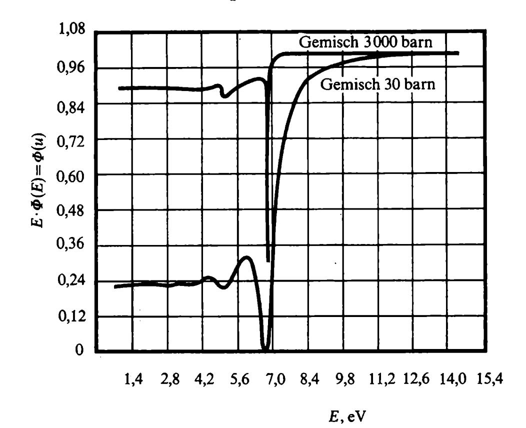


Abb. 2.5: Neutronenflußdichten $\Phi(u) = E\ \Phi(E)$ zu Abb. 2.4. Zum Vergleich ist auch der Verlauf für eine hohe Moderatorkonzentration von $\Sigma_{n,pot}/N^{238} = 3000$ b eingezeichnet [5].

geringeren Moderatorkonzentration ist die Neutronenflußdichte nach Durchlaufen der Resonanz kleiner, da die Absorption mit abnehmendem Bremsvermögen $\xi\,\Sigma_n$ zunimmt.

Ist der Streuquerschnitt in der Resonanz vergleichbar mit dem Absorptionsquerschnitt, so ändert sich der Charakter des Stoßratendichteverlaufs, (Abb. 2.6). Wegen der geringeren Absorption tritt ein Maximum der Stoßratendichte an der Resonanzstelle auf.

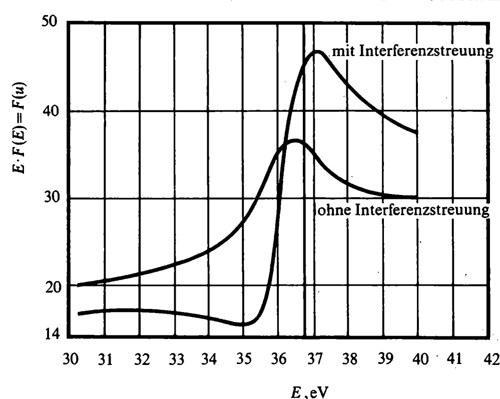


Abb. 2.6: Stoßratendichte $F(u) = E\,F(E)$ in der Umgebung der 36,8 eV-Resonanzlinie des ^{238}U. Konzentration und Temperatur wie bei Abb. 2.4. Wegen des hohen Streuanteils dieser Resonanzlinie ist hier der Interferenzeinfluß deutlich ausgeprägt [5].

Dieses Maximum verstärkt sich mit zunehmender Moderatorkonzentration, da hierbei die Absorption in der Resonanzlinie und damit die Flußabsenkung kleiner wird. In der Flußdichte tritt bei der hohen Moderatorkonzentration ein Maximum auf (s. Abb. 2.7). Es entsteht durch die vermehrte Einstreuung aus der Resonanzspitze.

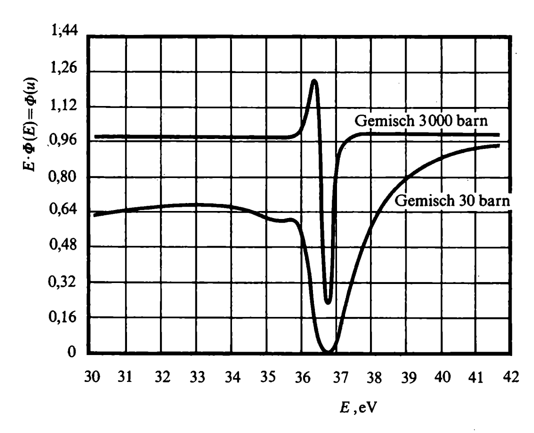


Abb. 2.7: Neutronenflußdichte $\Phi(u) = E\,\Phi(E)$ zu Abb. 2.6 [5].

Der Abstand des Maximums von der Resonanzspitze entspricht etwa dem mittleren Energieverlust eines Neutrons beim Stoß mit ^{238}U.

Der Einfluß der Interferenzstreuung (s. Abschn. II. 2.2) auf das Neutronenspektrum in der Umgebung einer Resonanzlinie ist bei hohen Moderatorkonzentrationen sehr gering. Bei niederen Moderatorkonzentrationen kann der Einfluß der Interferenzstreuung auf das Neutronenspektrum jedoch ganz beträchtlich sein, sofern der Streuanteil der Resonanzlinie groß ist. Ein Beispiel hierfür zeigt Abb. 2.6.

b) Mischungen aus Spaltstoff und Moderator

Solange die Resonanzlinien weit getrennt liegen, wie beim Brutstoff ^{238}U, stellt sich zwischen den Resonanzen näherungsweise wieder das ungestörte Bremsspektrum ein. Man kann daher jede einzelne Resonanz unabhängig von den vorhergehenden Resonanzen behandeln. Bei den dicht liegenden Resonanzen des Spaltstoffs ^{235}U ist das nicht mehr möglich. Hier ist die Neutroneneinstreuung in eine bestimmte Resonanzlinie von den Flußstörungen der vorher-

gehenden Resonanzen abhängig. In diesen Fällen muß eine numerische Lösung der Bremsgleichung über viele Resonanzen durchgeführt werden.

Abb. 2.8 zeigt einen Ausschnitt aus einem Bremsspektrum in ^{235}U-Graphit-Mischungen mit verschiedenen C/U-Verhältnissen [6].

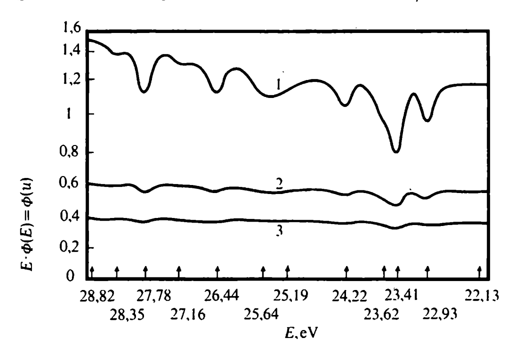


Abb. 2.8: Neutronenflußdichte Φ in ^{235}U-Graphit-Mischungen [6]. 1: C/U = 100, 2: C/U = 300, 3 : C/U = 500.

Die Wirkungsquerschnitte für die dicht liegenden Spaltstoffresonanzen sind in der Form (II. 2.17) angesetzt. Die Pfeile auf der Abszisse geben die Lage der Resonanzlinien an. Die Resonanzlinien liegen zum Teil so dicht, daß für zwei Resonanzen nur ein Flußminimum auftritt. Die Flußabsenkung in den Resonanzlinien nimmt mit wachsender Moderatorkonzentration ab.

In Abb. 2.9 ist dargestellt, wie sich die Flußdichte und die Stoßratendichte mit wachsender Temperatur infolge der Dopplerverbreiterung der Resonanzlinien verändern.

2.4. Stoßratendichte und Bremsdichte

Für Bilanzbetrachtungen im Bremsbereich ist oft der Begriff der Bremsdichte hilfreich.

Die Bremsdichte $q(E)$ ist die Zahl der Neutronen, die je cm^3 und s von einer Energie oberhalb E nach unterhalb E gestreut werden. Bei elastischer Streuung ist die Zahl der Neutronen, die am Nuklid m bei $E' \geq E$ auf Energien $E'' < E$ abgebremst werden,

$$\Phi(E')\,\mathrm{d}E' \cdot \int\limits_{E''=\alpha^m E'}^{E} \mathrm{d}E''\; \Sigma_\mathrm{n}^m(E')\, w^m(E' \to E'')\,. \qquad (2.58)$$

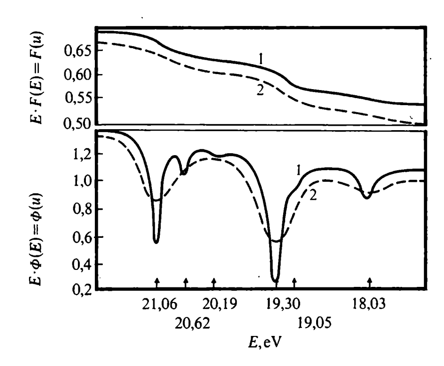


Abb. 2.9: Stoßratendichte und Flußdichte in einer ^{235}U-Graphit-Mischung mit C/^{235}U = 100 bei $T = 0$ °K (Kurve 1), und 2000 °K (Kurve 2). Die Zahlen auf der Abszisse geben die Lage der Resonanzspitzen in diesem Gebiet an [6].

Die Gesamtzahl der Neutronen, die durch elastische Streuungen am Kern m eine Energie $< E$ erhalten – die Bremsdichte q^m – ist durch Integration über alle in Frage kommenden Energien E' zu erhalten:

$$q^m(E) = \int_{E'=E}^{E/\alpha^m} \mathrm{d}E'\,\Phi(E') \int_{E''=\alpha^m E'}^{E} \mathrm{d}E''\,\Sigma_\mathrm{n}^m(E')\,w^m(E' \to E''). \tag{2.59}$$

Die gesamte Bremsdichte $q(E)$ erhalten wir dann durch Summation über alle Nuklide m, die im Reaktor vorhanden sind. Also

$$q(E) = \sum_m \int_{E'=E}^{E/\alpha^m} \mathrm{d}E'\,\Phi(E') \int_{E''=\alpha^m E'}^{E} \mathrm{d}E''\,\Sigma_\mathrm{n}^m(E')\,w^m(E' \to E''). \tag{2.60}$$

Bei unelastischer Streuung sind die Integrationsgrenzen entsprechend zu verändern.

Bremsdichte und Bremsgleichung.

Die Bremsdichte ist sehr viel schwächer von der Energie abhängig als die Flußdichte. Mit der Ableitung der Bremsdichte nach der Energie können wir die Bremsgleichung (2.7) in der einfachen Form

$$\Sigma_\mathrm{A}(E)\,\Phi(E) = Q(E) + \frac{\mathrm{d}q(E)}{\mathrm{d}E} \tag{2.61}$$

schreiben. Da die Bremsdichte als die Zahl der Neutronen definiert ist, die im Verlauf der Bremsung einen bestimmten Energiewert passieren, ist es für q gleichgültig, ob dieser Wert in der E-Skala oder in der u-Skala gemessen wird. Daher gilt

$$q(u) = q(E). \tag{2.62}$$

(2.61) hat in der Lethargieskala die Form:

$$\Sigma_{\mathrm{A}}(u)\ \Phi(u) = Q(u) - \frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u}. \tag{2.63}$$

Gl. (2.61, 63) sind sehr anschaulich. Sie besagen, daß die Änderung der Bremsdichte zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ (u und $u + \mathrm{d}u$) durch die Zahl der Quellneutronen und der Neutronenabsorptionen in diesem Bereich bestimmt ist. Man entnimmt aus ihnen unmittelbar, daß die Bremsdichte bei verschwindender Absorption unterhalb des Quellbereichs eine Konstante ist:

$$q(u) = q(E) = \int\limits_{E'=E_{\mathrm{Q}}}^{\infty} Q(E')\,\mathrm{d}E' = Q_0 \text{ für } E \leq E_{\mathrm{Q}}, \text{ bzw. } u \geq u_{\mathrm{Q}}. \tag{2.64}$$

Berechnung der Bremsdichte.

Für isotrope Streuung im Schwerpunktsystem am Nuklid m ist $w^m(E' \to E'')$ nach (1.27) in (2.60) einzusetzen. Damit ergibt sich die Bremsdichte für isotrope Streuung zu

$$q(E) = \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_E^{E/\alpha^m} \mathrm{d}E'\ \Phi(E')\ \Sigma_{\mathrm{n}}^m(E') \left(\frac{E}{E'} - \alpha^m\right). \tag{2.65}$$

Führt man statt $\Phi(E)$ die Stoßratendichte $F(E) = \Sigma_{\mathrm{T}}(E) \cdot \Phi(E)$ ein, so erhält man die Beziehung zwischen Stoßratendichte und Bremsdichte:

$$q(E) = \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_E^{E/\alpha^m} \mathrm{d}E' \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}^m(E')}{\Sigma_{\mathrm{T}}(E')} F(E') \left[\frac{E}{E'} - \alpha^m\right]. \tag{2.66}$$

Transformiert man das Integral in (2.66) auf die Lethargie, so wird

$$q(u) = \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} \mathrm{d}u' \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}^m(u')}{\Sigma_{\mathrm{T}}(u')} F(u') \left[\mathrm{e}^{u'-u} - \alpha^m\right]. \tag{2.67}$$

Die Gl. (2.65–67) gestatten, die Bremsdichte bei bekannter Flußdichte oder Stoßratendichte zu berechnen.

Eine analytische Integration ist außerhalb des Quellbereichs, d. h. $u > u_Q$, für energieunabhängige Wirkungsquerschnitte und vernachlässigbare Absorption möglich. (Bei Wasserstoff ist nur das letzte zu fordern.) In diesem Fall ist die Stoßratendichte $F(u)$ nach (2.27) bzw. (2.22) konstant und kann für $u' = u$ vor das Integral gezogen werden. Die Ausrechnung von (2.67) liefert

$$q(u) = \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \frac{\Sigma_n^m}{\Sigma_T} F(u) \left[1 - \alpha^m + \alpha^m \ln \alpha^m\right]. \quad (2.68)$$

Mit (1.44) und (2.31) entsteht unter Beachtung von $\sum_m \Sigma_n^m = \Sigma_T$ (da $\Sigma_A = 0$ vorausgesetzt ist)

$$q(u) = \bar{\xi}\, F(u) \quad \text{für } u \geq u_Q\,, \quad (2.69)$$

oder

$$q(E) = \bar{\xi} \cdot E \cdot F(E) \ \text{ für } E \leq E_Q\,. \quad (2.70)$$

Aufgaben

2.1. Man berechne das Verhältnis der Flußdichten für die Neutronenbremsung in H_2O, D_2O und Graphit bei gleicher Quellstärke Q_0 für den Bereich der konstanten Streuquerschnitte.

2.2. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron bei der Abbremsung von 2 MeV auf 0,0253 eV in reinem H_2O (D_2O, Graphit) absorbiert wird?

2.3. Man verifiziere die Gültigkeit von (2.27).

2.4. Man berechne die Flußdichte in der 6,68-eV-Resonanzspitze von ^{238}U nach der NR- und IM-Näherung relativ zur ungestörten Flußdichte und vergleiche mit der exakten Lösung nach Abb. 2.5. Der Potential-Streuquerschnitt je U-Atom betrage 30 bzw. 3000 b.

2.5 Man berechne die mittlere Bremszeit der Neutronen in Funktion der Energie und der Lethargie unter der Annahme sehr vieler Stöße bei geringem Energieverlust ΔE je Stoß und konstantem Streuquerschnitt für den ganzen Energiebereich (Modell der kontinuierlichen Bremsung).
Welche Zeit vergeht, bis ein Neutron in Graphit von 2 MeV auf 0,0253 eV abgebremst wird? ($\varrho_C = 1{,}6$ g/cm³, $\sigma_n = 4{,}8$ b).
Anleitung: $\dfrac{\lambda_n(v)}{v} = \dfrac{1}{\Sigma_n(v) \cdot v}$ ist die Zeit, die ein Neutron zum Durchfliegen der freien Weglänge $\lambda_n(v)$ braucht. Man wiege diese Zeit mit der Stoßratendichte, die Q Quellneutronen bei jener Geschwindigkeit zukommen würde und beziehe abschließend auf 1 Quellneutron.

3. Resonanzabsorption in homogenen Medien

Die Berechnung der Stoßratendichte macht, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, große Schwierigkeiten, sobald Gemische von Nukliden vorkommen, insbesondere wenn einzelne Nuklide im fraglichen Gebiet Resonanzen aufweisen.

Die Neutronenabsorption im Bremsbereich bzw. die Bremsnutzung $p(0 \to u)$ konnte daher nur in den Fällen durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck angegeben werden, in denen eine analytische Lösung der Bremsgleichung möglich ist. Das gilt für reinen Wasserstoff und für Isotopengemische mit langsam veränderlichen Wirkungsquerschnitten, vgl. (2.15, 35). Im folgenden Abschnitt soll die Resonanzabsorption für Uran-Moderator-Gemische untersucht werden. Dabei prüfen wir, inwieweit die in Abschn. 2.2.3 abgeleiteten NR- und IM-Näherungen zur Berechnung der Resonanzabsorption und Bremsnutzung ausreichen.

Da die Neutronenabsorption sowohl für die Bilanz der Kettenreaktion als auch für die Berechnung des erbrüteten neuen Spaltstoffs von großer Bedeutung ist, muß auf eine sorgfältige Berechnung Wert gelegt werden.

3.1. Allgemeine Formulierung der Resonanzabsorption

3.1.1. Resonanzabsorption und Bremsnutzung

Den Bereich der Resonanzabsorptionen kennzeichnen wir durch die Lethargiegrenzen u_1 und u_2.

Die Zahl der Absorptionen je cm³ und s im Lethargieintervall zwischen u_1 und u_2 beträgt im quellfreien Bereich (vgl. (2.63)):

$$q(u_1) - q(u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \Sigma_A(u)\, \Phi(u)\, du. \tag{3.1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein über die Lethargie u_1 hinaus abgebremstes Neutron im Intervall zwischen u_1 und u_2 absorbiert wird, ist

$$a(u_1 \to u_2) = \frac{q(u_1) - q(u_2)}{q(u_1)}.$$

Mit (3.1) folgt daraus

$$a(u_1 \to u_2) = \frac{1}{q(u_1)} \cdot \int_{u_1}^{u_2} \Sigma_A(u) \cdot \Phi(u)\, du. \tag{3.2}$$

Hieraus folgt für die Bremsnutzung $p(u_1 \to u_2)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein über die Lethargie u_1 hinaus abgebremstes Neutron im Intervall zwischen u_1 und u_2 **nicht** absorbiert wird

$$p(u_1 \to u_2) = 1 - a(u_1 \to u_2) = 1 - \frac{1}{q(u_1)} \cdot \int_{u_1}^{u_2} \Sigma_A(u) \cdot \Phi(u)\, du. \tag{3.3}$$

Wenn man die Bremsgleichung für $F(u)$ bzw. $\Phi(u)$ gelöst hat, können die Absorptionen (3.1) und die Bremsnutzung (3.3) durch eine Integration bestimmt werden.

3.1.2. Das Resonanzintegral

Gewöhnlich ist die Absorptionsrate zwischen Quell- und Resonanzbereich klein im Vergleich zur Streurate. Das ermöglicht eine weitere Auswertung der obigen Formeln.

Wenn für $u \leqq u_1$ die Absorption vernachlässigbar und der Streuquerschnitt lethargieunabhängig ist, also $\Sigma_T = \Sigma_{n,\,pot}$, erfolgt die Neutroneneinstreuung in das Intervall zwischen u_1 und u_2 aus einem Bereich mit ungestörtem Bremsspektrum. Nach (2.22) gilt hierfür $\Phi(u) = \text{const}$. Die Bremsdichte $q(u_1)$ lautet in diesem Falle nach (2.69)

$$q(u_1) = \bar{\xi}\, \Sigma_{n,\,pot}\, \Phi(u_1). \tag{3.4}$$

Betrachten wir innerhalb des Lethargieintervalls u_1 bis u_2 einen reinen Resonanzabsorber, so geht $\Sigma_A(u)$ in $\Sigma_A^R(u)$ über. Mit $\Sigma_A^R(u) = \sigma_A(u) \cdot N^R$ (nur ein absorbierendes Nuklid sei im betrachteten Lethargiebereich zu berücksichtigen) und (3.4) schreibt sich (3.2)

$$a(u_1 \to u_2) = \frac{N^R}{\bar{\xi} \cdot \Sigma_{n,\,pot}} \cdot \frac{\int_{u_1}^{u_2} \sigma_A(u) \cdot \Phi(u)\, du}{\Phi(u_1)}. \tag{3.5}$$

Führen wir zur Abkürzung die auf die untere Grenze des Integrals bezogene Flußdichte

$$\varphi(u) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(u_1)} \tag{3.6}$$

ein, so wird das Integral in (3.5)

$$I_{\text{eff}} = \int_{u_1}^{u_2} \sigma_{\text{A}}(u)\, \varphi(u)\, \mathrm{d}u. \tag{3.7}$$

Die Größe I_{eff} ist das effektive Resonanzintegral für das Lethargieintervall zwischen u_1 und u_2. Damit lautet (3.5)

$$a(u_1 \to u_2) = \frac{N^{\text{R}}}{\bar{\xi}\, \Sigma_{\text{n, pot}}} I_{\text{eff}}. \tag{3.5a}$$

Im Grenzfall sehr starker Verdünnung des Absorbers tritt keine Absenkung der Flußdichte in der Resonanz auf. Für das Resonanzintegral folgt dann aus (3.7)

$$I_{\infty} = \int_{u_1}^{u_2} \sigma_{\text{A}}(u)\, \mathrm{d}u. \tag{3.8}$$

I_{∞} heißt gewöhnliches Resonanzintegral oder Resonanzintegral für unendliche Verdünnung. Es hängt im Gegensatz zum effektiven Resonanzintegral (3.7) nicht von der Flußdichte ab.

Drücken wir die Bremsnutzung durch das effektive Resonanzintegral (3.7) aus, so folgt nach (3.3, 5a)

$$p(u_1 \to u_2) = 1 - \frac{I_{\text{eff}}}{\bar{\xi}\, \Sigma_{\text{n, pot}}/N^{\text{R}}}. \tag{3.9}$$

3.1.3. Mittlere Absorptionsquerschnitte im Resonanzbereich

Für das Vielgruppenverfahren (Abschn. 2.3.2) müssen im Resonanzbereich mittlere Wirkungsquerschnitte der Form (2.49) berechnet werden. Man wird den Resonanzbereich i. a. in mehrere Lethargieintervalle Δu_g unterteilen. Jedes Intervall kann mehrere Resonanzen enthalten. Es soll jedoch nicht so groß sein, daß sich die mittlere Flußdichte wesentlich ändert. Mit Hilfe des Resonanzintegrals $I_{\text{eff}\,g} = I_g$ für das Intervall Δu_g läßt sich der mittlere Wirkungsquerschnitt wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_{\text{A}g} = \frac{\int_{\Delta u_g} \sigma_{\text{A}}(u)\, \Phi(u)\, \mathrm{d}u}{\int_{\Delta u_g} \Phi(u)\, \mathrm{d}u} = \frac{I_g}{\int_{\Delta u_g} \varphi(u)\, \mathrm{d}u}, \tag{3.10}$$

wobei $\varphi(u)$ nach (3.6) die reduzierte Flußdichte darstellt.

Bei weit getrennten Resonanzen (z. B. ^{238}U) und hohem Bremsvermögen ist die Flußdichte fast im ganzen Lethargiebereich ungestört (vgl. Abb. 2.5 für $\Sigma_{n, pot}/N^A = 3000$ b). Die schmale Flußsenke in den Resonanzen fällt bei der Integration der Flußdichte über Δu_g praktisch nicht ins Gewicht. Für den mittleren Absorptionsquerschnitt gilt dann näherungsweise

$$\sigma_{Ag} = I_g / \Delta u_g . \tag{3.10a}$$

3.2. Analytische Berechnung der Resonanzabsorption

3.2.1. Berechnung des Resonanzintegrals und der Bremsnutzung aus den Beiträgen der einzelnen Resonanzlinien

Sind die Resonanzlinien weit getrennt wie bei ^{238}U, so können wir jede einzelne Resonanz unabhängig von den anderen behandeln, da sich zwischen den Resonanzen näherungsweise ein ungestörtes Bremsspektrum einstellt.

Wir bezeichnen das Resonanzintegral (3.7) für die r-te Resonanzspitze mit I_r*. Die Flußdichte hinter der Resonanz ist dann nach (3.9) um den Faktor

$$p_r = 1 - \frac{I_r}{\bar{\xi}\, \Sigma_{n, pot}/N^R} \approx e^{-\frac{I_r}{\bar{\xi}\, \Sigma_{n, pot}/N^R}} \tag{3.11}$$

kleiner als die Flußdichte vor der Resonanz. Für das effektive Resonanzintegral I_{eff} über alle Resonanzspitzen gilt somit

$$I_{eff} = I_1 + p_1 \cdot I_2 + p_1 \cdot p_2 I_3 + \dots \tag{3.12}$$

Dabei ist angenommen, daß ohne Resonanzabsorber im ganzen Bremsbereich die konstante Bremsdichte (3.4) gilt. Für die Bremsnutzung folgt aus (3.9, 11, 12)

$$p = 1 - \frac{I_1 + p_1 \cdot I_2 + p_1 \cdot p_2 I_3 + \dots}{\bar{\xi}\, \Sigma_{n, pot}/N^R} . \tag{3.11a}$$

Gemäß der Definition der Bremsnutzung ist $p = \prod_r p_r$. Dies folgt aus (3.11a), wenn man dort $-I_r N^R/\bar{\xi}\, \Sigma_{n, pot}$ nach (3.11) durch

* I_r ist nicht zu verwechseln mit I_g, das in der Regel mehrere Resonanzspitzen umfaßt.

$p_r - 1$ ersetzt. Unter Verwendung der Näherung in (3.11) ergibt sich

$$p = 1 - \frac{I_{\text{eff}}}{\xi \Sigma_{\text{n, pot}}/N^{\text{R}}} \approx \mathrm{e}^{-\frac{\sum_r I_r}{\xi \Sigma_{\text{n, pot}}/N^{\text{R}}}} = \mathrm{e}^{-\frac{I}{\xi \Sigma_{\text{n, pot}}/N^{\text{R}}}}. \qquad (3.13)$$

Die Summe über die Resonanzintegrale der einzelnen Resonanzlinien in (3.13) bezeichnen wir mit I:

$$I = \sum_r I_r. \qquad (3.12\,\text{a})$$

Ist das Bremsvermögen je Absorberatom groß, die Bremsnutzung also nahe bei 1, so gilt näherungsweise für (3.12)

$$I_{\text{eff}} \approx I = \sum_r I_r \qquad (3.12\,\text{b})$$

3.2.2. Klassifizierung der Resonanzlinien

Bei der analytischen Berechnung des Flußdichteverlaufs in einer Resonanzlinie (s. Abschn. 2.2.3) hatten wir zwischen schmalen und breiten Resonanzlinien – relativ zum maximalen Energieverlust $(1 - \alpha^{\text{R}})\, E_r$ des Neutrons beim Stoß mit einem Absorberkern – unterschieden. Als Maß für die Breite der Resonanzlinie wird gewöhnlich die von Wigner eingeführte sog. „praktische" Breite Γ_{p} verwendet. Γ_{p} ist der Abstand der beiden Energiewerte E_{p} links und rechts von der Spitze, bei denen der makroskopische Resonanzquerschnitt gleich dem makroskopischen Potentialstreuquerschnitt des Materials $\Sigma_{\text{n, pot}} = \Sigma^{\text{M}}_{\text{n, pot}} + \Sigma^{\text{R}}_{\text{n, pot}}$ wird, also

$$\Sigma^{\text{R}}_{\text{n}}(E_{\text{p}}) + \Sigma^{\text{R}}_{\gamma}(E_{\text{p}}) + \Sigma^{\text{R}}_{\text{f}}(E_{\text{p}}) = \Sigma_{\text{n, pot}} \qquad (3.14)$$

$$\Gamma_{\text{p}} = 2\,|E_{\text{p}} - E_{\text{r}}|. \qquad (3.15)$$

Eine etwaige Unsymmetrie wird hierbei nicht berücksichtigt.
Da an den Flanken die Dopplerverbreiterung verschwindet (s. Abb. II. 2.7) gelten in der Umgebung von E_{p} die Formeln (II. 2.9–10). Damit wird

$$\Sigma^{\text{R}}_{\text{n}}(E_{\text{p}}) + \Sigma^{\text{R}}_{\gamma}(E_{\text{p}}) + \Sigma^{\text{R}}_{\text{f}}(E_{\text{p}}) = \pi\, \lambda\!\!\!^{-2}(E_{\text{p}})\, g_J\, N^{\text{R}} \frac{\Gamma_{\text{n}}(E_{\text{p}})\,\Gamma}{(E_{\text{p}} - E_{\text{r}})^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

Setzt man für die schwach energieabhängigen Größen λ und Γ_n die Werte an der Spitze E_r ein, so folgt mit (II. 2.9)

$$\Sigma_n^R(E_p) + \Sigma_\gamma^R(E_p) + \Sigma_f^R(E_p) = \frac{\hat{\Sigma}_T^R}{1 + \left(\frac{E_p - E_r}{\Gamma/2}\right)^2} \approx \frac{\hat{\Sigma}_T^R}{\left(\frac{E_p - E_r}{\Gamma/2}\right)^2}.$$

Daraus ergibt sich mit (3.14–15)

$$\Gamma_p = \Gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_T^R}{\Sigma_{n,\,pot}^R + \Sigma_{n,\,pot}^M}}\,. \tag{3.15a}$$

In Tab. 3.1 sind Γ_p und das für eine Streuung am Absorberkern maßgebliche Energieintervall $(1 - \alpha^R)\, E_r$ für reines ^{238}U verglichen. Bei den tiefliegenden Resonanzen ist $\Gamma_p > (1 - \alpha^R)\, E_r$. Man wird daher zur Berechnung des entsprechenden Resonanzintegrals die Flußdichte der IM-Näherung (2.45) heranziehen. Bei den höheren Resonanzen ist im allgemeinen $\Gamma_p < (1 - \alpha^R)\, E_r$. Für diese Resonanzen wird man die NR-Näherung (2.42) ansetzen. Bei sehr hohen Moderatorkonzentrationen können alle Resonanzen in der NR-Näherung behandelt werden.

Tab. 3.1: Praktische Breite Γ_p und maximaler Energieverlust $(1 - \alpha^R)\, E_r$ für reines ^{238}U.

E_r	Γ_p	$(1 - \alpha^R)E_r$	Klassifizierung
6,7 eV	1,26 eV	0,11 eV	IM
21	1,95	0,35	IM
36,8	3,65	0,62	IM
66,3	2,26	1,11	IM
81,3	0,76	1,36	NR
90	0,13	1,51	NR
102,8	3,98	1,73	IM
117	1,32	1,97	NR
146	0,68	2,44	NR
166	0,98	2,78	NR

3.2.3. NR-Näherung für das Resonanzintegral

In der NR-Näherung ist der Flußdichteverlauf in der Resonanzlinie durch (2.42), außerhalb der Resonanz durch (2.39) gegeben. Die bezogene Flußdichte nach (3.6) ist

$$\varphi(u) = \frac{\Sigma_{\text{n, pot}}}{\Sigma_{\text{T}}(u)}. \qquad (3.16)$$

Damit schreibt sich das Resonanzintegral (3.7) der Resonanzlinie r

$$I_r = \Sigma_{\text{n, pot}} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\sigma_{\text{A}}^{\text{R}}(u)}{\Sigma_{\text{T}}(u)}\, \text{d}u = \Sigma_{\text{n, pot}} \int\limits_{E_2}^{E_1} \frac{\sigma_{\text{A}}^{\text{R}}(E)}{\Sigma_{\text{T}}(E)} \cdot \frac{\text{d}E}{E}. \qquad (3.17)$$

Transformieren wir auf die Variable $x = \frac{E - E_r}{\Gamma/2}$ (vgl. (II. 2.21)), so folgt

$$I_r = \frac{\Gamma\, \Sigma_{\text{n, pot}}}{2\, E_r\, N^{\text{R}}} \int\limits_{-x_2}^{+x_1} \frac{\sigma_{\text{A}}^{\text{R}}(x)\, \text{d}x}{\sigma_{\text{A}}^{\text{R}}(x) + \sigma_{\text{n, res}}^{\text{R}}(x) + \sigma_{\text{n, int}}^{\text{R}}(x) + \frac{\Sigma_{\text{n, pot}}}{N^{\text{R}}}}. \qquad (3.18)$$

Nach Einführung der dopplerverbreiterten Resonanzquerschnitte (II. 2.25–30) nimmt (3.18) die folgende Form an

$$I_r = I_{r\infty} \frac{\beta_r}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta_r)}{\psi(x, \zeta_r) + \gamma_r\, \chi(x, \zeta_r) + \beta_r}\, \text{d}x \text{ (NR)}. \qquad (3.19)$$

Die Integrationsgrenzen wurden bis unendlich ausgedehnt, da die Resonanzquerschnitte rasch abfallen. Als Abkürzungen wurden eingeführt:

$$I_{r\infty} = \frac{\pi\, \hat{\sigma}_{\text{A}}^{\text{R}}(E_r)\, \Gamma(E_r)}{2\, E_r}, \qquad \beta_r = \frac{\Sigma_{\text{n, pot}}}{\Sigma_r^{\text{R}}},$$
$$\gamma_r = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_{\text{n, res}}^{\text{R}}(E_r)\, \sigma_{\text{n, pot}}^{\text{R}}\, g_J}}{\sigma_r^{\text{R}}} \qquad (3.20)$$

mit

$$\Sigma_{n,\,pot} = \Sigma^{R}_{n,\,pot} + \Sigma^{M}_{n,\,pot},$$

$$\sigma^{R}_{r} = \hat{\sigma}^{R}_{A}(E_r) + \hat{\sigma}^{R}_{n,\,res}(E_r) = 4\pi\,\lambda\!\!\!^{-2}_{r}\,g_J\,\frac{\Gamma_n(E_r)}{\Gamma(E_r)},$$

$$\hat{\sigma}^{R}_{n,\,res}(E_r) = 4\,\pi\,\lambda\!\!\!^{-2}_{r}\,g_J\,\frac{\Gamma^2_n(E_r)}{\Gamma^2(E_r)}, \tag{3.21}$$

$$\hat{\sigma}^{R}_{A}(E_r) = 4\,\pi\,\lambda\!\!\!^{-2}_{r}\,g_J\,\frac{\Gamma_n(E_r)\,\Gamma_A(E_r)}{\Gamma^2(E_r)}, \qquad \text{(s. (II. 2. 9)).}$$

$$\Gamma_A = \begin{cases} \Gamma_\gamma & \text{bei Brutstoffen} \\ \Gamma_\gamma + \Gamma_f & \text{bei Spaltstoffen.} \end{cases}$$

Für $\beta_r \to \infty$ folgt aus (3.19) mit (II.2.31) das Resonanzintegral (3.8) für unendliche Verdünnung:

$$\lim_{\beta_r \to \infty} I_r = I_{r\,\infty}. \tag{3.22}$$

Für $T = 0\,°K$ läßt sich (3.19) geschlossen auswerten. Man erhält

$$I_r = I_{r\,\infty}\sqrt{\frac{\beta_r}{1 + \beta_r - \gamma_r^2/\beta_r}}, \tag{3.23}$$

oder bei Vernachlässigung der Interferenzstreuung, was für $\Sigma^{R}_{n,pot} \ll \Sigma_{n,\,pot}$ gerechtfertigt ist:

$$I_r = I_{r\,\infty}\sqrt{\frac{\beta_r}{1 + \beta_r}}. \tag{3.24}$$

Das Resonanzintegral unter Berücksichtigung der Interferenzstreuung ist also größer als das Resonanzintegral ohne Interferenzstreuung. Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein auch bei den dopplerverbreiterten Resonanzlinien. Jedoch wird der Einfluß der Interferenzstreuung bei steigendem Potentialstreuquerschnitt des Moderators geringer.

In Tab. 3.2 sind die Ergebnisse einer numerischen Auswertung der Resonanzintegrale unter Berücksichtigung der Dopplerver-

Tab. 3.2: Einfluß der Interferenzstreuung auf das Resonanzintegral für die ^{238}U-Resonanzen unter 1 keV, Moderator Kohlenstoff [1].

$\Sigma^{C}_{n,pot}/N^{R}$ b	T, °K	I, b ohne Interferenzstreuung	I, b mit Interferenzstreuung	Differenz
30	300	11,7	13,6	14 %
	1000	12,9	14,8	13 %
300	300	41,1	42,3	3 %
	1000	50,2	51,4	2,5 %

breiterung für Kohlenstoff als Moderator für zwei Konzentrationen und zwei Temperaturen wiedergegeben.

Für Temperaturen $T \neq 0$ °K läßt sich das Resonanzintegral für die NR-Approximation nur numerisch auswerten. Einen wichtigen Spezialfall erhält man für stark moderierte Reaktoren. Hier kann die Interferenzstreuung, wie wir gesehen haben, vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$I_r = I_{r\infty} \frac{\beta_r}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta_r)\, dx}{\psi(x, \zeta_r) + \beta_r} = I_{r\infty} \frac{2\beta_r}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi(x, \zeta_r)\, dx}{\psi(x, \zeta_r) + \beta_r}$$
$$= I_{r\infty} \frac{2\beta_r}{\pi} \mathrm{J}(\beta_r, \zeta_r). \tag{3.25}$$

Das Integral $\mathrm{J}(\beta, \zeta)$ wurde mehrfach tabelliert [16, 8, 7]. Mit Hilfe dieser Tabellen läßt sich das Resonanzintegral in der NR-Approximation ohne Interferenzstreuung leicht berechnen:

$$I_{NR} = \sum_r I_{r\infty} \cdot \frac{2\beta_r}{\pi} \mathrm{J}(\beta_r, \zeta_r). \tag{3.26}$$

Das Resonanzintegral (3.26) hängt nur noch vom Streuquerschnitt je Absorberatom $\Sigma_{n,\,pot}/N^{R}$ und von der Temperatur ab. Die Abb. 3.1–2 geben die Werte des Resonanzintegrals (3.26) für ^{238}U und ^{232}Th nach Rechnungen von Blake [8] wieder.

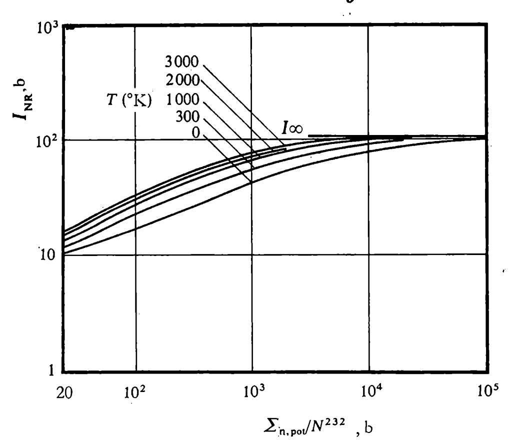


Abb. 3.1: Verlauf des Resonanzintegrals I_{NR} für ^{238}U in Abhängigkeit vom Streuquerschnitt je Absorberatom $\Sigma_{n,pot}/N^{238}$ für verschiedene Temperaturen [8].

Tab. 3.3: Die Funktion $J(\beta, \zeta), \beta = 2^k \cdot 10^{-5}$[16]. (2386 3 $\triangleq$ 0,2386 $\cdot 10^3$).

k \ ζ	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20
4.0	2386 3	1856 3	1613 3	1501 3	1307 3	1269 3	1257 3
4.5	2229 3	1704 3	1455 3	1335 3	1120 3	1077 3	1062 3
5.0	2086 3	1573 3	1324 3	1198 3	9667 2	9168 2	8993 2
5.5	1951 3	1459 3	1212 3	1083 3	8400 2	7836 2	7634 2
6.0	1821 3	1355 3	1116 3	9863 2	7355 2	6733 2	6501 2
6.5	1692 3	1257 3	1030 3	9022 2	6491 2	5819 2	5559 2
7.0	1563 3	1164 3	9508 2	8273 2	5772 2	5063 2	4777 2
7.5	1431 3	1073 3	8761 2	7588 2	5166 2	4436 2	4128 2
8.0	1296 3	9809 2	8036 2	6944 2	4647 2	3911 2	3589 2
8.5	1158 3	8881 2	7319 2	6323 2	4191 2	3468 2	3139 2
9.0	1018 3	7940 2	6600 2	5713 2	3781 2	3088 2	2759 2
9.5	8771 2	6988 2	5876 2	5107 2	3403 2	2754 2	2435 2
10.0	7399 2	6037 2	5150 2	4504 2	3045 2	2454 2	2153 2
10.5	6099 2	5107 2	4429 2	3907 2	2701 2	2179 2	1903 2
11.0	4909 2	4223 2	3730 2	3325 2	2367 2	1921 2	1676 2
11.5	3861 2	3411 2	3070 2	2770 2	2034 2	1676 2	1466 2
12.0	2973 2	2691 2	2468 2	2257 2	1731 2	1442 2	1268 2
12.5	2246 2	2078 2	1939 2	1797 2	1436 2	1219 2	1083 2
13.0	1671 2	1574 2	1491 2	1400 2	1165 2	1011 2	9082 1
13.5	1227 2	1174 2	1126 2	1070 2	9240 1	8199 1	7470 1
14.0	8922 1	8634 1	8370 1	8033 1	7173 1	6507 1	6015 1
14.5	6439 1	6286 1	6145 1	5946 1	5461 1	5056 1	4740 1
15.0	4620 1	4541 1	4467 1	4351 1	4088 1	3853 1	3659 1
15.5	3302 1	3261 1	3223 1	3155 1	3018 1	2887 1	2773 1
16.0	2352 1	2332 1	2312 1	2272 1	2204 1	2133 1	2068 1
16.5	1673 1	1662 1	1652 1	1628 1	1596 1	1558 1	1522 1
17.0	1187 1	1182 1	1177 1	1162 1	1148 1	1129 1	1109 1
17.5	8419 0	8393 0	8369 0	8276 0	8217 0	8122 0	8017 0
18.0	5964 0	5952 0	5940 0	5881 0	5862 0	5817 0	5760 0
18.5	4223 0	4217 0	4212 0	4173 0	4171 0	4150 0	4120 0
19.0	2989 0	2986 0	2984 0	2958 0	2963 0	2954 0	2937 0
19.5	2115 0	2114 0	2113 0	2095 0	2102 0	2098 0	2089 0
20.0	1496 0	1496 0	1495 0	1483 0	1490 0	1498 0	1483 0

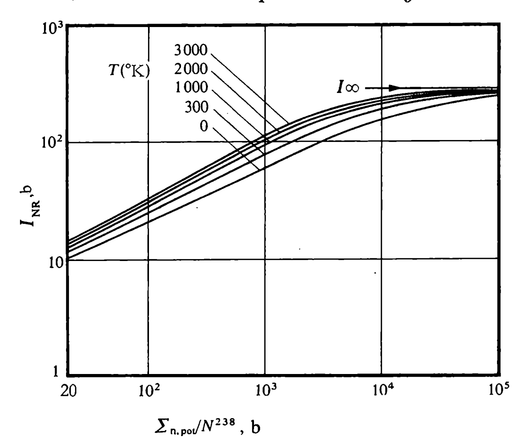


Abb. 3.2: Verlauf des Resonanzintegrals I_{NR} für ^{232}Th in Abhängigkeit vom Streuquerschnitt je Absorberatom $\Sigma_{n,\,pot}\,/\,N^{232}$ für verschiedene Temperaturen [8].

Fortsetzung von Tab. 3.3.

k \ ζ	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	∞
4.0	1251 3	1248 3	1246 3	1245 3	1245 3	1244 3	1242 3
4.5	1055 3	1052 3	1050 3	1048 3	1048 3	1047 3	1044 3
5.0	8914 2	8872 2	8847 2	8831 2	8820 2	8812 2	8780 2
5.5	7541 2	7491 2	7462 2	7443 2	7430 2	7421 2	7382 2
6.0	6393 2	6335 2	6301 2	6278 2	6263 2	6252 2	6207 2
6.5	5436 2	5369 2	5328 2	5302 2	5284 2	5272 2	5219 2
7.0	4638 2	4562 2	4515 2	4485 2	4464 2	4450 2	4388 2
7.5	3975 2	3889 2	3836 2	3801 2	3777 2	3760 2	3689 2
8.0	3423 2	3328 2	3269 2	3230 2	3203 2	3183 2	3101 2
8.5	2964 2	2861 2	2796 2	2753 2	2722 2	2701 2	2606 2
9.0	2579 2	2471 2	2401 2	2354 2	2321 2	2297 2	2190 2
9.5	2255 2	2144 2	2071 2	2021 2	1985 2	1959 2	1839 2
10.0	1977 2	1867 2	1792 2	1741 2	1703 2	1675 2	1544 2
10.5	1737 2	1629 2	1556 2	1504 2	1466 2	1437 2	1296 2
11.0	1523 2	1423 2	1352 2	1301 2	1264 2	1235 2	1087 2
11.5	1331 2	1239 2	1174 2	1126 2	1090 2	1062 2	9099 1
12.0	1154 2	1074 2	1015 2	9718 1	9382 1	9119 1	7607 1
12.5	9888 1	9217 1	8718 1	8337 1	8039 1	7802 1	6345 1
13.0	8352 1	7815 1	7406 1	7087 1	6834 1	6629 1	5276 1
13.5	6930 1	6521 1	6202 1	5948 1	5743 1	5574 1	4369 1
14.0	5637 1	5342 1	5106 1	4914 1	4756 1	4624 1	3597 1
14.5	4489 1	4287 1	4122 1	3985 1	3870 1	3773 1	2940 1
15.0	3501 1	3371 1	3261 1	3169 1	3090 1	3022 1	2381 1
15.5	2678 1	2598 1	2529 1	2470 1	2418 1	2373 1	1907 1
16.0	2013 1	1966 1	1925 1	1889 1	1857 1	1829 1	1508 1
16,5	1492 1	1465 1	1441 1	1420 1	1402 1	1385 1	1175 1
17.0	1092 1	1078 1	1065 1	1053 1	1042 1	1033 1	9026 0
17.5	7927 0	7849 0	7778 0	7713 0	7655 0	7601 0	6830 0
18.0	5712 0	5671 0	5633 0	5599 0	5567 0	5539 0	5098 0
18.5	4095 0	4073 0	4054 0	4036 0	4019 0	4004 0	3760 0
19.0	2924 0	2913 0	2903 0	2894 0	2885 0	2877 0	2746 0
19.5	2082 0	2077 0	2071 0	2067 0	2062 0	2058 0	1989 0
20.0	1480 0	1477 0	1474 0	4172 0	1470 0	1468 0	1431 0

3.2.4. Die IM-Näherung für das Resonanzintegral

In der IM-Näherung erhält man den bezogenen Fluß gemäß (3.6) durch Division von (2.45) mit (2.39)

$$\varphi(u) = \frac{\Sigma^{\mathrm{M}}_{\mathrm{n,\,pot}}}{\Sigma_{\mathrm{T}}(u) - \Sigma^{\mathrm{R}}_{\mathrm{n}}(u)}\,. \tag{3.27}$$

Für das Resonanzintegral (3.7) ergibt sich hiermit analog zu (3.19)

$$I_r = I_{r\infty}\,\frac{\beta'_r}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x,\zeta_r)}{\psi(x,\zeta_r)+\beta'_r}\,dx \quad (\mathrm{IM}) \tag{3.28}$$

mit

$$\beta'_r = \frac{\Sigma^{\mathrm{M}}_{\mathrm{n,\,pot}}}{\hat{\Sigma}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}}(E_r)}\,. \tag{3.29}$$

(3.28) hat die Form von (3.25), wenn dort β_r durch β'_r ersetzt wird. In der IM-Näherung gilt somit unter Verwendung des tabellierten Integrals $\mathrm{J}(\beta, \zeta)$:

$$I_{\mathrm{IM}} = \sum_r I_{r\infty}\,\frac{2\,\beta'_r}{\pi}\,\mathrm{J}(\beta'_r, \zeta_r)\,. \tag{3.30}$$

3.3. Numerische Berechnung der Resonanzabsorption

3.3.1. Vergleich der NR- und IM-Näherung mit exakten Rechnungen

Wir vergleichen die NR- und IM-Approximation mit exakten Werten für einige ^{238}U-Resonanzlinien an Hand von Tab. 3.4. Die Beispiele sind besonders kritisch, da der Potentialstreuquerschnitt des Gemisches bezogen auf 1 Absorberatom klein ist und daher F = const eine schlechte Näherung darstellt.

In der Tabelle ist $1 - p$ angegeben. Gemäß Gl. (3.9) ist dieses proportional dem Resonanzintegral. Wählt man nach der Klassifizierung der Tab. 3.1 die jeweils geeignete Näherung für die Resonanzlinien aus, so betragen die maximalen Fehler der analytischen Näherung für $1 - p$ nach Tab. 3.4 etwa 6 %.

Die Übereinstimmung der analytischen Rechnungen mit den exakten Werten ist bei der schwach moderierten Mischung in

Tab. 3.4: Werte für $(1-p)$ einzelner Resonanzlinien bei 300 °K für ein U-H-Gemisch mit dem Atomverhältnis 1 : 1.

E_r eV	$(1-p)$ exakt	$(1-p)$ NR	Differenz	$(1-p)$ IM	Differenz	Klassifizierung nach Tab. 3.1
21,0	0,06755	0,07455	+10,4 %	0,07059	+ 4,5 %	IM
36,9	0,05820	0,04739	−18,6 %	0,06110	+ 5,0 %	IM
81,3	0,009596	0,01016	+ 5,9 %	0,00811	−15,5 %	NR
90	0,001104	0,001114	+ 0,9 %	0,000998	− 9,6 %	NR
117,5	0,009170	0,009035	− 1,5 %	0,009500	+ 3,6 %	NR

Tab. 3.4 für die großen Resonanzlinien, welche den Hauptbeitrag zum Resonanzintegral ergeben, unbefriedigend. Beachtet man zudem, daß das Resonanzintegral nach der NR- oder IM-Approximation unabhängig vom Moderator ist, also spezielle Streueigenschaften nicht wiedergeben kann (s. Tab. 3.5), dann sieht man die Notwendigkeit, bei Vorliegen höherer Ansprüche die Flußdichte besser, d. h. numerisch zu berechnen. Unterschiede des tatsächlichen Verlaufs der Stoßratendichte in einer Resonanzlinie gegenüber der Näherung $F(u)$ = const in der NR-Approximation lassen sich an Hand der Abb. 2.4, 6 ermessen.
Obwohl das Resonanzintegral I nahezu unabhängig vom Moderator ist, wird die Bremsnutzung sehr stark moderatorabhängig. Das wird deutlich beim Vergleich der Tab. 3.5, 6.

Tab. 3.5: Abhängigkeit des Resonanzintegrals für ^{238}U vom Atomgewicht des Moderators [1].

$\Sigma_{n,pot}/N^{238}$ b	T °K	Resonanzintegral I, b		
		C	H_2O	D_2O
30	300	13,6	11,15	11,11
	1000	14,8	12,13	12,07
300	300	42,3	40,3	40,1
	1000	51,4	48,5	48,3

Tab. 3.6: Abhängigkeit der Bremsnutzung für ^{238}U vom Atomgewicht des Moderators [1].

$\Sigma_{n,pot}/N^{238}$	T	Bremsnutzung p		
b	°K	C	H_2O	D_2O
30	300	0,0149	0,549	0,349
	1000	0,0102	0,521	0,318
300	300	0,397	0,861	0,767
	1000	0,325	0,835	0,728

Betrachtet man den relativen Fehler in p abhängig von einem Fehler im Resonanzintegral, so ergibt sich aus (3.13)

$$\frac{\Delta p}{p} = + \frac{\Delta I}{I} \cdot \ln p . \tag{3.31}$$

Wenn p infolge starker Moderation nahe bei eins liegt, ist $\ln p \approx 0$, und der relative Fehler in p wesentlich kleiner als der Fehler des Resonanzintegrals. Da die Bremsnutzung p die primäre Größe für Reaktorberechnungen ist, genügt dann u. U. eine ziemlich grobe Abschätzung des Resonanzintegrals nach einer analytischen Näherung.

3.3.2. Resonanzabsorption im Bereich der aufgelösten und unaufgelösten Resonanzen

Vernon [9] hat folgende Beiträge für das gewöhnliche Resonanzintegral I_∞ von ^{238}U berechnet:

a) aufgelöste Resonanzen (Klassifizierung nach Tab. 3.1)

6 IM-Resonanzen		:	251,4 barn
48 NR-Resonanzen		:	12,5 barn

b) unaufgelöste Resonanzen (vgl. Abschn. II. 2.2), aufgeschlüsselt nach Energie und Drehimpuls des Neutrons

30 keV > E > 1 keV	$l = 0$		:	2,83 barn
	$l = 1$	$J = 1/2$	:	0,25 barn
	$l = 1$	$J = 3/2$	:	0,58 barn
E > 30 keV			:	0,8 barn
c) Epicadmium $1/v$-Absorption			:	1,4 barn
		$I_\infty(^{238}U)$	$\approx$	270 barn

Die unaufgelösten Resonanzen geben demnach selbst bei unendlicher Verdünnung, also starker Moderation, noch einen merklichen Beitrag zum Resonanzintegral. Mit abnehmender Moderation nimmt der Anteil der unaufgelösten Resonanzen am Resonanzintegral zu, s. Tab. 3.7. Die Resonanzintegrale in dieser Tabelle wurden durch eine numerische Berechnung des Stoßintegrals für den Brennstoff und eine NR-Näherung für den Moderator ermittelt [2]. Das Resonanzintegral hängt in diesem Fall nur vom Potentialstreuquerschnitt je Absorberatom und von der Temperatur ab. Die Absorption in den unaufgelösten Resonanzen variiert nicht sehr stark mit dem Streuquerschnitt je Absorberatom, da die Resonanzspitzen klein und daher die Flußabsenkungen gering sind.

Moderierte Reaktoren besitzen im Resonanzbereich in erster Näherung eine konstante Flußdichte $\Phi(u)$ (abgesehen von den Resonanzstellen selbst) und unterhalb des Resonanzbereichs bei kT ein Maximum der Flußdichte. Bei schnellen Reaktoren liegt das Maximum des Neutronenspektrums oberhalb 100 keV. In diesem Fall spielt das Gebiet der nicht-aufgelösten Resonanzen für die Resonanzabsorption eine weit größere Rolle als im thermischen Reaktor.

Tab. 3.7: Resonanzintegrale I in barn für homogene Mischungen aus ^{238}U und einem Moderator mit dem Streuquerschnitt $\Sigma^{M}_{n,pot}/N^{R}$ je Absorberatom für 300 °K und 600 °K nach [2].

$\Sigma^{M}_{n,pot}/N^{R}$, b	80	200	500	1250	3775	9440
I(300°K) aufgelöste Res.	21,09	33,39	53,31	84,46	138,81	186,64
I(300°K) unaufgel. Res.	1,86	2,24	2,54	2,73	2,84	2,88
I(300°K)	22,95	35,63	55,85	87,19	141,65	189,52
I(600°K) aufgelöste Res.	22,49	36,41	59,40	95,03	152,79	199,93
I(600°K) unaufgel. Res.	2,01	2,36	2,62	2,78	2,87	2,90
I(600°K)	24,50	38,77	62,02	97,81	155,66	202,83
$\frac{I(600°K)}{I(300°K)} - 1$	0,068	0,088	0,108	0,122	0,099	0,070

In einem thermischen Reaktor wird die Temperaturabhängigkeit der Resonanzabsorption im wesentlichen durch die großen Resonanzlinien bei niederen Energien bestimmt. In einem großen schnellen Brutreaktor mit keramischen Brennstoffen liegt dagegen der Hauptbeitrag zur Resonanzabsorption im Energiebereich von 100 eV bis 50 keV. Da die Resonanzabsorption bei den höheren Resonanzen kleiner ist, wird auch die Änderung der Multiplikationskonstante infolge der Dopplerverbreiterung bei Temperaturerhöhung kleiner. Sie ist in vielen schnellen Reaktoren aber doch wesentlich, da die anderen Temperatureinflüsse ebenfalls eine geringere Rolle als in thermischen Reaktoren spielen. Bezüglich der Berechnung der Resonanzabsorption im Bereich der unaufgelösten Resonanzen mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Halbwertsbreiten (THOMAS-PORTER-Verteilungen) und für die Niveauabstände (WIGNER-Verteilung) verweisen wir auf die Spezialliteratur [10, 18].

3.3.3. Wechselwirkung von dicht liegenden Resonanzlinien

Wir haben bei den bisherigen Rechnungen vorausgesetzt, daß die Resonanzlinien sich gegenseitig nicht beeinflussen, und daß sich oberhalb jeder Resonanzlinie der ungestörte Flußdichteverlauf $\Phi(E) \sim 1/E$ eingestellt hat. Wir haben gesehen, daß bei ^{238}U diese Voraussetzung noch erfüllt ist. Für andere Resonanzabsorber, deren Spitzen sehr nahe beieinander liegen, gilt dies aber nicht mehr, z. B. für ^{235}U, ^{239}Pu oder für gewisse Resonanzlinien bei ^{232}Th. Insbesondere werden auch bei Gemischen von Resonanzabsorbern immer einige Spitzen der verschiedenen Elemente eng benachbart sein. In allen diesen Fällen müssen zur Berechnung der Neutronenquerschnitte an der Stelle E die Beiträge von Resonanzlinien der beteiligten Resonanzabsorber oberhalb und unterhalb E aufaddiert werden. Die einzelne Resonanzlinie kann also nicht mehr allein behandelt werden. (In bestimmten Fällen lassen sich Gruppen von Resonanzlinien so behandeln, wie früher eine einzelne Resonanzspitze behandelt wurde.) Dementsprechend muß die Flußdichte $\Phi(E)$ aus der Bremsgleichung unter Berücksichtigung der so berechneten Wirkungsquerschnitte gewonnen werden. Will man nicht die grobe Näherung $F(u) = \text{const}$ machen, so muß die Bremsgleichung numerisch integriert werden.

Spaltstoff-Moderator-Gemische. Als Beispiele für dicht liegende Resonanzen haben wir in Abschn. 2.3.4b Mischungen aus ^{235}U und

Graphit betrachtet. Die Wirkungsquerschnitte wurden in der Form (II. 2.17) unter Berücksichtigung von Überlappungs- und Interferenzeffekten angesetzt. Den numerisch ermittelten Flußdichteverlauf in den ^{235}U-Graphit-Mischungen zeigen die Abb. 2.8–9. Mit diesen Neutronenspektren wurden von ADLER [6] Wirkungsquerschnitte σ_{fg} des Spaltstoffs ^{235}U für Vielgruppenrechnungen in Abhängigkeit vom C/U-Verhältnis ermittelt. Die Ergebnisse sind in den Tab. 3.8–9 zusammengestellt. Die Einflüsse der Flußabsenkung bei höheren Urankonzentrationen sind deutlich zu erkennen.

Tab. 3.8: Gruppenspaltquerschnitte σ_{fg} von ^{235}U in barn für Energieintervalle $E_1 \ldots E_2$ für ^{235}U-Graphit-Mischungen, $T = 293\,°K$.

Energieintervall		C/U				
E_1	E_2	100	300	500	1000	∞
1,8 eV	4,5 eV	16,85	17,25	17,34	17,40	17,40
4,5	5	6,90	7,21	7,26	7,35	7,35
5	10	39,10	43,47	44,91	46,25	47,65
10	15	36,0	38,61	39,53	40,42	41,69
15	20,5	39,19	44,14	45,92	47,64	49,76
20,5	33	31,67	33,75	34,31	34,78	35,31

Tab. 3.9: Gruppeneinfangquerschnitte σ_γ von ^{235}U in barn für Energieintervalle $E_1 \ldots E_2$ im Resonanzbereich für ^{235}U-Graphit-Mischungen, $T = 293\,°K$.

Energieintervall		C/U				
E_1	E_2	100	300	500	1000	∞
1,8 eV	4,5 eV	11,22	11,66	11,76	11,83	11,83
4,5	5	39,76	43,18	43,94	44,61	45,67
5	10	28,03	33,69	35,41	36,98	38,66
10	15	30,52	36,32	38,34	40,20	42,82
15	20,5	26,99	31,59	33,23	34,79	36,69
20,5	33	37,13	39,14	39,76	40,30	40,82

Spaltstoff-Brutstoff-Gemische. Als Beispiel für die Wechselwirkung von Spaltstoff- und Brutstoff-Resonanzen betrachten wir ein

^{238}U-^{239}Pu-Gemisch einschließlich Struktur- und Kühlmaterialien nach CODD und COLLINS [12]. Die Zusammensetzung sei folgende:

Element	A	$\frac{N}{N^{239}}$	$\sigma_{n,\,pot}$, b
^{239}Pu	239	1	10
^{238}U	238	7	10
Fe	55,85	32	8,911
Na	23	8	3,554
O	16	16	3,7

Wir berechnen die Resonanzintegrale für zwei fiktive Resonanzspitzen mit typischen Halbwertsbreiten in Abhängigkeit von ihrem Abstand. Die ^{238}U-Resonanzlinie liege genau bei 1 keV. Die ^{239}-Pu-Linie werde um einige eV gegenüber der 1 keV-Linie verschoben gedacht. Das Ergebnis der Rechnung für das Resonanzintegral der ^{238}U-Spitze ist in Abb. 3.3, das für die ^{239}Pu-Spitze in Abb. 3.4 dargestellt.

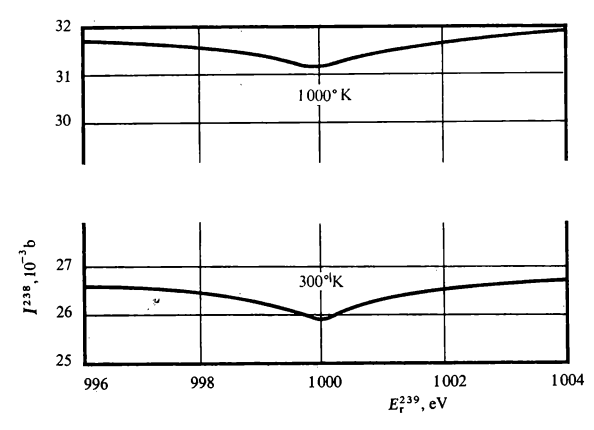


Abb. 3.3: Resonanzintegral für eine fiktive ^{238}U-Linie bei 1 keV als Funktion des Abstandes dieser Linie von einer fiktiven ^{239}Pu-Resonanzlinie.

Die ^{239}Pu-Resonanzlinie hat nach Tab. 3.10 etwa die gleiche Halbwertsbreite Γ wie die ^{238}U-Resonanzlinie. Ihr Spitzenwert ergibt sich nach (3.21) um einen Faktor 2–3 kleiner. Die Störung des

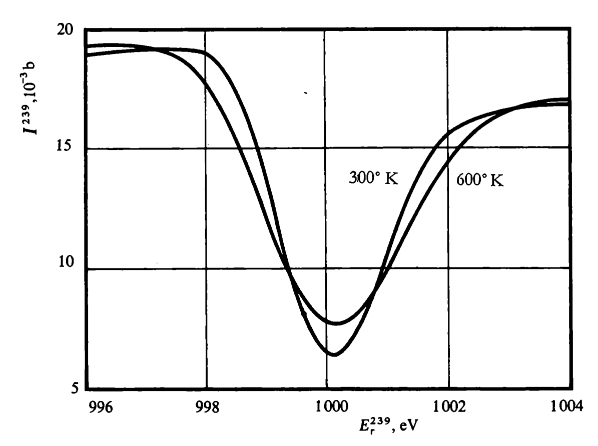


Abb. 3.4: Resonanzintegral für eine fiktive ^{239}Pu-Linie als Funktion des Abstandes dieser Linie von einer fiktiven ^{238}U-Resonanzlinie bei 1 keV.

Tab. 3.10: Resonanzparameter für zwei fiktive Resonanzspitzen von ^{238}U und ^{239}Pu.

	^{238}U	^{239}Pu
E_r	1000 eV	variabel
Γ_γ	0,025 eV	0,038 eV
Γ_f	0 eV	0,076 eV
Γ_n	$0{,}002 \cdot \sqrt{E}$ eV	$0{,}0002 \cdot \sqrt{E}$ eV
g	1	0,75

Resonanzintegrals der ^{238}U-Resonanz (Abb. 3.3) durch die kleine ^{239}Pu-Resonanz ist dementsprechend klein. Die Absorption in der ^{239}Pu-Resonanz ist dagegen empfindlich von der Lage der hohen ^{238}U-Resonanz abhängig, da diese eine beträchtliche Störung der Flußdichte $\Phi(E)$ erzeugt. Aus Abb. 3.4 ist ferner der Einfluß der gegenseitigen Lage der beiden Spitzen auf die Temperaturabhängigkeit des Resonanzintegrals von ^{239}Pu zu erkennen. Fallen die beiden Spitzen zusammen oder sind sie mehr als 3 eV getrennt, so nimmt das Resonanzintegral der ^{239}Pu-Spitze mit der Temperatur zu. Beträgt der Abstand der Resonanzen dagegen 1–3 eV, so nimmt das Resonanzintegral der ^{239}Pu-Spitze mit wachsender Temperatur ab.

Aufgaben

3.1. Man beweise, ausgehend von (3.3), daß die Bremsnutzung für Wasserstoffbremsung die Form (2.15) hat.

3.2. Welcher Bruchteil der Resonanzabsorption in einer ^{238}U-Graphit-Mischung entfällt auf die 6,7-eV-Resonanz von ^{238}U? Mischungsverhältnisse $N^C/N^U = 30$ und 3000, $T = 300$ °K.

3.3. In einem quasihomogenen Thorium-Hochtemperaturreaktor betrage das Graphit-Thorium-Atomzahlverhältnis $N^C/N^{Th} = 500$. Wie ändert sich die Bremsnutzung p infolge des Doppler-Effekts beim Anfahren des Reaktors auf Leistung? Die Betriebstemperatur im Brennstoff sei 1000 °C. Man benütze Abb. 3.2 zur Bestimmung des Resonanzintegrals I.

3.4. Man berechne die Bremsnutzung p^{238} für eine homogene Mischung aus Polyäthylen $(CH_2)_n$ und Uranoxyd U_3O_8 im Unterrichtsreaktor SUR-100. $N^{238} = 6{,}2 \cdot 10^{20}$ cm^{-3}, $N^H = 7{,}6 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}.

3.5. Man schätze die Konversionsrate in einem großen quasihomogenen Thorium-Hochtemperaturreaktor ab. $N^{\text{Brutstoff}}/N^{\text{Spaltstoff}} = 10:1$, $N^{\text{Brutstoff}}/N^{\text{Moderator}} = 1:500$ und $1:200$, $T^{\text{Brutstoff}} = 1000$ °K.

4. Resonanzabsorption in heterogenen Medien

In den meisten thermischen Reaktoren sind Brennstoff und Moderator getrennt. Ein Beispiel sind die wassermoderierten und -gekühlten Leistungsreaktoren, deren Spaltzone aus einem „Gitter“ zylindrischer Brennstoffstäbe besteht, an denen das Wasser entlangströmt. Die Erzeugung der „Resonanzneutronen“ mit Lethargien im Bereich der Resonanzlinie erfolgt vor allem im Moderator außerhalb des Brennstoffs. Ist die Absorptionsresonanzlinie des Brennstoffs sehr hoch, so werden die in den Brennstoff eindringenden Resonanzneutronen schon in der Randzone des Stabes absorbiert. Die im Inneren des Stabes gelegenen Kerne sind somit gegen Resonanzneutronen abgeschirmt. Die Resonanzabsorption ist daher bei gleicher Brennstoff- und Moderatorkonzentration in der heterogenen Anordnung kleiner als in der homogenen.

Im Bereich der schnellen Neutronen sind die Resonanzspitzen niedrig, die Selbstabschirmung des Brennstoffs ist also klein. Sind die mittleren freien Weglängen der Neutronen im Brennstoff, Strukturmaterial und Kühlmittel groß gegen deren Durchmesser, so kann eine heterogene Anordnung neutronenphysikalisch als homogen betrachtet werden. Dies trifft bei schnellen Reaktoren weitgehend zu.

4.1. Allgemeine Formulierung der Resonanzabsorption in der Zelle eines Brennstoffgitters.

4.1.1. Die Neutronenflußdichte im Resonanzabsorber

Wir betrachten im folgenden einen typischen Ausschnitt des Brennstoffgitters, bestehend aus einem Brennstoffstab (Gebiet 0) und dem anteiligen Moderator (Gebiet 1), die sog. Zelle.

Die in den Lethargiebereich der Resonanzlinie fallenden Resonanzneutronen werden überwiegend durch Abbremsung im Moderator, aber auch durch Abbremsung im Brennstoff (der z. T. leichte Elemente wie O und C enthält) erzeugt. Bezeichnet P^{10} die Wahrscheinlichkeit, daß ein irgendwo im Moderator (Gebiet 1) erzeugtes Resonanzneutron im Brennstoff (Gebiet 0) stößt, und P^{00} entsprechend die Wahrscheinlichkeit, daß ein irgendwo im Brennstoff (Gebiet 0) erzeugtes Resonanzneutron seinen nächsten Stoß im Brennstoff macht, so können wir die Stoßratendichte der Resonanzneutronen im Gebiet 0 unter Erweiterung von (2.4) wie folgt formulieren [15*]:

$$V^0 \Sigma_T{}^0(u)\, \Phi^0(u) = V^0 P^{00}(u) \left[\frac{1}{1-\alpha^{0R}} \int\limits_{u+\ln \alpha^{0R}}^{u} \Sigma_n^{0R}(u')\, \Phi^0(u')\, e^{u'-u}\, du' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1-\alpha^{0M}} \int\limits_{u+\ln \alpha^{0M}}^{u} \Sigma_n^{0M}(u')\, \Phi^0(u')\, e^{u'-u}\, du' \right] +$$
$$+ V^1 P^{10}(u) \frac{1}{1-\alpha^{1M}} \int\limits_{u+\ln \alpha^{1M}}^{u} \Sigma_n^{1M}(u')\, \Phi^1(u')\, e^{u'-u}\, du'. \qquad (4.1)$$

---

* Diese Überlegungen bekommen einen besonderen Akzent, wenn man mit begrenzten Mengen an Natururan und Schwerem Wasser einen kritischen Reaktor bauen will. Das war die Situation in Deutschland um 1940f. Man ging daher den Heterogenitätseffekten besonders sorgfältig nach. So entstanden in Deutschland schon in den Jahren 1939/40 auf der Basis der Stoßwahrscheinlichkeiten Rechnungen über die bestmögliche heterogene Struktur bei verschiedenen Moderatoren u. a. von W. Heisenberg: Die Möglichkeit technischer Energiegewinnung aus der Uranspaltung (1939/40, betrifft u. a. die Berechnung von Resonanzverlusten und Neutronenvermehrung durch schnelle Spaltungen), C. F. v. Weizsäcker, P. O. Müller und K. H. Höcker: Berechnung der Energieerzeugung in der (heterogenen) Uranmaschine I–IV (1940, Festlegung der günstigsten Abmessungen), C. F. v. Weizsäcker: Energiegewinnung aus dem Uranspaltprozeß durch schnelle Neutronen (1940). Nach 1945 sind diese Ansätze nicht weiter entwickelt worden.

Dabei bezeichnet

$$\Phi^i(u) = \frac{1}{V^i} \int_{V^i} \Phi(\mathbf{r}, u)\, \mathrm{d}V \tag{4.2}$$

die mittlere Flußdichte im Gebiet i. Die Wirkungsquerschnitte sind gebietsweise als ortsunabhängig angenommen. Ganz entsprechend gilt für die Stoßratendichte im Gebiet 1

$$\begin{aligned} V^1 \Sigma_\mathrm{T}^1(u)\Phi^1(u) = V^0 P^{01}(u) \Bigg[&\frac{1}{1-\alpha^{0\mathrm{R}}} \int_{u+\ln\alpha^{0\mathrm{R}}}^{u} \Sigma_\mathrm{n}^{0\mathrm{R}}(u')\Phi^0(u')\mathrm{e}^{u'-u}\,\mathrm{d}u' + \\ &+ \frac{1}{1-\alpha^{0\mathrm{M}}} \int_{u+\ln\alpha^{0\mathrm{M}}}^{u} \Sigma_\mathrm{n}^{0\mathrm{M}}(u')\,\Phi^0(u')\,\mathrm{e}^{u'-u}\,\mathrm{d}u' \Bigg] + \\ &+ V^1 P^{11}(u) \frac{1}{1-\alpha^{1\mathrm{M}}} \int_{u+\ln\alpha^{1\mathrm{M}}}^{u} \Sigma_\mathrm{n}^{1\mathrm{M}}(u')\,\Phi^1(u')\,\mathrm{e}^{u'-u}\,\mathrm{d}u'. \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2. Stoßwahrscheinlichkeiten

Die Gleichungen (4.1, 3) wären exakt, wenn für die Stoßwahrscheinlichkeiten P^{ik} exakte Werte berechnet werden könnten. Hierzu müßte von der genauen räumlichen Verteilung der Quelldichte für die Resonanzneutronen ausgegangen werden, die man zunächst nicht kennt. In der Praxis nimmt man daher zur Berechnung der Stoßwahrscheinlichkeiten in jedem Gebiet eine räumlich konstante isotrope Quelldichte an. Bedenkt man, daß die Resonanzneutronen bei Absorbern mit schmalen, weit getrennten Resonanzen (wie ^{238}U) vorwiegend aus Lethargiebereichen mit ungestörtem Bremsspektrum und räumlich konstanter Flußdichte eingestreut werden, so erkennt man, daß diese Annahme weitgehend gerechtfertigt ist.

Gegeben sei eine räumlich konstante, isotrop emittierende Neutronenquelle im Gebiet i. Aus dem Volumelement $\mathrm{d}V^i$ an der Stelle $\boldsymbol{r}^i$ werden je s $Q^i\, dV^i\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/4\,\pi$ Neutronen in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$ um $\boldsymbol{\Omega}$ emittiert. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Neutron die Strecke $R = |\boldsymbol{r}^i - \boldsymbol{r}^k|$ ohne Stoß durchläuft, dann

aber im Element $\mathrm{d}R$ stößt, beträgt nach Abschn. II. 1.1 $\mathrm{e}^{-\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R}}\,\mathrm{d}R/\lambda(\boldsymbol{r}^k)$. Die Größe $\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R}$ bezeichnet dabei den „optischen" Weg im heterogenen Medium zwischen $\boldsymbol{r}^i$ und $\boldsymbol{r}^k$: $\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R^i} = \Sigma_\mathrm{T}^i\, R^i + \Sigma_\mathrm{T}^k\, R^k$, wobei R^i und R^k die auf das Gebiet i bzw. k entfallenden geradlinigen Teilwege sind: $R = R^i + R^k$. Diese Darstellung kann sinngemäß auf mehr als zwei Gebiete erweitert werden. Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit P^{ik}

$$P^{ik} = \frac{\int\limits_{V^i}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{R} \dfrac{Q^i \cdot \mathrm{e}^{-\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R}}}{4\,\pi\,\lambda_\mathrm{T}^k}\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}V^i}{\int\limits_{V^i} Q^i\,\mathrm{d}V^i} = \frac{1}{V^i}\int\limits_{V^i}\int\limits_{V^k} \frac{\Sigma_\mathrm{T}^k\,\mathrm{e}^{-\Sigma_\mathrm{T}|\boldsymbol{r}^i - \boldsymbol{r}^k|}}{4\,\pi\,|\boldsymbol{r}^i - \boldsymbol{r}^k|^2}\,\mathrm{d}V^i\,\mathrm{d}V^k. \tag{4.4}$$

In (4.4) wurde verwendet, daß Q^i nach Voraussetzung ortsunabhängig ist und $\mathrm{d}V^k = R^2\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\Omega$ (Quellort gleich Ursprung dieses räumlichen Polarkoordinatensystems) gilt. Bei gebietsweise räumlich konstanten Wirkungsquerschnitten folgt aus (4.4) unmittelbar die Reziprozitätsbeziehung

$$V^i\,\Sigma_\mathrm{T}^i\,P^{ik} = V^k\,\Sigma_\mathrm{T}^k\,P^{ki}. \tag{4.5}$$

Nehmen wir zunächst einmal an, die Moderatorschicht zwischen den Stäben sei so dick, daß ein Neutron, das den Brennstoffstab verläßt, ohne zu stoßen, sicher im Moderator und nicht im Nachbarstab stößt. Es gilt dann ersichtlich

$$P^{00} + P^{01} = 1. \tag{4.6}$$

Mit (4.5) und (4.6) lassen sich alle Stoßwahrscheinlichkeiten in (4.1, 3) auf eine Stoßwahrscheinlichkeit, z. B. P^{01}, zurückführen. Für die mittlere Neutronenflußdichte im Brennstoff gilt dann nach (4.1) die Gl. (4.7).

Ist das Gitter dagegen eng, so daß ein Neutron mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit im freien Flug den Moderator durchqueren und im Nachbarstab stoßen kann, so hat man nach NORDHEIM [2] in Gl. (4.7) anstelle von P^{01} die Größe P^{01*} gemäß (4.8) zu verwenden.

$$\Phi^0(u) =$$

$$= [1 - P^{01}(u)] \frac{1}{\Sigma_T^0(u)} \left[\frac{1}{1-\alpha^{0R}} \int\limits_{u+\ln\alpha^{0R}}^{u} \Sigma_n^{0R}(u')\, \Phi^0(u')\, e^{u'-u}\, du' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\alpha^{0M}} \int\limits_{u+\ln\alpha^{0M}}^{u} \Sigma_n^{0M}(u')\, \Phi^0(u')\, e^{u'-u}\, du' \right] + \tag{4.7}$$

$$+ P^{01}(u) \frac{1}{\Sigma_T^1(u)} \frac{1}{1-\alpha^{1M}} \int\limits_{u+\ln\alpha^{1M}}^{u} \Sigma_n^{1M}(u')\, \Phi^1(u')\, e^{u'-u}\, du'.$$

Bei engen Gittern: $$P^{01*} = \frac{(1-C)(1-P^{00})}{1-\left[1 - l^0\, \Sigma_T^0\, (1-P^{00})\right] C}. \tag{4.8}$$

Dabei ist $$l^0 = 4\, V^0/S^0 = 2\, a \tag{4.8a}$$

die mittlere Sehnenlänge des Brennstoffstabes mit Radius a (V^0/S^0 ist das Verhältnis Volumen/Oberfläche des Stabes). C ist die Dancoff-Ginsburg-Korrektur, die von CARLVIK für quadratische und hexagonale Gitter ausführlich tabelliert wurde [13]. Einen Auszug gibt Tab. 4.1 wieder. Für weite Gitter geht $C \to 0$ und damit $P^{01*} \to P^{01}$, vgl. (4.8, 6). Die Stoßwahrscheinlichkeit P^{00} ist von CASE, DE HOFFMANN und PLACZEK [14] für Platte, Zylinder und Kugel berechnet worden. Tab. 4.2 zeigt einige Ergebnisse für die Größe $1-P^{00}$, die Entkommwahrscheinlichkeit für einen einzelnen Körper.

Wigner hat eine geometrie*un*abhängige Näherung (die sog. rationale Näherung) für die Entkommwahrscheinlichkeit $1 - P^{00}$ angegeben, die die Grenzwerte für sehr dünne und sehr dicke Körper richtig wiedergibt:

$$P^{01} = 1 - P^{00} = \frac{1}{1 + l^0\, \Sigma_T^0}. \tag{4.9}$$

Die Fehler dieser Näherung können allerdings bis zu 20 % betragen, wie Tab. 4.2 zeigt. Setzen wir die rationale Näherung in (4.8) ein, so folgt für die Entkommwahrscheinlichkeit im Gitter

$$P^{01*} = \frac{1}{1 + l^0\, \Sigma_T^0/(1-C)}. \tag{4.10}$$

Tab. 4.1: Dancoff-Ginsburg-Korrektur C für ein unendlich ausgedehntes quadratisches Brennstoffgitter [13] (a = Stabradius, d = Abstand der Stäbe).

$\Sigma_T^1 \cdot d$	a/d							
	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,48	0,5
0,25	0,579	0,655	0,721	0,779	0,834	0,886	0,916	0,937
0,5	0,381	0,466	0,548	0,628	0,710	0,793	0,845	0,882
0,75	0,268	0,347	0,429	0,517	0,612	0,716	0,784	0,834
1	0,197	0,266	0,343	0,431	0,533	0,650	0,731	0,792
1,25	0,149	0,208	0,279	0,364	0,468	0,594	0,684	0,754
1,5	0,115	0,166	0,230	0,310	0,413	0,544	0,642	0,721
1,75	0,090	0,134	0,191	0,266	0,367	0,501	0,605	0,691
2	0,071	0,109	0,160	0,230	0,328	0,463	0,572	0,664
3	0,030	0,051	0,083	0,134	0,216	0,348	0,468	0,580
4	0,014	0,025	0,046	0,083	0,148	0,270	0,395	0,521
5	0,006	0,013	0,026	0,052	0,105	0,216	0,341	0,477
6	0,003	0,007	0,015	0,034	0,076	0,175	0,299	0,444

Tab. 4.2: Die Entkommwahrscheinlichkeit $1-P^{00}$ [2, 14].

$l^0\,\Sigma_T^0$	Kugel	Zylinder	Platte	Rationale Näherung
0,04	0,978	0,974	0,952	0,962
0,1	0,946	0,939	0,902	0,909
0,2	0,896	0,885	0,837	0,833
0,3	0,850	0,819	0,785	0,769
0,5	0,767	0,753	0,701	0,667
1	0,607	0,596	0,557	0,500
2	0,411	0,407	0,390	0,333
3	0,302	0,302	0,295	0,250
5	0,193	0,193	0,193	0,167
10	0,099	0,099	0,100	0,091

(4.10) wird häufig auch in der Form

$$P^{01*} = \frac{\Sigma_e^*}{\Sigma_e^* + \Sigma_T^0} \tag{4.11}$$

geschrieben, wobei

$$\Sigma_e^* = \frac{1 - C}{l^0} = \frac{(1 - C) S^0}{4\, V^0} = N^R \sigma_e^* \tag{4.12}$$

formal als makroskopischer Wirkungsquerschnitt für das Entkommen der Neutronen aus dem Resonanzabsorber eingeführt wurde.

4.1.3. Bremsnutzung, Resonanzintegral und mittlerer Absorptionsquerschnitt für das Brennstoffgitter

Da im unendlich ausgedehnten Brennstoffgitter über den Zellrand ebensoviel Neutronen aus- wie einströmen, muß die Absorption in der Zelle gleich der Änderung der Bremsdichte in der Zelle sein. Vernachlässigen wir die Absorption im Moderator gegenüber der Resonanzabsorption im Brennstoff, so gilt nach (3.1) die Bilanzgleichung

$$V^0 \int_{u_1}^{u_2} \Sigma_A^{0R}(u)\, \Phi^0(u)\, du = (V^0 + V^1) \left[\bar{q}(u_1) - \bar{q}(u_2)\right]. \tag{4.13}$$

Dabei ist

$$\bar{q}(u) = \frac{\int_V q(\boldsymbol{r}, u)\, dV}{\int_V dV} = \frac{V^0}{V^0 + V^1} q^0(u) + \frac{V^1}{V^0 + V^1} q^1(u) \tag{4.14}$$

die mittlere Bremsdichte in der Zelle. Φ^0 bezeichnet gemäß (4.2) die mittlere Flußdichte im Brennstoff. Die Bilanzgleichung (4.13) für die Zelle geht also aus der Bilanzgleichung (3.1) für das homogene Medium formal dadurch hervor, daß wir Flußdichte und Bremsdichte durch die über die Zelle integrierten Größen ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir für die Brennstoffgitter aus (3.7–13) die folgenden Formeln für Resonanzintegral I_{eff}, Bremsnutzung p und mittleren Resonanzabsorptionsquerschnitt σ_{Ag} für die Energiegruppe g:

$$I_{\text{eff}} = \int_{u_1}^{u_2} \sigma_A^0(u)\, \varphi^0(u)\, du, \tag{4.15}$$

$$\varphi^0(u) = \frac{\Phi^0(u)}{\Phi^0(u_1)} \tag{4.16}$$

$$p = 1 - \frac{I_{\text{eff}}}{\sum\limits_i V^i \bar{\xi}^i \Sigma^i_{\text{n, pot}}/N^{0\text{R}} V^0} \approx e^{-\frac{I}{\sum\limits_i V^i \bar{\xi}^i \Sigma^i_{\text{n, pot}}/N^{0\text{R}} V^0}}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\text{A}g} = \frac{\int\limits_{\Delta u_g} \sigma^0_{\text{A}}(u)\, \Phi^0(u)\, \mathrm{d}u}{\int\limits_{\Delta u_g} \Phi^0(u)\, \mathrm{d}u} = \frac{I_{\text{eff}\,g}}{\int\limits_{\Delta u_g} \varphi^0(u)\, \mathrm{d}u}. \quad (4.18)$$

Dabei wurde analog zum homogenen Fall angenommen, daß sich im absorptionsfreien Bereich vor und zwischen den Resonanzen jeweils das ungestörte, räumlich konstante Bremsspektrum $\Phi(u, \boldsymbol{r}) = \text{const}$ einstellt.

4.2. Berechnung des Resonanzintegrals für das Brennstoffgitter

4.2.1. NR- und IM-Näherung

Aus (4.7) erhalten wir mit der Normierung (4.16) analog zum homogenen Fall (Abschn. 3.2) folgende Formeln für die Flußdichte im Brennstoff in NR- und IM-Näherung:

$$\varphi^0(u) = \left[1 - P^{01*}(u)\right] \frac{\Sigma^0_{\text{n, pot}}}{\Sigma^0_{\text{T}}(u)} + P^{01*}(u), \quad (\text{NR}) \quad (4.19)$$

$$\varphi^0(u) = \frac{\left[1 - P^{01*}(u)\right] \frac{\Sigma^{0\text{M}}_{\text{n, pot}}}{\Sigma^0_{\text{T}}(u)} + P^{01*}(u)}{1 - \left[1 - P^{01*}(u)\right] \frac{\Sigma^{0\text{R}}_{\text{n}}}{\Sigma^0_{\text{T}}(u)}} \quad (\text{IM}). \quad (4.20)$$

Damit kann das Resonanzintegral (4.15) in NR- und IM-Näherung formuliert werden. Führen wir für P_{01} die rationale Näherung (4.11) ein, so folgt für das Resonanzintegral der Resonanzlinie r (vgl. (3.17, 19) für den homogenen Fall)

$$I_r = \int\limits_{u_1}^{u_2} \sigma^0_{\text{A}}(u) \frac{\Sigma^0_{\text{n, pot}} + \Sigma^*_{\text{e}}}{\Sigma^0_{\text{T}}(u) + \Sigma^*_{\text{e}}}\, \mathrm{d}u$$

$$= I_{r\infty} \cdot \frac{\beta_r}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta_r) \cdot \mathrm{d}x}{\psi(x, \zeta_r) + \gamma_r\, \chi(x, \zeta_r) + \beta_r} \quad (\text{NR}). \quad (4.21)$$

mit (vgl. (3.20))

$$\beta_r = \frac{\Sigma^0_{\mathrm{n,pot}} + \Sigma^*_{\mathrm{e}}}{\Sigma_r^{0\,\mathrm{R}}}, \tag{4.22}$$

und (vgl. (3.27–29))

$$I_r = \int\limits_{u_1}^{u_2} \sigma^0_{\mathrm{A}}(u) \frac{\Sigma^{0\mathrm{M}}_{\mathrm{n,pot}} + \Sigma^*_{\mathrm{e}}}{\Sigma^{0\mathrm{R}}_{\mathrm{A}}(u) + \Sigma^{0\mathrm{M}}_{\mathrm{n,pot}} + \Sigma^*_{\mathrm{e}}}\, du$$

$$= I_{r\,\infty} \cdot \frac{\beta_r'}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x, \zeta_r)}{\psi(x, \zeta_r) + \beta_r'}\, \mathrm{d}x \qquad \text{(IM)} \tag{4.23}$$

mit

$$\beta_r' = \frac{\Sigma^{0\mathrm{M}}_{\mathrm{n,pot}} + \Sigma^*_{\mathrm{e}}}{\hat{\Sigma}^{0\mathrm{R}}_{\mathrm{A}}}. \tag{4.24}$$

Die Resonanzintegrale (4.21) und (4.23) für das Brennstoffgitter haben in der rationalen Näherung die gleiche Form wie die Resonanzintegrale (3.19) und (3.28) für den homogenen Fall. Im homogenen Fall tritt lediglich an die Stelle von Σ^*_{e} der Streuquerschnitt des Moderators $\Sigma^{1\mathrm{M}}_{\mathrm{n,pot}}$.

Im Sonderfall $T \to 0$ gilt unter Vernachlässigung der Interferenzstreuung für beide Resonanzintegrale die Formel (3.24). Da β_r und β_r' für die großen Resonanzen, die den Hauptbeitrag zur Resonanzabsorption liefern, klein gegen 1 sind, gilt näherungsweise unter Beachtung von (4.12)

$$I_r \approx I_{r\,\infty} \sqrt{\beta_r} = \frac{I_{r\,\infty}}{\sqrt{\Sigma_r^{0\mathrm{R}}}} \sqrt{\Sigma^0_{\mathrm{n,pot}} + (1 - C)\, S^0/4\, V^0} \quad \text{(NR)}, \tag{4.25}$$

$$I_r \approx I_{r\,\infty} \sqrt{\beta_r'} = \frac{I_{r\,\infty}}{\sqrt{\hat{\Sigma}^{0\mathrm{R}}_{\mathrm{A}}(u_r)}} \sqrt{\Sigma^{0\mathrm{M}}_{\mathrm{n,pot}} + (1 - C)\, S^0/4\, V^0} \quad \text{(IM)}. \tag{4.26}$$

Für $T > 0$ können (4.21) und (4.23) analog zu (3.25) und (3.30) mit Hilfe der tabellierten Funktion $\mathrm{J}(\beta, \zeta)$ (s. Tab. 3.3) ermittelt werden. – Eine genauere Berechnung des Resonanzintegrals, die ohne die Wignersche rationale Näherung (4.11) auskommt, ist mit Hilfe von weiteren Tabellen in [16] möglich.

4.2.2. Numerische Berechnung des Resonanzintegrals und Vergleich mit dem Experiment

Wir geben nachstehend einige Ergebnisse aus [2, 10] in tabellarischer Gegenüberstellung. In Tab. 4.3 sind die NR- und IM-Näherung mit einer numerischen Berechnung des Resonanzintegrals verglichen. Die Interferenzstreuung ist dabei vernachlässigt.

Tab. 4.4 gibt einen Vergleich zwischen numerischer Rechnung und Experiment für das gesamte Resonanzintegral von Uranmetallstäben verschiedener Radien.

Tab. 4.3: Resonanzintegral in b für einzelne Resonanzlinien von ^{238}U. U-Metallstäbe mit Radius $a = 0{,}422$ cm bei 300 °K.

E_r	I_{IM}	I_{NR}	I_{exakt}	Klassifizierung der Resonanzlinien nach Tab. 3.1
6,68 eV	4,75	5,40	4,84	IM
81,0	0,226	0,258	0,251	NR
103	0,554	0,601	0,424	IM
475		0,432	0,431	NR

Tab. 4.4: Resonanzintegrale I in b von Uranmetallstäben der Dichte 18,7 g/cm^3 bei 300 °K nach Theorie und Experiment.

Stabradius, cm	0,106	0,211	0,422	0,844	1,69
Aufgelöste Resonanzen	25,29	18,04	12,91	9,31	6,75
Unaufgelöste s-Wellen-Resonanzen bis 30 keV	1,96	1,67	1,40	1,18	1,03
p-Wellen-Resonanzen oberhalb 1 keV u. Absorption oberhalb 30 keV	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7
I (Theorie)	28,95	21,41	16,01	12,19	9,48
I (Experiment)	28,91	21,28	15,95	12,18	9,45

Messungen des gesamten Resonanzintegrals $I = \sum_r I_r$ für weitgetrennte Stäbe (Dancoff-Korrektur $C \to 0$) werden gewöhnlich in der Form

$$I = A + B \sqrt{\frac{S^0}{M^0}} \tag{4.27}$$

dargestellt. A und B sind von der Art des Brennstoffs und von der Temperatur T abhängig, Werte in Tab. 4.5. S^0 ist die Oberfläche, $M^0 = \varrho \cdot V^0$ die Masse des Brennstoffstabes.

Das Resonanzintegral für einen Brennstoffstab in einem engen Gitter ($C \neq 0$) lautet

$$I = A + B \sqrt{\frac{S^0 (1 - C)}{M^0}} \,. \tag{4.28}$$

Die Form (4.28) mit der Geometrieabhängigkeit $\sqrt{S^0 (1 - C)/M^0}$ wird auch von der Theorie nahegelegt, vgl. (4.25–26). Das Resonanzintegral ist im engen Gitter kleiner als im weiten Gitter, da die Einstreuung der Resonanzneutronen aus dem Moderator in den Brennstoffstab durch die Nachbarstäbe teilweise abgeschirmt wird.

Tab. 4.5: Die Konstanten des Resonanzintegrals der Form (4.28) bei 300 °K.

Brennstoff	Dichte ϱ	A	B
^{238}U-Metall	18,7 g/cm^3	2,95	25,8
$^{238}UO_2$	10,2	4,45	26,6
^{232}Th-Metall	11,7	1,4	16,1
$^{232}ThO_2$	7,1	3,1	15,6

Die Temperaturabhängigkeit des Resonanzintegrals kann für das Zusammenwirken vieler Resonanzen empirisch in der Form

$$I(T) = I(300)\left[1 + \varkappa\left(\sqrt{T} - \sqrt{300}\right)\right] \tag{4.29}$$

dargestellt werden. Der Temperaturkoeffizient $\varkappa$ in (4.29) ist in der Tab. 4.6 wiedergegeben.

Tab. 4.6: Temperaturkoeffizient $\varkappa \cdot 10^2$ des Resonanzintegrals (4.29) für verschiedene Temperaturbereiche und Stabradien.

^{238}U-Metall

Stabradius, cm	0,1055	0,211	0,422	0,844	1,69
300–600 °K	0,930	0,731	0,613	0,544	0,561
300–900 °K	0,961	0,743	0,609	0,528	0,513
Mittelwert	0,95	0,74	0,61	0,53	0,53

$^{238}UO_2$

Stabradius, cm	0,125	0,25	0,50	1,0	2,0
300–600 °K	1,16	0,913	0,720	0,648	0,570
300–900 °K	1,20	0,942	0,760	0,647	0,585
300–1200 °K	1,22	0,956	0,762	0,636	0,565
300–1500 °K	1,24	0,976	0,771	0,645	0,571
Mittelwert	1,21	0,94	0,75	0,64	0,57

Th-Metall

Stabradius, cm	0,130	0,275	0,55	1,1	2,2
300–600 °K	1,679	1,509	1,303	1,080	0,923
300–900 °K	1,637	1,475	1,252	0,996	0,856

ThO_2

Stabradius, cm	0,25	0,5	1,0	2,0
300–600 °K	1,684	1,536	1,344	1,182
300–900 °K	1,632	1,499	1,311	1,143

Aufgaben

4.1. Man berechne die Bremsnutzung für ein quadratisches Brennstoffgitter aus UO_2-Stäben in H_2O auf der Basis von (4.28). Stabradius $a = 0{,}5$ cm. $V^{H_2O} : V^{UO_2} = 2:1$. $T = 300$ °K, Wirkungsquerschnitte nach Aufg. 1.7. Man prüfe, welchen Einfluß die Dancoff-Korrektur hat.

4.2. Man schätze die Änderung der Bremsnutzung für das in Aufgabe 4.1 angegebene Brennstoffgitter beim Anfahren auf Leistung ab. Die effektive Brennstofftemperatur steige von 300 °K auf 1100 °K. Die Wasserdichte beträgt bei 286 °C und 71 ata 0,75 g/cm³.

4.3. Wie ändert sich die Bremsnutzung des in Aufgabe 4.2 beschriebenen Brennstoffgitters, wenn im Kühlmittel Sieden zugelassen wird mit einem durchschnittlichen Dampfgehalt von 19 Vol. %. Die Dampfdichte beträgt 0,036 g/cm³.

4.4. Wie ändert sich die Bremsnutzung, wenn einem schwach angereicherten (3 % ^{235}U) Uran-Wasser-Reaktor mit einer anfänglichen Moderatorzusammensetzung von 80 % D_2O und 20 % H_2O im Laufe des Langzeitbetriebs leichtes Wasser zugesetzt wird (spectral shift control), bis der D_2O-Anteil schließlich nur noch 2 % beträgt? Das Brennstoffgitter ist wie folgt charakterisiert: Stabradius $a = 0{,}4$ cm, $V^{Mod}/V^{UO_2} = 3$. Die Wasserdichte beträgt bei 265 °C und 140 ata 0,79 g/cm³. Die effektive Brennstofftemperatur sei 1000 °K. Wirkungsquerschnitte nach Aufg. 1.7.

5. Der Schnellspaltfaktor für Brutstoffe

Schnelle Neutronen mit Energien oberhalb 1,5 MeV können auch in den Brutstoffen ^{238}U und ^{232}Th Spaltungen auslösen (s. Abb. II. 3.9). Bei thermischen Reaktoren mit Natururan oder schwach angereichertem Uran reicht die Erhöhung der Multiplikationskonstante infolge dieser Schnellspaltungen von etwa 3 % bei weiten Natururan-Graphit-Gittern bis in die Größe von 10 % bei engen Uran-Leichtwasser-Gittern. Als Schnellspaltfaktor ε für Brutstoffe definieren wir das Verhältnis der Zahl der unter die Spaltschwelle E_s der Brutstoffe gelangenden Neutronen zu der Zahl der durch thermische Spaltungen erzeugten Neutronen. Für Natururan und schwach angereichertes Uran gilt

$$\varepsilon^{238} = \frac{\Sigma_{12}^{M}\,\Phi_s^{M} + \Sigma_{12}^{B}\,\Phi_s^{B}}{\nu_{th}^{235}\,\Sigma_{f\,th}^{235}\,\Phi_{th}}. \tag{5.1}$$

Hierbei haben wir die schnellen Neutronen oberhalb der Spaltschwelle in eine Energiegruppe s mit der mittleren Flußdichte Φ_s^B im Brennstoffstab und Φ_s^M im Moderator zusammengefaßt. Die Zonenindizes 0 und 1 fallen hier mit den Materialkennzeichen B und M zusammen. Σ_{12} ist der Bremsquerschnitt für die Neutronenstreuung aus dem Bereich oberhalb E_s nach unterhalb E_s.

In der Zelle eines unendlich ausgedehnten Gitters gilt folgende Bilanz für die schnellen Neutronen:

$$\Sigma_{12}^{M}\,\Phi_s^{M} + \Sigma_{12}^{B}\,\Phi_s^{B} = \tag{5.2}$$
$$= \nu_{th}^{235}\,\Sigma_{f\,th}^{235}\,\Phi_{th}^{B} + \nu_s^{238}\,\Sigma_{f\,s}^{238}\,\Phi_s^{B} - \Sigma_{f\,s}^{238}\,\Phi_s^{B} - \Sigma_{\gamma\,s}\,\Phi_s^{B}.$$

Absorptionen im Moderator sowie schnelle Spaltungen und Absorptionen im ^{235}U werden vernachlässigt. Setzt man (5.2) in (5.1) ein, ergibt sich

$$\varepsilon^{238} = \frac{\nu_{\mathrm{th}}^{235}\, \Sigma_{\mathrm{f\,th}}^{235}\, \Phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{B}} + \nu_{\mathrm{s}}^{238}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}\, \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} - \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}\, \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} - \Sigma_{\gamma\,\mathrm{s}}^{238}\, \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}}}{\nu_{\mathrm{th}}^{235}\, \Sigma_{\mathrm{f\,th}}^{235}\, \Phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{B}}}$$

$$= 1 + \frac{\nu_{\mathrm{s}}^{238} - 1 - \alpha_{\mathrm{s}}^{238}}{\nu_{\mathrm{th}}^{235}} \cdot \delta, \tag{5.3}$$

wobei

$$\delta = \frac{\Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}\, \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}}}{\Sigma_{\mathrm{f\,th}}^{235}\, \Phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{B}}} \tag{5.4}$$

das Verhältnis von schnellen Spaltungen zu thermischen Spaltungen darstellt; $\alpha_{\mathrm{s}}^{238} = \sigma_{\gamma\,\mathrm{s}}^{238} / \sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}$.

Für die Berechnung von ε^{238} ist neben den Materialkonstanten die Kenntnis des Flußverhältnisses im Brennstoffstab notwendig. Wir fragen nach der Größe der Flußdichte $\Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}}$, wenn $\Phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{B}}$ vorgegeben ist. Dazu berechnen wir die Stoßrate der schnellen Neutronen oberhalb der Spaltschwelle E_{s} zunächst in einem isolierten Brennstoffstab analog zu (4.1). Wir nehmen dabei an, daß alle Neutronen, die im Moderator einen elastischen Stoß und im Brennstoff einen unelastischen Stoß erleiden, unter die Spaltschwelle abgebremst werden. Als Quellen treten daher nur die Spaltneutronen und elastische Streuungen am Brennstoff auf. Somit ist die Stoßrate der schnellen Neutronen im Brennstoffstab mit dem Volumen V^0

$$V^0\, \Sigma_{\mathrm{T\,s}}^{\mathrm{B}}\, \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} = \tag{5.5}$$

$$= V^0\, P^{00} \left[\Sigma_{\mathrm{n\,s}}^{\mathrm{B}} \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} + \chi_{\mathrm{s}}\, \nu_{\mathrm{s}}^{238}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238} \Phi_{\mathrm{s}}^{\mathrm{B}} + \chi_{\mathrm{s}}\, \nu_{\mathrm{th}}^{235}\, \Sigma_{\mathrm{f\,th}}^{235}\, \Phi_{\mathrm{th}}^{\mathrm{B}} \right].$$

χ_{s} ist der Anteil des Spaltspektrums oberhalb der Spaltschwelle, P^{00} die Stoßwahrscheinlichkeit (4.4). Dabei haben wir näherungsweise für Spalt- und Streuquellen die gleiche Stoßwahrscheinlichkeit P^{00} – bezogen auf eine räumlich konstante Quelldichte – angenommen. Für (5.4) gilt mit (5.5):

$$\delta = \frac{\chi_{\mathrm{s}}\, \nu_{\mathrm{th}}^{235}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}\, P^{00}}{\Sigma_{\mathrm{T\,s}}^{\mathrm{B}} - (\Sigma_{\mathrm{n\,s}}^{\mathrm{B}} + \chi\, \nu_{\mathrm{s}}^{238}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238})\, P^{00}}\,. \tag{5.6}$$

Somit

$$\varepsilon^{238} = 1 + \frac{(\nu_{\mathrm{s}}^{238} - 1 - \alpha_{\mathrm{s}}^{238})\, \chi_{\mathrm{s}}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238}\, P^{00}}{\Sigma_{\mathrm{T\,s}}^{\mathrm{B}} - (\Sigma_{\mathrm{n\,s}}^{\mathrm{B}} + \chi_{\mathrm{s}}\, \nu_{\mathrm{s}}^{238}\, \Sigma_{\mathrm{f\,s}}^{238})\, P^{00}}. \tag{5.7}$$

Diese Formel gilt für isolierte Stäbe und weite Gitter.

Mit den folgenden Konstanten konnten Messungen an Natururanzylindern und Kugeln verifiziert werden [17]:

$$\varepsilon^{238} = 1 + \frac{0{,}095\, P^{00}}{1 - 0{,}52\, P^{00}}\,. \tag{5.8}$$

Bei engen Gittern hat man P^{00} durch $P^{00*} = 1 - P^{01*}$ mit P^{01*} nach (4.8) zu ersetzen.

Die Überlegungen sind auf die Berechnung von schnellen Spaltungen an Spaltstoffen (die keine Spaltschwelle haben) nicht übertragbar.

Aufgaben

5.1. Man leite die Formel für den Schnellspaltfaktor in einem homogenen Medium ab.

5.2. Wie groß ist der Schnellspaltfaktor des in Aufgabe 4.2 beschriebenen Uran-Leichtwasser-Gitters bei UO_2- und U-Metall-Brennstoff? $\sigma_T^{238} = 7\,b$, $\sigma_n^{238} = 4\,b$, $\sigma_f^{238} = 0{,}5\,b$, $\sigma_T^H = 3\,b$, $\sigma_T^O = 2\,b$, $\nu_{th}^{235} = 2{,}43$, $\nu_s^{238} = 2{,}7$, $\alpha^{238} = 0{,}15$, $\chi_s = 0{,}75$, $T = 300$ °K und 1100 °K.

Literaturverzeichnis

[1] Siegert, H. J.: Zur Berechnung der Resonanzabsorption in graphitmoderierten Reaktoren unter Berücksichtigung der Interferenz zwischen verschiedenen Resonanzlinien. Dissertation, TH Stuttgart, 1964.

[2] Nordheim, L. W.: a) The theory of resonance absorption. Proc. Symp. Appl. Math., Vol. XI, 58 (1961); b) A program of research and calculations of resonance absorption. GA-2527 (1961).

[3] Joanou, G. D., and J. S. Dudek: GAM-I, a consistent P_1-multigroup code for the calculation of fast neutron spectra and multigroup constants. General Atomic Report GA-1850 (1961).

[4] Abagjan, L. P., N. O. Bazazjanc, I. I. Bondarenko und M. N. Nikolaev: Herausgeber: I. I. Bondarenko. Gruppenkonstanten schneller und intermediärer Neutronen für die Berechnung von Kernreaktoren. Kernforschungszentrum Karlsruhe – KFK – tr – 144 (1964) (Übersetzung aus dem Russischen).

[5] Siegert, H. J.: Das Neutronenspektrum in der Umgebung von Resonanzen. Nukleonik 6, 307 (1964).

[6] Adler, F. T., and D. B. Adler: Calculation of resonance integrals for fissile materials. Reactor physics in the resonance and thermal region, Vol. II, p. 47. MIT Press 1966.

[7] Dresner, L.: Resonance absorption in nuclear reactors. Pergamon Press London 1960.

[8] Blake, J. P. H.: Resonance integral calculations for high temperature reactors. AEEW-R 25 (1960).

[9] VERNON, A. R.: Calculation of the effective resonance integral of ^{238}U. Nucl. Sci. Eng. 7, 252 (1960).
[10] NORDHEIM, L. W.: The Doppler coefficient. Technology of nuclear reactor safety, Vol. 1, MIT Press, Cambridge 1964.
[11] SPINNEY, K. T.: Resonance absorption in homogeneous mixtures. J. Nucl. Energy 6, 53 (1957).
[12] CODD, J., and P. COLLINS: ^{239}Pu and ^{238}U resonance interaction effects in a dilute fast reactor. UKAEA report AEEW-M 427 (1964).
[13] CARLVIK, I.: Dancoff correction in square and hexagonal lattices. AE-257 – Aktiebolaget Atomenergi, Stockholm 1966.
[14] CASE K. M., F. de HOFFMANN, and G. PLACZEK: Introduction to the theory of neutron diffusion, Vol. I. Los Alamos, 1953.
[15] CHERNICK, J.: The Theory of uranium water lattices. Proc. Int. Conf., Vol. 5, Geneva 1955, p. 215.
[16] ADLER, F. T., G. W. HINMAN, and L. W. NORDHEIM: The quantitative evaluation of resonance integrals. Proc. Sec. Int. Conf., Geneva 1958, Vol. 16., p. 155.
[17] WEINBERG, A. M., and E. P. WIGNER: The physical theory of neutron chain reactors. The University of Chicago Press, 1958.
[18] FROELICH, R.: Theorie der Dopplerkoeffizienten schneller Reaktoren unter Berücksichtigung der gegenseitigen Abschirmung der Resonanzen. KFK-367 (1965).

IV. NEUTRONENTHERMALISIERUNG

In thermischen Reaktoren erreicht die Mehrzahl der Neutronen durch Abbremsung aus dem MeV-Bereich Energien unter 1 eV. Die Abbremsung kann jedoch nicht auf die Energie Null erfolgen, da die Atome in thermischer Bewegung sind. Sehr langsame Neutronen werden durch Stöße mit den bewegten Atomen wieder beschleunigt. Aus dem Wechselspiel zwischen Bremsung und Beschleunigung stellt sich eine mittlere Energieverteilung der thermischen Neutronen ein. Form und Lage des thermischen Neutronenspektrums hängen von der Temperatur sowie den Brems- und Absorptionseigenschaften des Mediums ab.

Abb. 1.1 zeigt schematisch die drei charakteristischen Bereiche im Neutronenspektrum eines großen thermischen Reaktors: 1. Den Bereich der schnellen Neutronen in der Umgebung des Spaltspektrums, 2. den Bremsbereich mit $1/E$-Verlauf, modifiziert durch die Resonanzabsorption und 3. den der Energieverteilung der langsamen Neutronen mit einem ausgeprägten Maximum zwischen 0

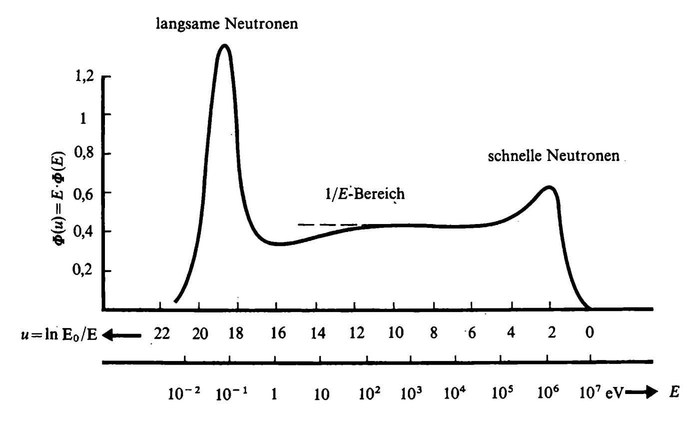


Abb. 1.1: Schematische Darstellung des Neutronenspektrums eines thermischen Reaktors. (Normierung der Flußdichte willkürlich.)

und 1 eV. Wir untersuchen in diesem Kapitel die Energieverteilung der langsamen Neutronen für unendlich ausgedehnte Medien.

Eine genaue Spektrumsberechnung im Bereich der langsamen Neutronen ist für die Kettenreaktion in mehrfacher Hinsicht von Bedeutung. Sie dient 1. der Ermittlung des effektiven η-Faktors, 2. der Berechnung der mittleren Absorptionsquerschnitte und des thermischen Nutzfaktors f und 3. der Bestimmung der Quellstärke $Q_0 = \int \nu(E')\,\Sigma_f(E')\,\Phi(E')\,dE'$ in der Bremsgleichung (III.2.4).

1. Ansätze zur Berechnung der Energieverteilung langsamer Neutronen im Kernreaktor

1.1. Die Maxwell-Verteilung mit effektiver Neutronentemperatur für Medien mit hohem Bremsverhältnis

1.1.1. Neutronendichte und Flußdichte nach der Maxwell-Verteilung

Würden die Neutronen exakt in ein thermisches Gleichgewicht mit den Moderatoratomen kommen, so wäre die Zahl der thermischen Neutronen mit einer Energie zwischen E und $E + dE$ durch die Maxwell-Verteilung

$$n_M(E)\,dE = \frac{2 \cdot n_{th}}{\sqrt{\pi (kT)^3}} \sqrt{E}\, e^{-E/kT}\, dE \qquad (1.1)$$

gegeben. Dabei ist $n_{th} = \int_0^\infty n_M(E)\,dE$ die Gesamtzahl der thermischen Neutronen im cm^3, T die absolute Temperatur, k die Boltzmann-Konstante. Die zugehörige Maxwell-Flußdichte hat die Form

$$\Phi_M(E) = v(E)\, n_M(E) = \frac{\Phi_{th}}{(kT)^2} E \cdot e^{-E/kT} \qquad (1.2)$$

mit $\Phi_{th} = \int_0^\infty \Phi_M(E)\,dE$ = Flußdichte der thermischen Neutronen.

Aus den Definitionen von Φ_{th} und n_{th} folgt die mittlere Geschwindigkeit der thermischen Neutronen zu

$$\frac{\Phi_{th}}{n_{th}} = v_{th} = \sqrt{\frac{8\,kT}{\pi\, m}}\,. \qquad (1.2a)$$

1.1.2. *Die effektive Neutronentemperatur*

Tatsächlich kann sich im Kernreaktor infolge der Zulieferung von Neutronen aus dem Bremsbereich und der mit abnehmender Energie zunehmenden Absorption ($\sigma_A \sim 1/v$) kein echtes Gleichgewicht zwischen Neutronen und Moderatoratomen einstellen. Die Energieverteilung der Neutronen ist vielmehr „gehärtet", d. h. gegenüber der Verteilung der Moderatoratome nach höheren Energien hin verschoben. Eine geringe Härtung des Neutronenspektrums kann näherungsweise durch eine effektive Neutronentemperatur T_n beschrieben werden, die größer als die Moderatortemperatur T ist. Unter Verwendung des Bremsverhältnisses $\xi\,\Sigma_n/\Sigma_A$ (s. Abschn. III. 2.2.2) kann man ansetzen:

$$T_n = T\left(1 + c \cdot \frac{\Sigma_A(kT)}{\xi\,\Sigma_n}\right) °K. \tag{1.3}$$

Die empirisch oder rechnerisch bestimmte Konstante c liegt bei Wasserstoffbremsung in der Größe von 1 [1], bei Graphit in der Größe von 4 [2].

Diese Näherung ist anwendbar, solange die Absorption klein und das Bremsvermögen des Moderators groß ist, etwa solange $\Sigma_A(kT)/\xi\,\Sigma_n < 0{,}1$. Das Neutronenspektrum des Reaktors kann in diesem Fall näherungsweise aus einer Maxwell-Flußdichte mit effektiver Neutronentemperatur T_n im thermischen Bereich und einem $1/E$-Anteil im Bremsbereich zusammengesetzt werden.

1.1.3. *Mittlere Wirkungsquerschnitte in einer Maxwell-Verteilung*

Fassen wir alle langsamen Neutronen im Energiebereich $0 \leq E \leq E_G$ (E_G ist in der Größe von 1 eV, s. Abb. 1.1) in eine Gruppe zusammen, so gilt für den mittleren Wirkungsquerschnitt im Bereich der thermischen Neutronen analog zu (III. 2. 49)

$$\bar{\sigma} = \frac{\int\limits_{E=0}^{E_G} \sigma(E, T)\,\Phi(E)\,dE}{\int\limits_{E=0}^{E_G} \Phi(E)\,dE}. \tag{1.4}$$

Wegen der starken Energieabhängigkeit der Spalt- und Einfangquerschnitte im Thermalisierungsbereich hängen insbesondere $\bar{\sigma}_f$ und $\bar{\sigma}_\gamma$ empfindlich von der Lage des Neutronenspektrums ab.

Wenn die reine Maxwell-Flußdichte (1.2) mit der effektiven Neutronentemperatur (1.3) zur Beschreibung des Spektrums der langsamen Neutronen ausreicht, kann der mittlere Wirkungsquerschnitt (1.4) unmittelbar berechnet werden. Wir vernachlässigen dabei die Verzerrung des Spektrums in der Nähe von E_G, bedingt durch die Einstreuung der Neutronen aus dem Bremsbereich. Für Absorptionsquerschnitte, die unabhängig von der Moderatortemperatur T (s. II. 1.39)) einem $1/v$-Gesetz folgen, ergibt sich als Mittelwert über die Maxwell-Verteilung aus (1.4), wenn wir dort näherungsweise statt bis $E_G \approx 40\,kT$ bis ∞ integrieren

$$\bar{\sigma}_A(T_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\sigma_A(kT_0)\sqrt{\frac{T_0}{T_n}}\,. \tag{1.5}$$

Die Absorptionsquerschnitte $\sigma_A(kT_0)$ zur Neutronenenergie $kT_0 = 0{,}0253$ eV ($T_0 = 293°$K) sind in der Wirkungsquerschnittstabelle II. 1.2 angegeben. Abweichungen vom $1/v$-Gesetz werden durch den Faktor $g(T_n)$ berücksichtigt, der in der Tab. 1.1 für einige wichtige Kerne in Abhängigkeit von der Neutronentemperatur tabelliert ist:

$$\bar{\sigma}_A(T_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,g_A(T_n)\cdot\sigma_A(kT_0)\sqrt{\frac{T_0}{T_n}}\,. \tag{1.5a}$$

Die entsprechenden Formeln gelten für $\bar{\sigma}_f$ und $\bar{\sigma}_\gamma$.

Die mittleren Wirkungsquerschnitte bestimmen den thermischen Nutzfaktor der Spaltzone, die mittlere Neutronenproduktion je Kern und die Zahl der Quellneutronen je cm^3 und s. Der thermische Nutzfaktor f (s. II. 3.4) wäre bei reiner $1/v$-Abhängigkeit aller Absorptionsquerschnitte unabhängig von der Neutronentemperatur. Durch die von Element zu Element verschiedenen g-Faktoren (insbesondere die g-Faktoren der Spaltstoffe, Index Sp) wird jedoch f temperaturabhängig:

$$f = \frac{\overline{\Sigma_A^{Sp}}}{\sum_k \overline{\Sigma_A^k}} = \frac{g_A^{Sp}(T_n)\,\Sigma_A^{Sp}(kT_0)}{\sum_k g_A^k(T_n)\,\Sigma_A^k(kT_0)}\,. \tag{1.6}$$

Bei den Spaltstoffen muß zwischen $g_A(T_n)$ und $g_f(T_n)$ unterschieden werden. Für die effektive Zahl der je Absorption im Spaltstoff

Tab. 1.1: g-Faktoren [3].

T_n	^{233}U		^{235}U		^{239}Pu		^{238}U	Cd	^{135}Xe	^{149}Sm
	g_A	g_f	g_A	g_f	g_A	g_f	g_A	g_A	g_A	g_A
293 °K	0,9983	1,0003	0,9780	0,9759	1,0723	1,0487	1,0017	1,3203	1,158	1,6170
373	0,9972	1,0011	0,9610	0,9581	1,1611	1,1150	1,0031	1,5990	1,216	1,8874
473	0,9973	1,0025	0,9457	0,9411	1,3388	1,2528	1,0049	1,9631	1,239	2,0903
573	0,9987	1,0044	0,9357	0,9291	1,5895	1,4507	1,0067	2,2918	1,229	2,1768
723	1,0024	1,0081	0,9273	0,9177	2,0505	1,8182	1,0094	2,6685	1,166	2,1715
873	1,0072	1,0128	0,9229	0,9108	2,5321	2,2037	1,0122	2,9031	1,091	2,0852
1073	1,0146	1,0201	0,9182	0,9036	3,1006	2,6595	1,0159	3,0455	0,988	1,9246
1273	1,0226	1,0284	0,9118	0,8956	3,5353	3,0079	1,0198	3,0599	0,885	1,7568
1573	1,0365	1,0430	0,8987	0,8813	3,9419	3,3326	1,0257	2,9527	0,752	1,5310

emittierten Neutronen (η-Faktor) in einer Maxwell-Verteilung (mit $\nu = \text{const}$ für $0 \leq E \leq E_G$):

$$\eta(T_n) = \nu \cdot \frac{\overline{\sigma_f}}{\overline{\sigma_A}} = \nu \cdot \frac{g_f(T_n)\,\sigma_f(kT_0)}{g_A(T_n)\,\sigma_A(kT_0)} = \frac{g_f(T_n)}{g_A(T_n)}\,\eta(kT_0). \tag{1.7}$$

Diese Korrektur ist besonders bei ^{239}Pu zu berücksichtigen, s. Zahlentab. 1.2.

Schließlich können wir die Quellstärke Q_0 für den Bremsbereich unter Annahme einer Maxwell-Verteilung für die langsamen Neutronen angeben.

$$Q_0(T_n) = \int\limits_{E=0}^{E_G} \nu\,\Sigma_f\,\Phi\,dE = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,g_f(T_n)\,\nu\,\Sigma_f(kT_0)\,\sqrt{\frac{T_0}{T_n}}\,\Phi_{th}. \tag{1.8}$$

Tab. 1.2: Effektive $\eta(T_n)$-Werte für eine Maxwell-Verteilung mit der Neutronentemperatur T_n. (Nach (1.7) unter Verwendung der Tab. 1.1 und der Tab. I. 3.1 berechnet).

T_n	η ^{233}U	^{235}U	^{239}Pu
293 °K	2,291	2,066	2,073
373	2,299	2,063	2,036
473	2,301	2,060	1,984
573	2,303	2,055	1,935
723	2,303	2,049	1,880
873	2,303	2,043	1,845
1073	2,302	2,037	1,818
1273	2,303	2,033	1,804
1573	2,304	2,030	1,792

Die Streuquerschnitte der meisten Stoffe sind in der Umgebung von kT nur schwach energieabhängig und können daher für die Mittelung (1.4) über die Maxwell-Flußdichte als konstant betrachtet werden. Wasserstoff ist eine Ausnahme. Infolge der Wärmebewegung und der chemischen Bindung tritt beim leichtesten Kern

ein beträchtlicher Anstieg des effektiven Streuquerschnitts mit abnehmender Neutronenenergie auf (vgl. Abb. II. 2.2–3). Bei H_2O kann der Streuquerschnitt für die Mittelung über die Maxwell-Flußdichte in der Umgebung von kT durch ein Potenzgesetz angenähert werden:

$$\sigma_n(E, T) = \sigma_n(E_0, T)\,(E_0/E)^l .$$

Mittelt man diesen Streuquerschnitt nach (1.4) über die Maxwell-Flußdichte mit der Neutronentemperatur T_n, so folgt

$$\overline{\sigma_n}(T_n) = \Gamma(2 - l)\,\sigma_n(E_0, T)\,(E_0/kT_n)^l .$$

Γ bezeichnet die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt .$$

Für H_2O gilt im Bereich $0{,}01 \leq E \leq 0{,}1$ eV näherungsweise $l = 0{,}3$ ($\Gamma(1{,}7) = 0{,}91$).

1.2. Abweichungen von der Maxwell-Verteilung bei Medien mit niederem Bremsverhältnis und thermischen Resonanzabsorbern

1.2.1. Aufstellung der Thermalisierungsgleichung

Bei Reaktoren mit hohem Brennstoff- und geringem Moderatoranteil (kleines Bremsverhältnis, $\xi\,\Sigma_n/\Sigma_A < 10$) werden die Abweichungen von der Maxwell-Verteilung beträchtlich. Diese müssen berechnet werden. Sorgfalt in der Berechnung des thermischen Spektrums ist insbesondere dann geboten, wenn Nuklide mit hohen Resonanzen im Energiebereich unterhalb 1 eV auftreten, wie z. B. ^{239}Pu, ^{240}Pu, ^{241}Pu, ^{113}Cd u. a.

Das Neutronenspektrum in der stationären Verteilung folgt aus der Gleichsetzung der Zahl der Stöße, die von irgendeinem E' nach dE bei E führen, mit der Zahl der Stöße bei E:

$$\Sigma_T(E, T)\,\Phi(E)\,dE = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE'\,dE. \quad (1.9)$$

Die Neutronenquelle besteht allein aus den bei höheren Energien gestreuten Neutronen, da das Spaltspektrum $\chi(E)$ im Thermalisierungsbereich bereits abgeklungen ist. Die Wirkungsquerschnitte in (1.9) sind effektive Wirkungsquerschnitte, welche die thermische

Bewegung und chemische Bindung der Moderatoratome berücksichtigen. Hierin unterscheidet sich die Thermalisierungsgleichung von der Bremsgleichung (III. 2.4). Die Auswirkung der thermischen Bewegung auf die integralen Querschnitte (linke Seite der Gl. (1.9)) haben wir bereits im Abschn. II. 2.2.6 im Rahmen des Gasmodells behandelt. Die Verallgemeinerung auf differentielle Querschnitte (rechte Seite von (1.9)) nehmen wir in Abschn. 2 für das Gasmodell und in Abschn. 3 für realistische Streumodelle von Flüssigkeiten und Festkörpern vor.

Oberhalb einer hinreichend hohen Grenzenergie E_G von etwa 1–3 eV ist die Neutronenbeschleunigung durch die thermische Bewegung des Moderators vernachlässigbar. Aus diesem Grund wird das Integral auf der rechten Seite von (1.9) in zwei Anteile gemäß

$$\Sigma_T(E, T)\,\Phi(E) = \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE' + \int\limits_{E'=E_G}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE \tag{1.10}$$

aufgespalten. Naturgemäß ist im Thermalisierungsbereich stets $E < E_G$. $\Phi(E')$ in (1.10) ist für $E' > E_G$ aus der Lösung des Bremsproblems bekannt, so daß das zweite Integral die Rolle eines gegebenen Quellterms spielt. Die Thermalisierungsgleichung (1.9) ist daher zweckmäßig folgendermaßen zu schreiben:

$$\Sigma_T(E, T)\,\Phi(E) = \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE' + Q_{th}(E, T) \tag{1.11}$$

$$Q_{th}(E, T) = \int\limits_{E'=E_G}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE' \tag{1.12}$$

Aus einer der Formen (1.9–12) ist $\Phi(E)$ für den Thermalisierungsbereich zu berechnen.

Integrieren wir (1.11) über den Thermalisierungsbereich, so kompensieren sich die Streuterme auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung:

$$\int\limits_{E=0}^{E_G} \Sigma_n(E, T)\,\Phi(E)\,dE \equiv \int\limits_{E=0}^{E_G} \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_n(E \to E', T)\,\Phi(E)\,dE'\,dE = \int\limits_{E=0}^{E_G} \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_n(E' \to E, T)\,\Phi(E')\,dE'\,dE, \tag{1.13}$$

und es verbleibt

$$\int_{E=0}^{E_G} \Sigma_A(E, T)\, \Phi(E)\, dE = \int_{E=0}^{E_Q} Q_{th}(E)\, dE\,. \qquad (1.11\,a)$$

Das Integral über $Q_{th}(E)$ gibt die je s unter die Energie E_G abgebremsten Neutronen an, entspricht also der in Abschn. III. 2.4 definierten Bremsdichte:

$$q(E_G) = \int_{E=0}^{E_G} Q_{th}(E, T)\, dE = \int_{E=0}^{E_G} \int_{E'=E_G}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E, T)\, \Phi(E')\, dE'\, dE. \qquad (1.14)$$

Wir erhalten also durch Integration von (1.11) unter Berücksichtigung von (1.13–14) die folgende integrale Neutronenbilanz für den Thermalisierungsbereich

$$\int_{E=0}^{E_G} \Sigma_A(E)\, \Phi(E)\, dE = q(E_G)\,. \qquad (1.15)$$

(1.15) besagt, daß im stationären Zustand alle unter E_G abgebremsten Neutronen im Thermalisierungsbereich absorbiert werden.

1.2.2. Einfluß verschiedener Moderatormodelle auf die Neutronenthermalisierung

Das einfachste Moderatormodell zur Berechnung der Neutronenthermalisierung bei starker Absorption und geringem Bremsvermögen ist das eines idealen Gases mit der Temperatur T (Abschn. 2). Seine Wärmebewegung kann bewirken, daß langsame Neutronen beim Stoß kinetische Energie gewinnen.

Das Gasmodell ist bei Moderatoren mit starker chemischer Bindung, wie z. B. Graphit, nicht angemessen. Diese bewirkt, daß ein langsames Neutron nicht mehr mit einem freien Kern, sondern mit einem Molekül, einem Molekülverband (Wasser) oder einem Kristall (Graphit) wechselwirkt. Das Bremsvermögen $\xi\, \Sigma_n$ des Moderators wird dadurch kleiner als bei freien Kernen. Man hat sich dies wie folgt vorzustellen: In einem kristallinen Moderator, wie z. B. Graphit, ist die Energieübertragung auf den Streukern nur in Vielfachen der Schwingungsquanten (Phononen) von der Größe $\hbar\,\omega$ möglich. Die Energie der Phononen kann bis zu 0,1 eV reichen. Bei einer Debyeschen Frequenzverteilung $\varrho(\omega) \sim \omega^2$ treten die größten Phononen $\hbar\,\omega_D$ (ω_D = Debyesche Grenzfrequenz) am häufigsten

auf. Ist das Neutron unter die Energie $\hbar\,\omega_D$ abgebremst, so wird der Energieaustausch und damit der Thermalisierungsvorgang gehemmt. Die Störung ist um so größer, je höher die Debyesche Grenzfrequenz ω_D bzw. die Debye-Temperatur $\theta = \hbar\,\omega_D/k$ ist.

Bei mehratomigen Kristallen, wie z. B. Zirkonhydrid, tritt neben dem oben erwähnten „akustischen" Frequenzspektrum ein „optisches" Frequenzspektrum auf. Dieses kann oft durch eine Frequenz ω_E, $\varrho(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_E)$, dargestellt werden (Einstein-Modell). Die Frequenzen des optischen Spektrums sind größer als die Frequenzen des akustischen Spektrums. Für Neutronen mit Energien $< \hbar\,\omega_E$ sinkt das Bremsvermögen des mehratomigen Kristalls ab, da sie ihre Energie nur noch in den kleinen Quanten der akustischen Schwingungen abgeben können. Dieses Absinken des Bremsvermögens bei Neutronenenergien unterhalb der für den Kristall charakteristischen Energie ($\hbar\,\omega_D$ bzw. $\hbar\,\omega_E$) hat gegenüber dem Gasmodell eine zusätzliche Härtung des Neutronenspektrums zur Folge.

Ähnlich, wenn auch nicht so ausgeprägt wie bei Graphit oder Zirkonhydrid, ist die Wirkung der chemischen Bindung auf die Neutronenstreuung in Wasser. Neben das quasikontinuierliche Frequenzspektrum der Translationen des Moleküls treten hier die Oszillationen der behinderten Rotation und der inneren Schwingungen des Moleküls.

Trotz des Einflusses der chemischen Bindung ist für Thermalisierungsprobleme mit schwacher Absorption das Modell des einatomigen gasförmigen Moderators eine gute erste Näherung. Ein Grund ist, daß das Neutronenspektrum bei verschwindender Absorption unabhängig von der Art der chemischen Bindung ein Maxwell-Spektrum ist. Bei relativ starker Absorption und mäßiger Temperatur hat die chemische Bindung dagegen einen merklichen Einfluß auf das Neutronenspektrum. Dieser Einfluß geht mit wachsender Temperatur zurück. Bei sehr hohen Temperaturen ist das Gasmodell unabhängig vom Absorptionsgrad und der Stärke der chemischen Bindung eine gute Näherung.

Aufgaben

1.1. Man berechne mit (1.1) die mittlere und die häufigste Neutronenenergie $\bar{E}$ und E_h in einer Maxwell-Verteilung.

1.2. Man bestimme mit (1.1) die Zahl der Neutronen im Geschwindigkeitsintervall dv bei v aus der Gleichung $n(v)\,dv = n(E)\,dE$.

1.3. Man zeige: a) die mittlere Neutronengeschwindigkeit in einer Maxwell-Verteilung zur Temperatur T ist durch $\overline{v} \equiv v_{th} = \sqrt{8\,\mathrm{k}T/\pi\, m}$ gegeben. Die zugehörige Energie $\frac{1}{2} m \overline{v}^2 = 4\mathrm{k}T/\pi = 0{,}0322$ eV bei $T = 293\,°\mathrm{K}$ ist nicht gleich $\overline{E}$ (Aufg. 1.1).
b) die häufigste Geschwindigkeit ist $v_h = \sqrt{2\,\mathrm{k}T/m}$. Die zu v_h gehörige Energie ist $\frac{1}{2} m v_h^2 = \mathrm{k}T \neq \mathrm{E_h}$. $\frac{1}{2} m v_h^2$ bezeichnet man meist als thermische Energie E_{th}. Bei $T = 293\,°\mathrm{K}$ ist $v_h = 2200$ m/s und $E_{th} = \mathrm{k}T_0 = 0{,}0253$ eV.

1.4. Man schätze das Verhältnis n_s/n_{th} von schnellen zu thermischen Neutronen in einem großen Natururan-Graphit-Reaktor mit $V^C/V^U = 70$ und $k_\infty = 1{,}07$ ab.

1.5. Man berechne und diskutiere die Änderung von η und f bei einem Temperaturanstieg von 20 °C auf 300 °C a) für ^{235}U-H_2O-Mischungen, b) für ^{239}Pu-H_2O-Mischungen, bei einem Mischungsverhältnis von $N^H/N^{\mathrm{Spaltstoff}} = 600$ und 1200.

1.6. Man berechne Φ_{th} aus der Bremsdichte $q(E_G) = Q_0\, \varepsilon\, p$ und der mittleren Absorption im thermischen Bereich. Berechne ferner die Quellstärke Q_0 für den Bremsbereich aus Φ_{th} und zeige, daß im stationären Zustand im unendlich ausgedehnten multiplizierenden Medium $k_\infty = \varepsilon\, p\, f\, \eta = 1$ gelten muß.

2. Neutronenthermalisierung nach dem Modell des einatomigen gasförmigen Moderators

2.1. Der Übergangsquerschnitt $\Sigma_n\,(E \to E')$

Wir betrachten den Zusammenstoß eines Neutrons der Energie E mit einem Kern der Energie E_A. Wir fragen zunächst nach der Energie E', die das Neutron nach dem Stoß in Abhängigkeit vom Kosinus μ_S des Streuwinkels im Schwerpunktsystem haben wird.

Aus dem Impuls- und Energiesatz folgt (vgl. Lösung der Aufg. 2.1)

$$E' = \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 E_{rel} + \frac{1}{A+1} E_S + \frac{2A}{(A+1)^{3/2}} \sqrt{E_{rel}}\,\sqrt{E_S}\,\mu_S\,, \tag{2.1}$$

mit $E_{rel} = E + \dfrac{1}{A} \cdot E_A - 2\sqrt{\dfrac{E \cdot E_A}{A}} \cdot \mu_A$ = Relativenergie (s. Abb. II. 1.2), (2.2)

$E_S = \dfrac{1}{A+1}\left(E + AE_A + 2\sqrt{A \cdot E \cdot E_A} \cdot \mu_A\right)$ = Schwerpunktsenergie, (2.3)

μ_S = Kosinus des Winkels zwischen der Flugrichtung des Neutrons nach dem Stoß und der Flugrichtung des Systemschwerpunkts,

μ_A = Kosinus des Winkels unter dem sich Neutron und Moderatoratom treffen.

Nach (III. 1.27) ist bei isotroper Streuung im Schwerpunktsystem die Neutronenenergie E' im Laborsystem nach dem Stoß mit gleicher Wahrscheinlichkeit über das Energieintervall $E'_{max} - E'_{min}$ verteilt:

$$w(E \to E', E_A, \mu_A)\, dE' = \begin{cases} \dfrac{dE'}{E'_{max} - E'_{min}} & \text{für } E'_{min} < E' < E'_{max} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.4}$$

E'_{max} und E'_{min} ergeben sich aus (2.1) für $\mu_S = \pm 1$, so daß

$$E'_{max} - E'_{min} = \frac{4\,A}{(A+1)^{3/2}} \sqrt{E_{rel}} \cdot \sqrt{E_S}\,. \tag{2.5}$$

Im Grenzfall $E_A \to 0$ geht (2.5) unter Beachtung von (2.2–3) in die bekannte Relation für ruhende Moderatoratome über (III. 1.14):

$$E'_{max} - E'_{min} = (1 - \alpha)\, E\,. \tag{2.6}$$

Gilt für die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_A$ der Moderatoratome die Maxwell-Verteilung (II. 1.26), so beträgt der effektive Übergangsquerschnitt analog zu (II. 1.29)

$$\Sigma_n(E \to E', T) = \int\limits_{E_A=0}^{\infty} \int\limits_{\mu_A=-1}^{+1} \sqrt{\frac{E_{rel}}{E}}\, \Sigma_n(E_{rel}) \cdot$$
$$\cdot\, w(E \to E';\, E_A, \mu_A)\, M(E_A, \mu_A)\, dE_A\, d\mu_A\,. \tag{2.7}$$

Zur Ausführung der Integration transformiert man (2.7) unter Beachtung von

$$\sqrt{E_A}\, dE_A\, d\mu_A = \sqrt{\frac{A\, E_S}{E}}\, dE_{rel}\, d\sqrt{E_S} \tag{2.8}$$

zweckmäßig von den Integrationsvariablen E_A und μ_A auf $\sqrt{E_S}$ und E_{rel}.

Aus den Extremwerten des Streu- und Stoßwinkels (μ_S, $\mu_A = \pm 1$) ergeben sich bei festgehaltener Anfangs- und Endenergie E und E' verschiedene Grenzkurven für die Integration in der $(\sqrt{E_S}, E_{rel})$-Ebene, je nachdem ob $E \gtrless E'$ ist.

Für einen konstanten Streuquerschnitt

$$\Sigma_n(E_{rel}) = \Sigma_n \tag{2.9}$$

folgt aus (2.7) der Wigner-Wilkins-Übergangsquerschnitt [4]

$$\Sigma_n(E \to E') = \\ = \frac{(A+1)^2}{8A} \frac{\Sigma_n}{E} \Big\{ e^{\frac{E-E'}{kT}} \Big[\Phi\big(\eta\sqrt{E} - \zeta\sqrt{E'}\big) \pm \Phi\big(\eta\sqrt{E} + \zeta\sqrt{E'}\big)\Big] + \\ + \Phi\big(\eta\sqrt{E'} - \zeta\sqrt{E}\big) \mp \Phi\big(\eta\sqrt{E'} + \zeta\sqrt{E}\big)\Big\}. \tag{2.10}$$

Φ ist darin die Fehlerfunktion nach (II. 1.37) mit $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A\,kT}}, \qquad \zeta = \frac{A-1}{2\sqrt{A\,kT}}. \tag{2.11}$$

Das obere Vorzeichen in (2.10) gilt für den Fall der Neutronenbeschleunigung, $E' > E$, das untere für den Fall der Neutronenbremsung, $E' < E$. In Abb. 2.1 ist $kT \cdot \Sigma_n(E \to E')/\Sigma_n$ für Wasserstoff ($A = 1$) und Graphit ($A = 12$) veranschaulicht. Zum Vergleich sind auch die entsprechenden Übergangsquerschnitte für ruhende Moderatoratome eingetragen (Kastenfunktionen).

Für $A = 1$ vereinfacht sich der Übergangsquerschnitt (2.10) wie folgt:

$$\Sigma_n(E \to E') = \frac{\Sigma_n}{E} \begin{cases} e^{-\frac{E'-E}{kT}} \Phi\big(\sqrt{E/kT}\big) & E' > E \text{ Beschleunigungsquerschnitt,} \\ \Phi\big(\sqrt{E'/kT}\big) & E' < E \text{ Bremsquerschnitt.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Der Beschleunigungsquerschnitt nimmt exponentiell mit dem Beschleunigungsintervall $E' - E$, bezogen auf kT, ab. Sind E und E' sehr viel größer als kT, so geht der Übergangsquerschnitt

näherungsweise in die bekannte Form für den Bremsquerschnitt (s. z. B. (III. 2.5) mit $\alpha = 0$) über. Es gilt dann $\Phi\left(\sqrt{E/\mathrm{k}T}\right) \approx \Phi\left(\sqrt{E'/\mathrm{k}T}\right) \approx 1$, sowie $\mathrm{e}^{-(E'-E)/\mathrm{k}T} \approx 0$ für $E' - E \gg \mathrm{k}T$, und damit

$$\Sigma_\mathrm{n}(E \to E') \approx \begin{cases} 0 & \text{für } \mathrm{k}T \ll E < E' \\[2ex] \dfrac{\Sigma_\mathrm{n}}{E} & \text{für } \mathrm{k}T \ll E' < E. \end{cases} \tag{2.13}$$

(2.13) folgt aus (2.12) exakt für $T \to 0$, d. h. für ruhende Moderatoratome. Während der Übergangsquerschnitt für ruhende Wasserstoffatome unabhängig von E' ist, sinkt er bei bewegten Atomen mit E' auf Null ab (s. Abb. 2.1). Man muß daher bei der Abbremsung auf kleine Neutronenenergien E' von (2.12) ausgehen.

Der Übergangsquerschnitt (2.10) erfüllt die Bedingung für detailliertes Gleichgewicht. In der Gleichgewichtsverteilung ist die Zahl der Stöße, die von E nach E' führen, gleich der Zahl der Stöße, die von E' nach E führen (Prinzip des detaillierten Gleichgewichts). Ist keine Absorption vorhanden, ist diese Bilanz mit der Maxwell-Flußdichte (1.2) zu bilden:

$$E' \,\mathrm{e}^{-\frac{E'}{\mathrm{k}T}}\, \Sigma_\mathrm{n}(E' \to E) = E \cdot \mathrm{e}^{-\frac{E}{\mathrm{k}T}}\, \Sigma_\mathrm{n}(E \to E'). \tag{2.14}$$

(2.14) läßt sich im Sonderfall des Wasserstoffs anhand von (2.12) leicht verifizieren.

Von der Eigenschaft (2.14) des Übergangsquerschnitts werden wir im nächsten Abschnitt Gebrauch machen.

2.2. Lösungen der Thermalisierungsgleichung für das Gasmodell

Ist die Absorption gering, so wird sich an das Bremsspektrum eines thermischen Reaktors im wesentlichen eine Maxwell-Verteilung anschließen. Wir stellen daher die Neutronenflußdichte im Thermalisierungsbereich durch die Maxwell-Flußdichte (1.2) und eine „Korrekturfunktion" $\psi(E)$ dar:

$$\Phi(E) = \Phi_\mathrm{M}(E)\, \psi(E). \tag{2.15}$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Neutronenbilanz (1.11) ein und beachtet die Bedingung (2.14) für detailliertes Gleichgewicht, so erhält man für die Korrekturfunktion $\psi(E)$ die Gleichung

$$\int\limits_{E'=0}^{E_G} \mathrm{d}E' \,\Sigma_n(E \to E') \left[\psi(E') - \psi(E)\right] + Q_{th}(E)/\Phi_M(E) = \Sigma_A(E)\,\psi(E). \tag{2.16}$$

Für verschwindende Quellen und Senken, $Q_{th} \to 0$, $\Sigma_A \to 0$ folgt daraus der zu erwartende Grenzfall $\psi = \text{const}$, d. h. die Maxwell-Flußdichte (1.2) für $\Phi(E)$. Dies gilt unabhängig vom Bau des Übergangsquerschnitts $\Sigma_n(E' \to E)$, sofern dieser nur die Bedingung (2.14) für detailliertes Gleichgewicht erfüllt. Erst wenn Quellen und Senken vorhanden sind, wirken sich Unterschiede im Übergangsquerschnitt auf das Neutronenspektrum aus.

Die Wigner-Wilkins-Gleichung für $A = 1$. Für den Sonderfall eines hypothetischen Wasserstoffmoderators mit $A = 1$, konstantem Streuquerschnitt $\Sigma_n(E_{rel})$ und $1/v$-Absorption haben WIGNER und WILKINS das Neutronenspektrum teils analytisch, teils numerisch für verschiedene Verhältnisse von Absorption zu Streuung bestimmt [4, 5]. Die Integralgleichung (1.9) bzw. (1.11) kann in diesem Fall exakt in eine Differentialgleichung überführt werden. Der Fall $A = 1$ kommt allerdings streng genommen im Bereich der thermischen Neutronen nicht vor, da beim Stoß Neutron-Proton infolge der chemischen Bindung des Wasserstoffs (s. Abschn. 3) eine höhere Masse wirksam ist.

Die Wilkins-Gleichung für $A \gg 1$ (Schwergasmodell). Im Grenzfall eines schweren Moderators, $A \gg 1$, kann die Integralgleichung (2.16) in guter Näherung in eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $\psi(E)$, die Wilkins-Gleichung, überführt werden [6]. Dazu entwickeln wir nach HURWITZ, NELKIN und HABETLER [7] $\psi(E)$ unter dem Integral in (2.16) in eine Taylor-Reihe um E bis zum Glied 2. Ordnung. Voraussetzung für das Abbrechen der Reihe ist, daß der Übergangsquerschnitt $\Sigma_n(E \to E')$ lediglich in einem engen Energieintervall, in dem ψ schwach veränderlich ist, merkliche Beiträge liefert. Dies ist um so besser erfüllt, je schwerer der Atomkern ist (Abb. 2.1). Der Quellterm $Q_{th}(E)$ verschwindet für $E < E_G$, da die Abbremsung der Neutronen aus dem Bremsbereich $E > E_G$ bei Kernen mit $A \gg 1$ nicht in Sprüngen, sondern quasikontinuierlich erfolgt. Aus (2.16) folgt dann für den Thermalisierungsbereich $0 \leq E < E_G$:

$$\frac{1}{2}\,\overline{\Delta E^2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E^2}\,\psi(E) + \overline{\Delta E}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\,\psi(E) = \frac{\Sigma_A(E)}{\Sigma_n(E)}\,\psi(E) \qquad (2.17)$$

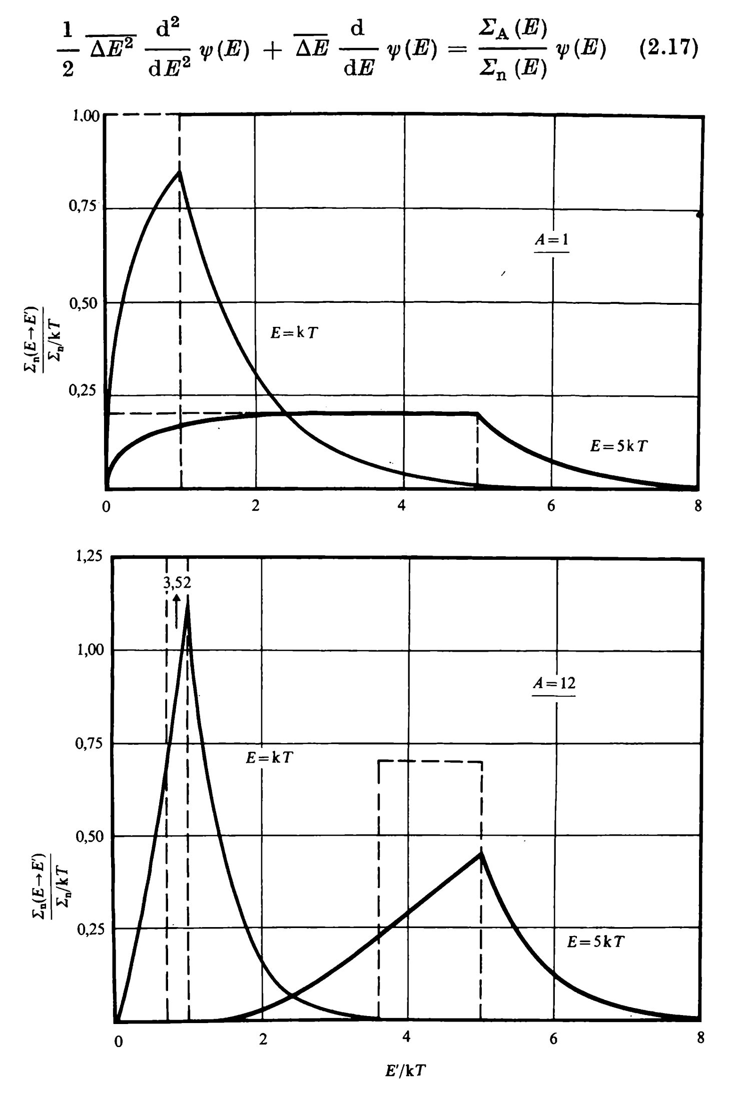


Abb. 2.1: Veranschaulichung des Übergangsquerschnitts (bezogen auf Σ_n/kT) für Wasserstoff ($A = 1$) und Graphit ($A = 12$) nach dem Gasmodell für zwei Neutroneneinfallsenergien. Zum Vergleich sind gestrichelt die entsprechenden Übergangsquerschnitte für ruhenden Moderator eingetragen.

mit

$$\overline{\Delta E^n} = \frac{1}{\Sigma_n(E)} \int\limits_{E'=0}^{E_G} (E' - E)^n \, \Sigma_n(E \to E') \, dE'. \tag{2.18}$$

Wertet man die Momente (2.18) der Größe ΔE für den Wigner-Wilkins-Übergangsquerschnitt (2.10) aus, so erhält man in guter Näherung [7]

$$\overline{\Delta E} = \frac{2}{A}(2\,kT - E) + O\left(\frac{1}{A^2}\right), \tag{2.19}$$

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{4}{A} E\,kT + O\left(\frac{1}{A^2}\right). \tag{2.20}$$

Bei einem schweren Moderator kann man die mit A^{-2} abnehmenden Korrekturterme $O(A^{-2})$ vernachlässigen. Für die Wilkins-Gleichung (2.17–20) gilt dann mit $2/A \approx \xi$ für $A \gg 1$ (vgl. (III. 1.45)) und $y = E/kT$

$$y \frac{d^2\psi}{dy^2} + (2 - y)\frac{d\psi}{dy} = \frac{\Sigma_A(y)}{\xi\,\Sigma_n}\psi(y) \tag{2.21}$$

oder mit

$$\Phi_M(y) = \Phi_{th}\, y\, e^{-y},$$

$$\xi\,\Sigma_n \frac{d}{dy}\, y\, \Phi_M(y) \frac{d}{dy}\psi(y) = \Sigma_A(y)\,\psi(y)\,\Phi_M(y). \tag{2.21a}$$

Die entsprechende Gleichung für $\Phi(y) = \Phi_M(y) \cdot \psi(y)$ hat die Form

$$L(y) \cdot \Phi(y) = \Sigma_A(y) \cdot \Phi(y), \tag{2.22}$$

wobei

$$L(y) = \xi\,\Sigma_n \frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy} + y - 1\right) \tag{2.23}$$

als Operator des Schwergasmodells bezeichnet wird.

Aus (2.21–23) erkennt man, daß der Verlauf des Neutronenspektrums von der Moderatortemperatur T und dem reziproken Bremsverhältnis $\Sigma_A/\xi\,\Sigma_n$ abhängt. Eine Abweichung von der

Maxwell-Flußdichte tritt nur für $\Sigma_A \neq 0$ auf. In diesem Fall hängt die Form des Neutronenspektrums auch noch von der Bremseigenschaft des Moderators ab. Eine Abnahme im Bremsvermögen $\xi\,\Sigma_n$ wirkt wie eine Zunahme in der Absorption. Der Grund ist offensichtlich, daß bei kleinerem Bremsvermögen der Bremsweg und damit die Wahrscheinlichkeit einer Absorption vor Erreichen der thermischen Energie anwächst.

Für eine $1/v$-Absorption und konstanten effektiven Streuquerschnitt existiert keine geschlossene Lösung der Gl. (2.21). Man muß entweder Reihenentwicklungen oder numerische Methoden anwenden [7].

Bei $1/v$-Absorption und konstantem effektivem Streuquerschnitt transformiert man (2.21) zweckmäßig auf die Variable $x = \sqrt{y} = \sqrt{E/kT}$. Die Wilkins-Gleichung (2.21) nimmt dann die folgende Form an:

$$x\frac{d^2\psi}{dx^2} + (3 - 2x^2)\frac{d\psi}{dx} = \frac{4\,\Sigma_A\,(kT)}{\xi\,\Sigma_n}\,\psi. \qquad (2.24)$$

Abb. 2.2 zeigt Lösungen der Wilkins-Gleichung (2.24) für $1/v$-Absorption und konstanten effektiven Streuquerschnitt nach [7]. Über $\sqrt{E/kT}$ ist das Produkt $E \cdot \Phi(E)$ aufgetragen. Für Energien $E > E_G \gg kT$, d. h. im Gebiet des reinen Bremsspektrums, ist

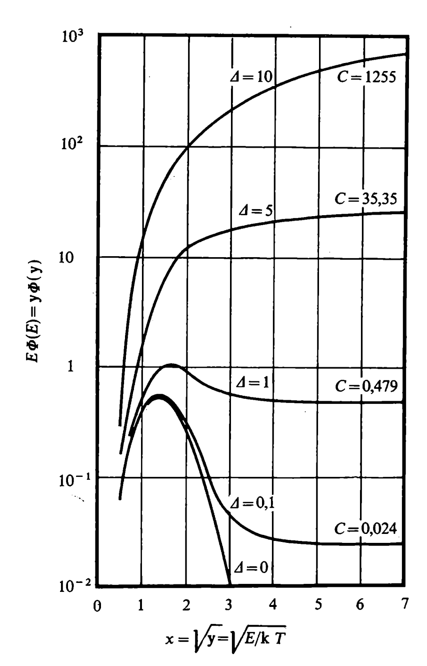


Abb. 2.2: Energieverteilung der Neutronen in einem schweren gasförmigen Moderator nach der Wilkins-Gleichung (2.24) für $1/v$-Absorption und konstanten effektiven Streuquerschnitt (nach [7]). Der Parameter Δ ist das vierfache Bremsverhältnis bei $E = kT$. C entnehme man aus Gl. (2.27).

$E \cdot \Phi(E)$ konstant, sofern Σ_n unabhängig von der Energie ist und die Absorption vernachlässigt werden kann:

$$E\,\Phi(E) = y\,\Phi(y) = \frac{q}{\xi\,\Sigma_n} = C = \text{const}, \quad \text{für } E > E_G,\ y > y_G. \tag{2.25}$$

Im stationären Zustand muß nach (1.15) die Absorptionsrate im Thermalisierungsbereich gleich der Bremsdichte bei E_G sein

$$q(E_G) = \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_A\,\Phi(E')\,\mathrm{d}E' = \int\limits_{y'=0}^{y_G} \Sigma_A\,\Phi(y')\,\mathrm{d}y'. \tag{2.26}$$

Zwischen der Konstanten C und der Flußdichte im Thermalisierungsbereich besteht danach der Zusammenhang

$$C = \frac{1}{\xi\,\Sigma_n} \int\limits_{E'=0}^{E_G} \Sigma_A(E')\,\Phi(E')\,\mathrm{d}E'. \tag{2.27}$$

Der Parameter der Darstellung in Abb. 2.2 ist $\Delta = 4\,\Sigma_A(\mathrm{k}T)/\xi\,\Sigma_n$. Für verschwindende Absorption ($\Delta = 0$) ergibt sich als stationäres Spektrum für eine feste Neutronenzahl die Maxwell-Verteilung. Bei geringer Absorption ($1 > \Delta > 0$) schließt sich wie erwartet eine Maxwell-ähnliche Verteilung an das Bremsspektrum an. Der Maxwell-Anteil ist jedoch gehärtet. Mit wachsender Absorption und abnehmendem Bremsvermögen verschiebt sich das Maximum zu höheren Energien. Diesen Sachverhalt kann man näherungsweise durch Einführung der effektiven Neutronentemperatur (1.3) beschreiben. Die Anwendung des Begriffs der Neutronentemperatur wird jedoch mit wachsendem Δ immer fragwürdiger. Für $\Delta > 1$ verschwindet schließlich in Abb. 2.2 der Maxwell-ähnliche Anteil völlig im Bremsspektrum.

Für schwache $1/v$-Absorption ($\Delta < 0{,}1$) kann folgende Näherungslösung aus der Wilkins-Gleichung abgeleitet werden [7] (s. Aufgaben 2.3–4):

$$\Phi(y) \approx \Phi_M(y) + \frac{\Sigma_A(\mathrm{k}T)}{\xi\,\Sigma_n}\,\Phi_{th}\,\frac{1}{y}\,h(y), \quad \text{für } \Delta < 0{,}1. \tag{2.28}$$

Die Hilfsfunktion

$$h(y) = y^2\,\mathrm{e}^{-y} \int\limits_{z=0}^{y} \mathrm{d}z\,z^{-2}\,\mathrm{e}^{z} \int\limits_{y'=0}^{z} \mathrm{d}y'\,\sqrt{y'}\,\mathrm{e}^{-y'} \tag{2.29}$$

ist in Abb. 2.3 dargestellt. Für $y \geq y_G \gg 1$ verschwindet $\Phi_M(y)$, und $h(y)$ geht gegen den konstanten Wert $\sqrt{\pi}/2$; $\Phi(y)$ ist dann proportional zu $1/y$. (2.28) beschreibt also ein Spektrum mit glattem Übergang aus dem Bremsbereich in den Thermalisierungsbereich.

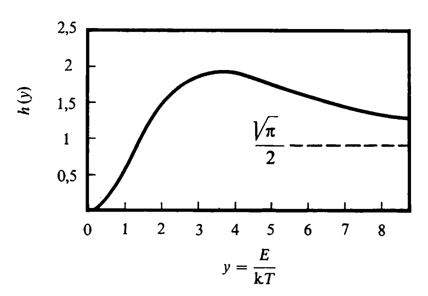


Abb. 2.3: Hilfsfunktion $h(y)$ für Gl. (2.28) nach [7]. $h(y)$ beschreibt den Übergang von der Maxwell-Verteilung in das $1/E$-Gesetz.

2.3. Modifiziertes Gasmodell zur näherungsweisen Erfassung der chemischen Bindung

Die Wirkung der chemischen Bindung auf die Neutronenthermalisierung kann im Rahmen des Gasmodells formal durch eine geeignete Verringerung des Bremsvermögens in Abhängigkeit von der Energie berücksichtigt werden.

Für verschwindende Absorption ist die Maxwell-Flußdichte $\Phi_M(y) = \Phi_{th} \cdot y \cdot e^{-y}$ eine Lösung der Gl. (2.22) des Schwergasmodells, denn es gilt

$$\left(y \frac{d}{dy} + y - 1\right) \Phi_M(y) = 0. \tag{2.30}$$

Der Ansatz von Horowitz. $\Phi_M(y)$ muß auch die Lösung eines modifizierten Schwergasmodells, das den Einfluß der chemischen Bindung auf die Thermalisierung berücksichtigt, für $\Sigma_A \to 0$ sein. Horowitz [8] hat daher den modifizierten Schwergasoperator in der Form

$$L_H(y) = \xi \, \Sigma_n \frac{d}{dy} f_0(y) \left[y \frac{d}{dy} + y - 1\right] \tag{2.31}$$

angesetzt, wobei $f_0(y)$ die Änderung des Bremsvermögens infolge der chemischen Bindung beschreibt. Für verschwindende Absorption gilt mit (2.30)

$$L_{\mathrm{H}}(y)\, \Phi_{\mathrm{M}}(y) = 0 \qquad (2.32)$$

Da das Bremsvermögen für $E \gg \mathrm{k}T$ unabhängig vom Grad der chemischen Bindung ist, muß ferner gelten

$$f_0(y) \to 1 \quad \text{für } y \gg 1. \qquad (2.33)$$

Beim Schwergasmodell ist $f_0(y) = 1$ für alle y. $f_0(y)$ hängt von der Art des Moderators und (schwach) von der Temperatur ab. In Abb. 2.4 ist $G_0(y) = 1/f_0\,(y)$ für die wichtigsten Moderatoren bei 20°C dargestellt. Die Funktion $f_0(y)$ ist an realistische Streumodelle für Flüssigkeiten und Festkörper (s. Abschn. 3) sowie an Experimente angepaßt. Führen wir die Horowitz-Funktion $f_0(y)$ in die Gl. (2.21a) für die Korrekturfunktion $\psi(y)$ ein, so folgt

$$\xi\, \Sigma_{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, y\, f_0(y)\, \Phi_{\mathrm{M}}(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, \psi(y) = \Sigma_{\mathrm{A}}(y)\, \psi(y)\, \Phi_{\mathrm{M}}(y)\,. \qquad (2.34)$$

Diese Gleichung kann, analog zur Wilkins-Gleichung, nur numerisch gelöst werden.

Der Ansatz von Cadilhac. Eine Verbesserung des modifizierten Gasmodells hat CADILHAC [9] angegeben. Nach HOROWITZ wird die

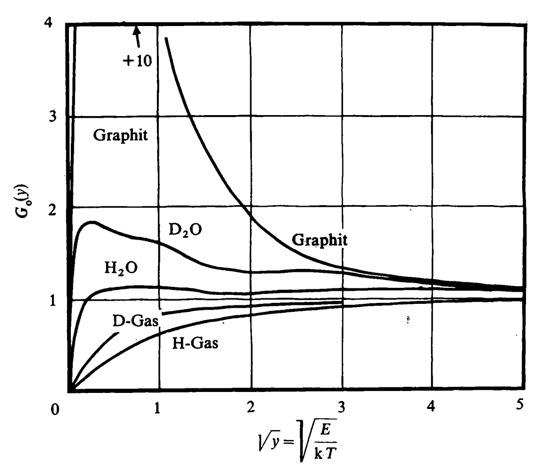


Abb. 2.4: Die Funktion $G_0(y)$ für gebräuchliche Moderatoren bei 20°C [9].

Abbremsung wie in einem Schwergasmodell, d. h. kontinuierlich, behandelt. Dies kann bei starker Resonanzabsorption, wie z. B. in der ^{239}Pu-Resonanz bei 0,3 eV oder in der ^{240}Pu-Resonanz bei 1 eV, zu Fehlern führen.

Das Modell von CADILHAC enthält zwei von der Art des Moderators und der Temperatur abhängige Funktionen $f(y)$ und $k(y)$. Die grundlegende Gleichung des Modells von CADILHAC schreibt sich mit $f(y)$ und $k(y)$ in der Form

$$\xi \Sigma_n \frac{d}{dy} y\, f(y)\; \Phi_M(y)\; \frac{d}{dy}\left[1 + k(y)\, \Sigma_A(y)\, \Phi_M(y)\right] \psi(y) = $$
$$= \Sigma_A(y)\, \Phi_M(y)\, \psi(y). \qquad (2.35)$$

Die Funktion $H(y) = \xi \Sigma_n \Phi_M k(y)$ ist in Abb. 2.5 dargestellt. $G(y) = 1/f(y)$ hängt mit der in Abb. 2.4 dargestellten Funktion $G_0(y) = 1/f_0(y)$ wie folgt zusammen:

$$G(y) = G_0(y) + \frac{y^2 e^{-y}}{\int\limits_{y'=0}^{y} \sqrt{y'}\, e^{-y'} dy'} \frac{d}{dy}\left(\frac{H(y)}{\sqrt{y}}\right).$$

Durch spezielle Wahl von $f(y)$ und $k(y)$ können die Grenzfälle, das Schwergasmodell (kontinuierliche Bremsung) und das Wasserstoff-

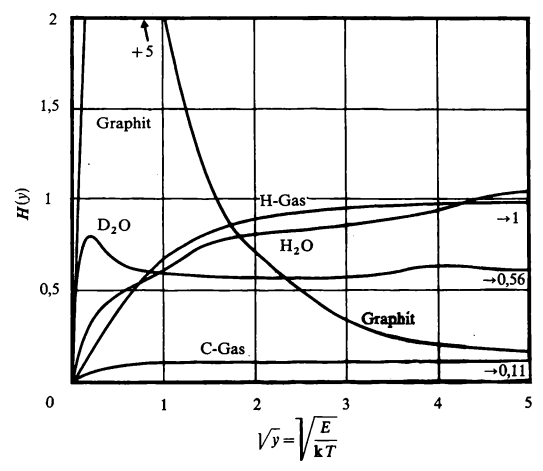


Abb. 2.5: Die Funktion $H(y)$ für gebräuchliche Moderatoren bei 20°C [9].

gasmodell (extrem diskontinuierliche Bremsung), exakt aus dem Modell von CADILHAC gewonnen werden. Für die üblichen Moderatoren stellt das Modell von CADILHAC eine gute Näherung dar.

Abb. 2.6 zeigt für ein ^{239}Pu-D_2O-Gemisch den Flußdichteverlauf in der Umgebung der 0,3–eV-Resonanz von ^{239}Pu nach den Modellen von CADILHAC und HOROWITZ. Das Modell von CADILHAC stimmt sehr gut mit der exakten Lösung überein [9].

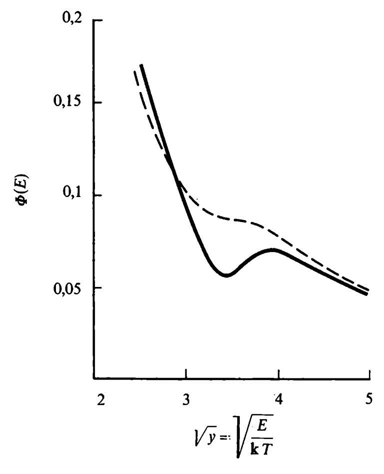


Abb. 2.6: Flußdichte in der Umgebung der ^{239}Pu-Resonanz bei einem ^{239}Pu-D_2O-Gemisch mit $\Sigma_A(kT)/\xi\,\Sigma_n = 0{,}2$ nach dem Modell von CADILHAC (ausgezogene Kurve) und dem Modell von HOROWITZ (gestrichelte Kurve). Für große x verlaufen beide Kurven wie $1/x^2$. Nach [9].

2.4. Mittlere Wirkungsquerschnitte im Bereich der thermischen Neutronen

In der Abb. 2.7 sind mittlere thermische Wirkungsquerschnitte für verschiedene Neutronenspektren in ^{235}U-Graphit-Mischungen dargestellt: a) für die Maxwell-Flußdichte (1.2) mit der Neutronentemperatur T_n und der Moderatortemperatur T, b) für das Neutronenspektrum des Gasmodells (s. Abb. 2.2) und c) für das Neutronenspektrum eines Kristallmodells (s. Abschn. 2.3 und 3.3). Der Mittelungsbereich erstreckt sich von 0 bis 2 eV.

Mit wachsendem ^{235}U-Gehalt nimmt der mittlere thermische Wirkungsquerschnitt ab, da das Spektrum immer härter wird. Die mit der Maxwell-Flußdichte und effektiver Neutronentemperatur

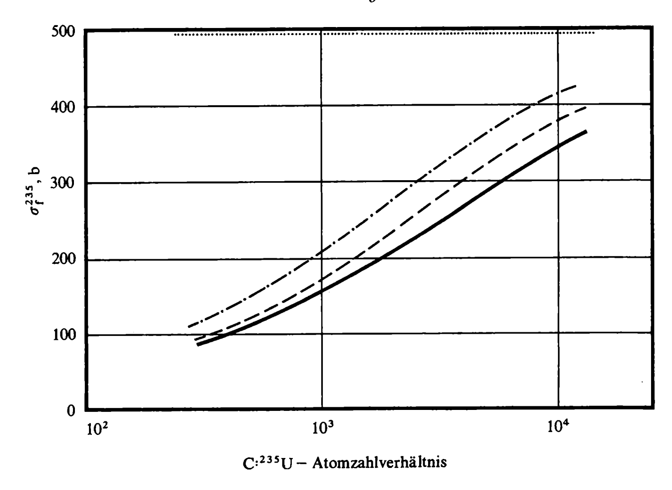


Abb. 2.7: Mittlerer thermischer Spaltquerschnitt $\overline{\sigma_f^{235}}$ in Abhängigkeit vom C : ^{235}U-Atomzahlverhältnis für verschiedene Neutronenspektren bei einer Moderatortemperatur von $T = 300°$K. $\sigma_f^{235}(kT) = 570$ b.
Zugrunde liegende Spektren: Strich-punktiert: Maxwell-Flußdichte mit effektiver Neutronentemperatur T_n nach (1.3), c = 4, $\overline{\sigma_f^{235}}$ nach (1.5a). Punktiert: Maxwell-Flußdichte zur Moderatortemperatur T nach (1.2). Gestrichelt: Neutronenspektrum nach dem Gasmodell für Graphit [2]. Ausgezogen: Neutronenspektrum nach einem Kristallmodell für Graphit [2].

ermittelten Wirkungsquerschnitte liegen sämtlich zu hoch. Das Gasmodell gibt den Verlauf von $\overline{\sigma_f^{235}}$ bis auf Korrekturen durch die chemische Bindung in Graphit (vgl. Kristallmodell) bereits befriedigend wieder. Der zum Vergleich in Abb. 2.7 eingezeichnete mittlere Wirkungsquerschnitt nach dem Kristallmodell zeigt, in welchem Maße die chemische Bindung bei genaueren Rechnungen die Ergebnisse des Gasmodells modifiziert. Für hohe ^{235}U-Verdünnungen gehen die Kurven asymptotisch in den über die Maxwell-Flußdichte zur Moderatortemperatur T gemittelten Wirkungsquerschnitt $\overline{\sigma_f^{235}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, g(T)\sqrt{T_0/T}\,\sigma_f^{235}(kT_0)$, $T = 293$ °K, über.

Aufgaben

2.1. Man beweise aus Impuls- und Energiesatz für den Stoß eines Neutrons mit einem bewegten Moderatorkern die Gültigkeit der Gl. (2.1–3).

2.2. Man formuliere eine verallgemeinerte Bremsdichte $q(E)$, definiert durch die Zahl der Neutronen, die je s unter die Energie E abgebremst werden, *abzüglich* der Neutronen, die über E hinaus beschleunigt werden, für den Thermalisierungsbereich $0 \leqq E \leqq E_G$ und zeige, daß die Thermalisierungsgleichung (1.9) damit in der Form der Bremsgleichung (III. 2. 61), nämlich

$$\frac{dq(E)}{dE} = \Sigma_A(E)\,\Phi(E), \tag{2.36}$$

geschrieben werden kann. Man weise nach, daß die verallgemeinerte Bremsdichte für eine Maxwell-Verteilung der Neutronen verschwindet.

2.3. Man zeige durch Integration der Gl. (2.21a), daß die Wilkins-Gleichung für die Korrekturfunktion $\psi(y)$ in der Form der folgenden Integralgleichung geschrieben werden kann

$$\psi(y) = 1 + \int_{z=0}^{y} dz\, z^{-2}\, e^{+z} \int_{y'=0}^{z} dy' \frac{\Sigma_A(y')}{\xi\, \Sigma_n}\, y'\, e^{-y'}\, \psi(y'). \qquad (2.37)$$

2.4. Zeige, daß die Näherungslösung (2.28) der Wilkins-Gleichung aus der Integralgleichung (2.37) der Aufgabe 2.3 folgt, wenn dort bei schwacher $1/v$-Absorption, d. h. geringer Abweichung von der Maxwell-Verteilung, in erster Näherung $\psi(y')$ unter dem Integral gleich 1 gesetzt wird.

3. Neutronenthermalisierung in realen Flüssigkeiten und Festkörpern

3.1. Streumodelle für Flüssigkeiten und Festkörper

Im Thermalisierungsbereich liegt die Neutronenenergie in der Größe der chemischen Bindungsenergie. Der Stoßpartner des Neutrons ist folglich nicht mehr ein „freier“ Kern, sondern ein ganzes System gebundener Atome. Der Energie- und Impulsaustausch erfolgt nur im Einklang mit den inneren Bewegungsmöglichkeiten der Atome dieses Streusystems.

In Festkörpern wie Beryllium, Berylliumoxid oder Graphit setzt sich die Bewegung des Atoms aus den Eigenschwingungen des Kristalls zusammen, die durch ein quasikontinuierliches Frequenzspektrum beschrieben werden. In Festkörpern wie Zirkonhydrid, die aus Atomen mit stark unterschiedlichen Massen bestehen, kann ein Teil des Frequenzspektrums durch diskrete harmonische Oszillatoren angenähert werden (Einstein-Modell). In Flüssigkeiten wie H_2O oder in organischen Kristallen wie Polyäthylen, in denen das Molekül noch eine Einheit bildet, kommen zum quasikontinuierlichen Frequenzspektrum der Translationen des Moleküls noch die diskreten Oszillationen der behinderten Rotation des Moleküls und der inneren Schwingungen des Moleküls hinzu. Außerdem existieren daneben auch noch diffusionsartige Bewegungen, die aber erst für subthermische Neutronen eine Rolle spielen und hier nicht berücksichtigt werden.

Die quantenmechanische Beschreibung der Streuung langsamer Neutronen an chemisch gebundenen Streusystemen geht auf Fermi [10] zurück. Van Hove [11] und Zemach-Glauber [12]

haben der Theorie mit Hilfe der Operatorschreibweise eine kompakte und praktische Form gegeben. Wir bringen hier nur Ergebnisse (zur Ableitung vgl. [27]).

3.1.1. Das Streugesetz

Wir betrachten im folgenden die inkohärente Näherung für den Streuquerschnitt unter Vernachlässigung der Interferenz von Neutronenwellen, die von verschiedenen Streuzentren ausgehen. Interferenzeffekte treten hauptsächlich nur bei den elastisch mit $E' = E$ am Moderator gestreuten Neutronen auf, die nicht zur Thermalisierung beitragen. In der inkohärenten Näherung ist der zweifach differentielle Wirkungsquerschnitt $\sigma_n(E, \boldsymbol{\Omega} \to E'\, \boldsymbol{\Omega}')\, dE'\, d\boldsymbol{\Omega}'$, der die Streuung eines Neutrons von der Energie E und Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega}$ in das Element $dE'\, d\boldsymbol{\Omega}'$ bei der Energie E' und der Flugrichtung $\boldsymbol{\Omega}'$ beschreibt, bezogen auf einen Kern des Streusystems (Kristall, Flüssigkeit) gegeben durch

$$\sigma_n(E, \boldsymbol{\Omega} \to E', \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\sigma_b}{4\pi} \sqrt{\frac{E'}{E}}\, \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} e^{+\frac{i}{\hbar}(E'-E)t}\, \chi(\varkappa, t)\, dt\,. \tag{3.1}$$

Hierin bedeutet

$$\sigma_b = \left(\frac{A+1}{A}\right)^2 \sigma_n = \left(\frac{A+1}{A}\right)^2 4\pi a^2\,. \tag{3.2}$$

den integralen Streuquerschnitt des gebundenen Kerns (im Gegensatz zum freien Kern) im Grenzfall sehr kleiner Neutronenenergie ($E \to 0$) bei $T = 0$ mit σ_n nach (II. 2.2) (der Index b deutet auf „bound“). Die Streufunktion $\chi(\varkappa, t)$ beschreibt die Kopplung der Impulsänderung des Neutrons

$$\varkappa\hbar = (\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})\,\hbar = \sqrt{2m}\left(\sqrt{E'}\,\boldsymbol{\Omega}' - \sqrt{E}\,\boldsymbol{\Omega}\right) \tag{3.3}$$

mit der gemittelten Bewegung des streuenden Nuklids in seinem vom Streusystem (Kristall, Flüssigkeit, Molekül) bestimmten Potentialfeld. (Sie darf nicht mit der in Kap. III benutzten Formfunktion χ verwechselt werden.) Solange wir uns auf isotrope Systeme (polykristalline Stoffe, Flüssigkeiten, Gase) beschränken, hängt die Streufunktion χ nicht von der Richtung des übertragenen Im-

pulses $\varkappa \hbar$, sondern nur von dessen Betrag ab. (3.1) muß sich daher durch die dimensionslosen Variablen

$$\alpha = \frac{(\varkappa \hbar)^2}{2 M \mathrm{k} T} = \frac{E' + E - 2 \sqrt{E E'} \, (\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega})}{A \mathrm{k} T} \tag{3.4}$$

und

$$\beta = \frac{E' - E}{\mathrm{k} T} \tag{3.5}$$

ausdrücken lassen:

$$\sigma_{\mathrm{n}} (E, \boldsymbol{\Omega} \to E', \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{4 \pi} \sqrt{\frac{E'}{E}} \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}} S(\alpha, \beta) . \tag{3.6}$$

α ist proportional zum Quadrat des übertragenen Impulses, β proportional zur übertragenen Energie. $M = m \cdot A$ = Masse des Streukerns. $S(\alpha, \beta)$ wird Streugesetz genannt*. Durch Vergleich von (3.6) mit (3.1) folgt:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{e}^{\beta/2}}{2 \pi \hbar} \cdot \int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E' - E) t} \chi(\alpha, t) \, \mathrm{d}t . \tag{3.7}$$

Meß- und Rechenergebnisse von zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitten werden vielfach in der Form $S(\alpha, \beta)$ dargestellt. Während $\sigma_{\mathrm{n}} (E, \boldsymbol{\Omega} \to E', \boldsymbol{\Omega}')$ von 3 Variablen abhängt, nämlich E, E' und dem Winkel zwischen $\boldsymbol{\Omega}'$ und $\boldsymbol{\Omega}$, ist $S(\alpha, \beta)$ lediglich eine Funktion von 2 Variablen. Integrieren wir (3.1) über alle möglichen Richtungen nach dem Stoß (oder (3.6) über alle möglichen α-Werte), so folgt für den in der Thermalisierungsgleichung (1.11) benötigten Übergangsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{n}} (E \to E') = \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \sigma_{\mathrm{n}} (E, \boldsymbol{\Omega} \to E' \, \boldsymbol{\Omega}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'$$

$$= \frac{A \mathrm{k} T \sigma_{\mathrm{b}}}{4 E} \, \mathrm{e}^{-\beta/2} \int\limits_{\alpha} S(\alpha, \beta) \, \mathrm{d}\alpha . \tag{3.8}$$

3.1.2. *Die Streufunktion*

Im folgenden sei die bisher nicht näher beschriebene Streufunktion $\chi(\alpha, t)$ für einige einfache Moderator-Modelle angegeben.

---

* Manche Autoren definieren als Streugesetz $S'(\alpha, \beta) = \mathrm{k} T \cdot S(\alpha, \beta)$.

Gasmodell. Für das in Abschn. 2 behandelte Modell des idealen Gases gilt die folgende Streufunktion [12]

$$\chi(\alpha, t) = \mathrm{e}^{-\alpha\left[(\mathrm{k}T)^2 \cdot \frac{t^2}{\mathrm{h}^2} - \mathrm{i}\,\mathrm{k}T \cdot \frac{t}{\mathrm{h}}\right]}. \tag{3.9}$$

Das Streugesetz (3.7) nimmt damit die einfache Form an

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\,\mathrm{k}T\sqrt{\pi\,\alpha}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\,\alpha}(\alpha^2+\beta^2)},$$

also (3.10)

$$\sigma_\mathrm{n}(E, \boldsymbol{\Omega} \to E', \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\sigma_\mathrm{b}}{8\,\pi\,\mathrm{k}T\sqrt{\pi\alpha}}\sqrt{\frac{E'}{E}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\,\alpha}(\alpha+\beta)^2}.$$

Aus (3.8, 10) ergibt sich der Wigner-Wilkins-Übergangsquerschnitt (2.10) des Gasmodells. Über Abschn. 2 hinaus können wir jetzt aus $S(\alpha, \beta)$ die Winkelabhängigkeit des differentiellen Streuquerschnitts berechnen und damit den mittleren Kosinus des Streuwinkels $\overline{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}} = \overline{\cos\psi}$ (vgl. (III. 1.35)) für alle Neutronenenergien im Thermalisierungsbereich angeben:

$$\overline{\cos\psi(E)} = \int\limits_{E'}\int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} (\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega})\,\sigma_\mathrm{n}(E, \boldsymbol{\Omega} \to E', \boldsymbol{\Omega}')\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'/\sigma_\mathrm{n}(E). \tag{3.11}$$

Kubischer Kristall. Im Falle eines einatomigen kubischen Kristalls mit isotropen harmonischen Gitterschwingungen und quasi dicht liegenden Frequenzen ω gilt [13]

$$\chi(\alpha, t) = \mathrm{e}^{-\alpha\int\limits_{\omega=0}^{\infty}\varrho(\omega)\,f(\omega, T, t)\,\mathrm{d}\omega} \tag{3.12}$$

mit

$$f(\omega, T, t) = \frac{\mathrm{k}T}{\omega\,\hbar}\left[(1 - \cos\omega\,t)\,\mathrm{ctgh}\,\frac{\omega\,\hbar}{2\,\mathrm{k}T} - \mathrm{i}\,\sin\omega t\right]. \tag{3.13}$$

$\varrho(\omega)$ ist die Frequenzverteilung der Gitterschwingungen mit der Normierung

$$\int\limits_{\omega=0}^{\infty}\varrho(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 1. \tag{3.14}$$

Vielfach wird als erste Näherung für die Frequenzverteilung das Debye-Spektrum

$$\varrho(\omega) = K \cdot \omega^2 \text{ für } 0 \leq \omega \leq \omega_D \tag{3.15}$$

angenommen (s. Abschn. 1.2.2). ω_D ist die Debyesche Grenzfrequenz.

Für einen nichtkubischen, aber polykristallinen einatomigen Kristall gilt (3.12) näherungsweise, wenn man die Mittelung über die Orientierung der Mikrokristalle relativ zum Neutronenstrahl nicht an der Streufunktion, sondern im Exponenten der Streufunktion (3.12) ausführt.

Polykristalliner Graphit [2]. Der Graphiteinkristall besitzt eine Schichtstruktur. Innerhalb einer Schicht ist die Bindung der Atome relativ stark, zwischen verschiedenen Schichten dagegen schwach. Dies äußert sich in einer Schwingungsanisotropie. Für Schwingungen parallel und senkrecht zu den Schichten gibt es verschiedene Frequenzverteilungen $\varrho_{||}(\omega)$ und $\varrho_{\perp}(\omega)$. Infolge der starken chemischen Bindung im Graphit liegen die Grenzfrequenzen $\omega_{||\max}$ und $\omega_{\perp\max}$ relativ hoch: $\hbar\,\omega_{||\max} = 0{,}22$ eV und $\hbar\,\omega_{\perp\max} = 0{,}14$ eV. Man muß daher in Graphit mit einer relativ starken Reduktion in der Energieabgabe rechnen, wenn die Neutronen unter 0,2 eV abgebremst sind.

Nach Mittelung über alle möglichen Einkristallorientierungen im polykristallinen Graphit läßt sich die Streufunktion $\chi(\alpha, t)$ nach PARKS wie folgt durch die Frequenzverteilungen ausdrücken

$$\chi(\alpha, t) = \int_{l=0}^{1} e^{-\alpha \int_{\omega=0}^{\infty} \varrho(\omega, l)\, f(\omega, T, t)\, d\omega}\, dl\,, \tag{3.16}$$

$$\varrho(\omega, l) = l^2\, \varrho_{\perp}(\omega) + (1 - l^2)\, \varrho_{||}(\omega). \tag{3.17}$$

Wasser. In der inkohärenten Näherung gilt für den Streuquerschnitt in Wasser: $\sigma_n^{H_2O} = 2\,\sigma_n^H + \sigma_n^O$. Da $\sigma_n^O \ll 2\sigma_n^H$ und Sauerstoff schlecht bremst, genügt eine Berechnung des Übergangsquerschnitts für Sauerstoff im Rahmen eines Gasmodells. Der Wasserstoffstreuquerschnitt muß dagegen genauer berechnet werden. Der im Wasser gebundene Wasserstoff nimmt an einer Translations-, Vibrations- und Rotationsbewegung des Moleküls teil. Unter der

Annahme, die verschiedenen Bewegungen seien in erster Näherung voneinander unabhängig, gilt für die Streufunktion

$$\chi = \chi_{\text{trans}} \cdot \chi_{\text{rot}} \cdot \chi_{\text{vib}} \cdot \tag{3.18}$$

Die Translation des Moleküls im Wasser wird im Nelkin-Modell [14] als frei (wie bei einer Gaspartikel) mit der effektiven Massenzahl $A = 18$ behandelt. χ_{trans} ist daher durch (3.9) bestimmt.

Die inneren Schwingungen gleichen denen des Moleküls im Dampf. Die Rotation der Moleküle ist behindert und kann in erster Näherung durch Drehschwingungen um die Hauptträgheitsachsen des Moleküls wiedergegeben werden. Die Moleküle seien statistisch orientiert. Die Mittelung des Produkts $\chi_{\text{rot}} \cdot \chi_{\text{vib}}$ über alle möglichen Molekülorientierungen wird im Nelkin-Modell näherungsweise durch die Mittelung der einzelnen Funktionen χ_{rot} und χ_{vib} ersetzt, wobei vereinfachend nicht die Exponentialfunktion selbst, sondern lediglich der Exponent gemittelt wird. Für die inneren Schwingungen gilt dann nach Ausführung dieser Mittelung [15]

$$\chi_{\text{vib}} = e^{-\alpha \cdot \frac{1}{3} \sum\limits_{\lambda} M c_\lambda^2 f(\omega_\lambda, T, t)} \,. \tag{3.19}$$

c_λ ist die Amplitude des Oszillators λ, die gemäß den Methoden der Molekülphysik [16, 17] zu berechnen ist, $f(\omega_\lambda, T, t)$ ist durch (3.13) gegeben.

Approximiert man die behinderte Rotation durch einen Drehoszillator der Frequenz ω_r, so gilt analog zu (3.19)

$$\chi_{\text{rot}} \approx e^{-\alpha \cdot \frac{1}{3} M c_r^2 f(\omega_r, T, t)} \,. \tag{3.20}$$

Die Frequenzen ω_λ und ω_r der inneren Schwingungen und der behinderten Rotation sind aus Raman- und Neutronenlaufzeitspektren bekannt. Für die Streufunktion des Wasserstoffs in H_2O gilt damit nach (3.18–20)

$$\chi(\alpha, t) = e^{-\alpha \left[(kT)^2 \cdot \frac{t^2}{\hbar^2} - i\, kT \cdot \frac{t}{\hbar} + \frac{1}{3} \sum\limits_{\nu} M c_\nu^2 f(\omega_\nu, T, t) \right]} \,. \tag{3.21}$$

Dabei läuft ν über λ und r. Für große Neutronenenergien, $E \gg \hbar\, \omega_\nu$, muß die Streufunktion naturgemäß in die Form (3.9) für ein freies Proton mit der Masse m übergehen. Entwickeln wir in diesem

Bereich $f(\omega_\nu, T, t)$ nach Potenzen von ωt bis zum quadratischen Glied (short collision time approximation), so zeigt sich durch Vergleich mit (3.9), daß zwischen den c_λ und c_r die Beziehung

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{3} \sum_\nu c_\nu^2 = \frac{1}{m} \tag{3.22}$$

bestehen muß. Ferner ergibt sich anstelle von T als effektive Temperatur des Moderators die Größe

$$T_{\text{eff}} = \frac{m}{M} T + \frac{1}{3} \sum_\nu m c_\nu^2 T_\nu, \tag{3.23}$$

mit der „Oszillatortemperatur"

$$T_\nu = \frac{1}{2} \frac{\omega_\nu \hbar}{\text{k}} \operatorname{ctgh} \frac{\omega_\nu \hbar}{2\,\text{k}T}. \tag{3.24}$$

Vor Ausführung der Zeitintegration in (3.1) werden die Oszillatoranteile der Streufunktion zweckmäßig umgeformt. Für den ν-ten Oszillator gilt

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{3}\alpha M c_\nu^2 f(\omega_\nu, T, t)} &\equiv \\ &\equiv e^{-\frac{1}{3}\alpha M c_\nu^2 \frac{\text{k}T}{\omega\nu\,\text{h}} \operatorname{ctgh} \frac{\omega\nu \cdot \text{h}}{2\,\text{k}T}} \cdot e^{+\frac{1}{2} x_\nu \left(y_\nu + \frac{1}{y_\nu}\right)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

mit den Abkürzungen

$$y_\nu = e^{-\frac{\text{h}\,\omega_\nu}{2\,\text{k}T} - \text{i}\,\omega_\nu t}, \tag{3.26}$$

$$x_\nu = \frac{1}{3} \alpha M c_\nu^2 \left(\frac{\text{k}T}{\omega_\nu \hbar}\right) \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\hbar\,\omega_\nu}{2\text{k}T}}. \tag{3.27}$$

Machen wir von der Relation

$$e^{\frac{1}{2} x_\nu \left(y_\nu + \frac{1}{y_\nu}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_\nu^n \,\text{I}_n(x_\nu) \tag{3.28}$$

Gebrauch, wo I_n die modifizierte Besselfunktion 1. Art der Ordnung n ist, so können wir den Beitrag (3.25) des ν-ten Oszillators in der Form

$$e^{-\frac{1}{3}\alpha M c_\nu^2 f(\omega_\nu, T, t)} = \tag{3.29}$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{3} M c_\nu^2 \left(\frac{kT}{\omega_\nu h}\right) \operatorname{ctgh} \frac{\omega_\nu h}{2kT}} \cdot \sum_{n_\nu=-\infty}^{+\infty} I_{n_\nu}(x_\nu) \cdot e^{-\frac{n_\nu h \omega_\nu}{2kT}} \cdot e^{-n_\nu h \omega_\nu \frac{it}{h}}$$

schreiben. Die Zeitabhängigkeit des Oszillatorbeitrags steckt jetzt allein im letzten Faktor der Summanden. Setzen wir (3.21) mit (3.29) in (3.1) ein und führen die Zeitintegration aus, so erhalten wir den Nelkin-Streuquerschnitt für den in Wasser gebundenen Wasserstoff:

$$\sigma_n(E, \Omega \to E', \Omega') = \frac{\sigma_b}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{3} \sum_\nu c_\nu^2 M \frac{kT}{\omega_\nu h} \operatorname{ctgh} \frac{\omega_\nu h}{2kT}} \cdot$$

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots = -\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4\alpha}\left(\alpha + \beta - \sum_\nu \frac{n_\nu h \omega_\nu}{kT}\right)^2}}{2kT\sqrt{\pi\alpha}} \prod_\nu e^{-\frac{n_\nu h \omega_\nu}{2kT}} \cdot I_{n_\nu}(x_\nu). \tag{3.30}$$

n_ν bezeichnet die Zahl der Energiequanten $\hbar\omega_\nu$ des Oszillators ν, die bei der Wechselwirkung des Neutrons mit dem Streusystem vom Oszillator ν aufgenommen oder abgegeben werden.

Anwendungen dieses Modells auf H_2O und die Verallgemeinerung auf D_2O wurden ausführlich von M. Pucher behandelt [18].

Die praktische Berechnung der komplizierten Streuquerschnitte für Flüssigkeiten und Festkörper erfolgt mit Rechenprogrammen auf elektronischen Digitalmaschinen. Die zur Zeit vielseitigsten Rechenprogramme sind Gasket [22] und Leap [23]. Mit ihnen lassen sich auch Verbesserungen der oben beschriebenen Modelle für Flüssigkeiten und Festkörper berechnen. Für Wasser haben z. B. Haywood und Thorson [24] eine verallgemeinerte Frequenzverteilung $\varrho(\omega)$ gemessen, die für die behinderte Rotation ein relativ breites Band von Torsionsschwingungen aufweist (im Nelkin-Modell wurde ein Oszillator mit bestimmter Frequenz angenommen). Die genannten Programme gestatten, die Neutronenstreuung mit kontinuierlichen Frequenzverteilungen zu berechnen (vgl. [27]).

3.2. Numerische Lösung der Thermalisierungsgleichung für reale Flüssigkeiten und Festkörper

Die Lösung der Thermalisierungsgleichung (1.11) für die komplizierten Streumodelle realer Flüssigkeiten und Festkörper ist im allgemeinen nur mit numerischen Methoden möglich. Man unterteilt dazu den Thermalisierungsbereich $0 \leq E \leq E_G$ in Intervalle ΔE_g und integriert (1.11) über diese Intervalle. Man erhält so anstelle der Integralgleichung (1.11) ein System vom inhomogenen algebraischen Gleichungen für die Φ_g

$$\Sigma_{Tg}\,\Phi_g = \sum_{g'} \Sigma_{ng' \to g}\,\Phi_{g'} + Q_{th\,g}\,. \tag{3.31}$$

Die mittlere Flußdichte für die Neutronengruppe g und die Gruppenquerschnitte sind analog zu (III. 2.47–49) definiert.

Zunächst müssen die Gruppenquerschnitte, insbesondere die Elemente $\Sigma_{n,\,g' \to g}$ der Streumatrix sowie die Quellterme berechnet werden. Zur Auswertung der Integrale für die Gruppenquerschnitte dient ein Näherungsansatz für $\Phi(E')$, z. B. die Maxwell-Flußdichte (1.2) oder eine iterativ verbesserte Funktion. Verwendet man sehr viele Energiegruppen im Thermalisierungsbereich, z. B. etwa 50, so kann man die Flußdichte in den kleinen Intervallen als hinreichend konstant annehmen und aus den Integralen herausziehen. Für die Elemente der Streumatrix gilt dann

$$\Sigma_{ng' \to g} = \frac{1}{\Delta E_{g'}} \int\limits_{\Delta E_g} \int\limits_{\Delta E_{g'}} \Sigma_n(E' \to E)\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}E\,. \tag{3.32}$$

Die Lösung von (3.31) wird relativ zu der im Aufbau ähnlichen Bremsgleichung dadurch erschwert, daß im Thermalisierungsbereich auch Aufwärtsstreuung vorliegt, also jede Neutronengruppe mit jeder anderen gekoppelt ist. Man muß daher für den ersten Durchgang einen Flußdichteverlauf $\Phi(E')$ annehmen und diesen dann in mehreren Iterationen verbessern.

3.3. Einfluß der chemischen Bindung auf die Neutronenthermalisierung

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, inwiefern die realistischen Übergangsquerschnitte, welche die chemische Bindung berücksichtigen, die Berechnung der Neutronenspektren nach dem

reinen Gasmodell verbessern. Als Beispiele seien leichtes Wasser und Graphit betrachtet.

Abb. 3.1 gibt Neutronenspektren für leichtes Wasser mit verschiedenen Konzentrationen von Cadmiumsulfat als Absorber an. Bei sehr kleinen Absorptionen ist das Neutronenspektrum praktisch unabhängig von der Art des Streumodells, vgl. Abschn. 2.3. Dagegen ist für relativ hohe Absorptionen von 9,6 b und 15,4 b je Wasserstoffatom eine merkliche Abweichung vom Gasmodell vor-

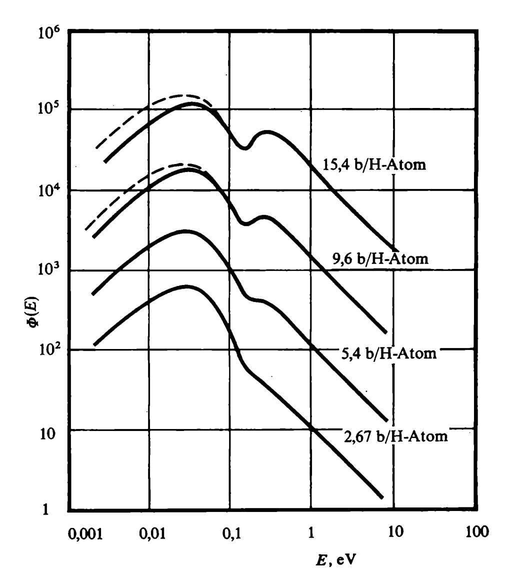


Abb. 3.1: Neutronenspektren in leichtem Wasser bei 25°C mit verschiedenen Konzentrationen eines Neutronenabsorbers (Cadmium-Sulfat). Den Rechnungen liegt der Nelkin-Übergangsquerschnitt (3.30) zugrunde. Zum Vergleich sind in zwei Fällen gestrichelt die Ergebnisse des Gasmodells eingetragen.

handen. Die chemische Bindung rückt das Maximum der Neutronenflußdichte, welches das Gasmodell relativ zur Maxwell-Verteilung nach höheren Energien verschoben hatte (s. Abb. 2.2), noch höher hinauf. Abb. 3.2 zeigt gemessene und nach verschiedenen Modellen (Nelkin, Haywood) berechnete Neutronenspektren für Lösungen von Plutoniumnitrat in Wasser. Bei den Resonanzenergien von 0,3 eV (^{239}Pu) und 1 eV (^{240}Pu) treten beträchtliche Absenkungen der Flußdichte Φ(E) auf.

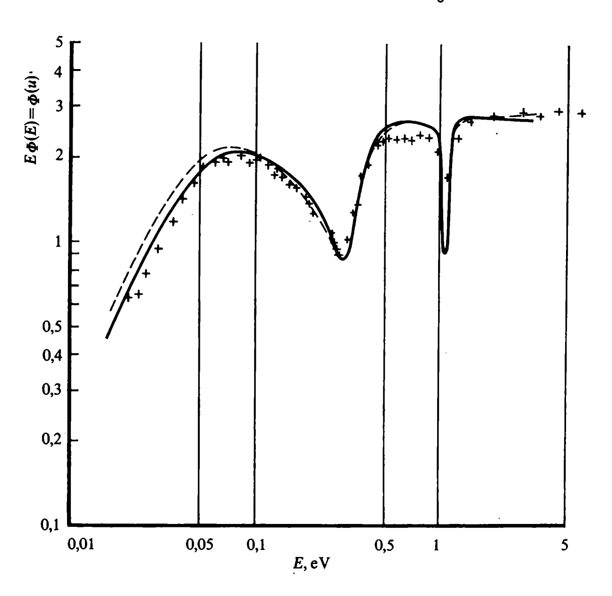


Abb. 3.2: Gemessene und berechnete Energieverteilung der langsamen Neutronen in einer Lösung von Plutoniumnitrat in Wasser bei 296°K (Absorptionsquerschnitt 6,6 b je H-Atom bei $E = kT$) [19]. ——— Haywood-Modell, ----- Nelkin-Modell.

Noch ausgeprägter als bei Wasser ist die Härtung des Spektrums im Graphit, wo eine relativ starke Bindung der Kohlenstoffatome vorliegt. Dies wird durch den Vergleich zwischen Gasmodell und Kristallmodell in Abb. 3.3 und 3.4 deutlich. Abb. 3.3 gibt das Bremsvermögen je Kern $\xi\,\sigma_n = \int_{E'} \ln\frac{E}{E'}\,\sigma_n(E \to E')\,dE'$ für Graphit nach dem Gasmodell und Kristallmodell wieder. Diese Gegenüberstellung zeigt zahlenmäßig, wie die Bindung der Kohlenstoffatome im Kristall die Bremseigenschaften des Graphits vermindert. Bei kleinen Neutronenenergien kehrt sich das Vorzeichen des Bremsvermögens um, da energiearme Neutronen überwiegend beschleunigt werden.

Die Auswirkung der schwächeren Bremsung im Kristall auf das Neutronenspektrum zeigt Abb. 3.4. Mit zunehmender Temperatur, d. h. zunehmender kinetischer Energie der Kerne, nimmt der Einfluß der chemischen Bindung auf das Neutronenspektrum naturgemäß ab. Abb. 3.4 zeigt sehr anschaulich, wie das Kristallmodell

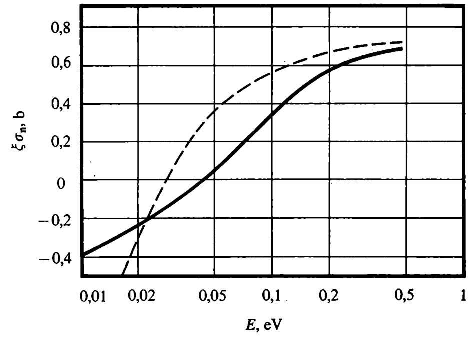


Abb. 3.3: Das Bremsvermögen des Graphits bei 300°K nach Gasmodell (---) und Kristallmodell (——) in Abhängigkeit von der Neutronenenergie. Der Abbildung liegen Rechenergebnisse aus [25] zugrunde.

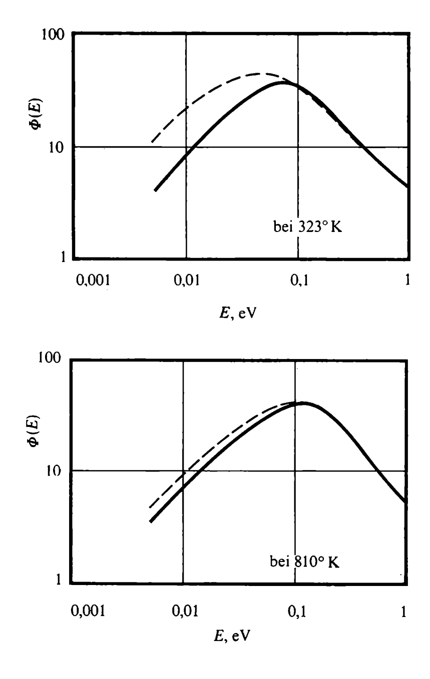


Abb. 3.4: Neutronenspektren in Graphit mit $\Sigma_A/N^C = 0{,}4$ b bei verschiedenen Temperaturen [2]. Die ausgezogenen Kurven wurden mit dem Übergangsquerschnitt eines Kristallmodells berechnet, die gestrichelten Kurven mittels des Gasmodells.

bei hohen Temperaturen in das Gasmodell übergeht. Oberhalb von 1200 °K kann bei Graphit in guter Näherung mit dem Gasmodell gerechnet werden. Die Unterschiede in den Spektren bewirken Unterschiede in den gemittelten Wirkungsquerschnitten im thermischen Bereich, die in Abb. 2.7 für den Spaltquerschnitt bei einem variablen Atomzahlverhältnis von C und ^{235}U dargestellt sind.

Die Rechnungen nach dem Kristallmodell stimmen mit Messungen gut überein [2].

Tab. 3.1 zeigt schließlich die Auswirkung verschiedener Thermalisierungsmodelle auf die Temperaturabhängigkeit der effektiven Multiplikationskonstante für ^{235}U-C-Mischungen zwischen 300 und 600 °K. Bei relativ hoher Absorberkonzentration treten beträchtliche Unterschiede zwischen dem Kristallmodell und dem Gasmodell auf.

Tab. 3.1: Temperaturabhängigkeit der effektiven Multiplikationskonstante bei ^{235}U-C-Mischungen zwischen 300 und 600 °K (nach [2]).

C : ^{235}U Atomzahlverhältnis	$\frac{-1}{k_{eff}(300)} \cdot \frac{k_{eff}(600) - k_{eff}(300)}{600 - 300}$		Unterschied %
	Kristallmodell	Gasmodell	
300	$6{,}07 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^{-6}$	74,9
900	$1{,}07 \cdot 10^{-5}$	$2{,}14 \cdot 10^{-5}$	50,2
2 500	$4{,}91 \cdot 10^{-5}$	$7{,}65 \cdot 10^{-5}$	35,8
5 000	$1{,}07 \cdot 10^{-4}$	$1{,}49 \cdot 10^{-4}$	28,2
10 000	$2{,}04 \cdot 10^{-4}$	$2{,}52 \cdot 10^{-4}$	19,0
12 500	$2{,}41 \cdot 10^{-4}$	$2{,}88 \cdot 10^{-4}$	16,3

4. Energieverteilung und Absorption der langsamen Neutronen im Brennstoffgitter

4.1. Die Thermalisierungsgleichung für das Brennstoffgitter

Bisher haben wir Moderator und Absorber als homogen gemischt betrachtet. Die Erweiterung auf Brennstoffgitter kann ähnlich wie im Bremsbereich (Abschn. III. 4) mit Hilfe der Stoßwahrscheinlichkeiten vorgenommen werden. Da die Flußdichte $\Phi(\boldsymbol{r}, E)$ in der Zelle ortsabhängig ist (Maximum am Zellrand, Minimum im Zentrum des Absorbers), muß die Zelle im allgemeinen in mehrere

Bereiche aufgeteilt werden, damit die Annahme einer räumlich konstanten Quellverteilung für die Berechnung der Stoßwahrscheinlichkeiten für die Teilbereiche gerechtfertigt ist. Die Stoßrate im Gebiet m lautet dann in Verallgemeinerung der Thermalisierungsgleichung (1.11) analog zu Gl. (III. 4.1)

$$V^k \Sigma_{\mathrm{T}}^k(E)\, \Phi^k(E) =$$
$$= \sum_i V^i P^{ik*}(E) \left[\int_{E'=0}^{E_{\mathrm{G}}} \Sigma_{\mathrm{n}}^i(E' \to E)\, \Phi^i(E')\, \mathrm{d}E' + Q_{\mathrm{th}}^i(E) \right], \quad (4.1)$$

wobei Φ^i durch (III. 4.2) und P^{ik*} durch (III. 4.4, 8) definiert sind. In Energiegruppenschreibweise (g, g' bezeichnen Energiegruppen analog zu (3.31)) gilt

$$V^k \Sigma_{\mathrm{T}g}^k \Phi_g^k = \sum_i V^i P_g^{ik*} \left[\sum_g \Sigma_{\mathrm{n}\, g' \to g}^i \Phi_{g'}^i + Q_{\mathrm{th}\, g}^i \right]. \quad (4.2)$$

Eine numerische Lösung der Thermalisierungsgleichung mittels Stoßwahrscheinlichkeiten besorgt z. B. das bekannte Rechenprogramm THERMOS [20].

4.2. Der thermische Nutzfaktor für das Brennstoffgitter

Nach der Definition des thermischen Nutzfaktors f in Abschn. I. 4 gilt für eine Zelle des Brennstoffgitters (Brennstoff: Index 0, Moderator: Index 1)

$$f = \frac{\int_{V^0} \int_{E=0}^{E_g} \Sigma_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Sp}}(E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E)\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}V}{\int_{V^0+V^1} \int_{E=0}^{E_g} \Sigma_{\mathrm{A}}(E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E)\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}V}. \quad (4.3)$$

Wenn man die Vorstellung der Gl. (4.2) zugrundelegt, verwandeln sich die Integrale in Summen:

$$f = \frac{\sum\limits_{\substack{i \\ \text{(Brennstoff)}}} \sum\limits_g V^i \Sigma_{\mathrm{A}g}^{\mathrm{Sp}\,i} \Phi_g^i}{\sum\limits_{\substack{i \\ \text{(Zelle)}}} \sum\limits_g V^i \Sigma_{\mathrm{A}\,g}^i \Phi_g^i}. \quad (4.3\mathrm{a})$$

Bei den engen Gittern der Leichtwasser-Leistungsreaktoren ist der Flußunterschied zwischen Moderator und Brennstoff nicht groß (im Gegensatz zu den weiten Natururan-Graphit-Gittern). Man braucht daher hier in erster Näherung das Brennstoff- und Moderator-Gebiet für die Rechnung mit Stoßwahrscheinlichkeiten nicht weiter zu unterteilen, hat also nur 2 Gebiete. Aus (4.2) ergeben sich dann in einer Eingruppentheorie unter der Annahme, daß im Brennstoff keine Quellen thermischer Neutronen auftreten, die folgenden Bilanzgleichungen

$$V^0\,\Sigma_{\mathrm{T}}^0\,\Phi^0 = V^0\,\Sigma_{\mathrm{n}}^0\,\Phi^0\,P^{00*} + V^1(Q_{\mathrm{th}}^1 + \Sigma_{\mathrm{n}}^1\,\Phi^1)\,P^{10*}, \quad (4.4)$$

$$V^1\,\Sigma_{\mathrm{T}}^1\,\Phi^1 = V^0\,\Sigma_{\mathrm{n}}^0\,\Phi^0\,P^{01*} + V^1(Q_{\mathrm{th}}^1 + \Sigma_{\mathrm{n}}^1\,\Phi^1)\,P^{11*} \quad (4.5)$$

mit

$$P^{00*} + P^{01*} = 1, \quad (4.6)$$

$$P^{10*} + P^{11*} = 1. \quad (4.7)$$

und

$$V^0\,\Sigma_{\mathrm{T}}^0\,P^{01*} = V^1\,\Sigma_{\mathrm{T}}^1\,P^{10*}. \quad (4.8)$$

Analog zu (III. 4.5–6) folgt dann aus (4.4–5)

$$\frac{\Phi^1}{\Phi^0} = \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}^0}{\Sigma_{\mathrm{T}}^0} + \frac{V^0\,\Sigma_{\mathrm{A}}^0}{V^1\,\Sigma_{\mathrm{T}}^1}\cdot\frac{1 - P^{10*}}{P^{10*}}. \quad (4.9)$$

Mit diesem Flußdichteverhältnis (disadvantage-factor) kann der f-Faktor gemäß (4.3a) berechnet werden zu

$$f = \frac{1}{1 + \dfrac{\Sigma_{\mathrm{A}}^1\,V^1}{\Sigma_{\mathrm{A}}^0\,V^0}\cdot\dfrac{\Phi^1}{\Phi^0}}. \quad (4.10)$$

Die Wirkungsquerschnitte stellen in dieser Näherung Mittelwerte über den Thermalisierungsbereich $0 \leq E \leq E_{\mathrm{G}}$ dar.

Amouyal, Benoist und Horowitz [26] verwenden bei den weiten Natururan-Graphit-Gittern die Diffusionstheorie im Moderator und eine Vielfachstoßtheorie im Brennstoff.

4.3. Mittlere Wirkungsquerschnitte

Wenn der heterogene Reaktor als Ganzes betrachtet wird (s. Kap. V), sieht man gewöhnlich in erster Näherung von der heterogenen Struktur der Spaltzone ab und behandelt sie als

quasihomogen. Um die mittleren Stoßraten bei der Homogenisierung nicht zu verfälschen, müssen wir die unterschiedlichen Flußdichten in den verschiedenen Gebieten bei der Bildung der mittleren Wirkungsquerschnitte berücksichtigen. Wir definieren dementsprechend als mittleren Wirkungsquerschnitt für den homogenisierten heterogenen Reaktor

$$\Sigma(E) = \frac{\sum_i V^i \Phi^i(E) \Sigma^i(E)}{\sum_i V^i \Phi^i(E)} . \tag{4.11}$$

Diese Formel gilt für alle Wirkungsquerschnitte und tritt bei einem homogenisierten heterogenen Reaktor an die Stelle der nur mit den Teilchendichten berechneten makroskopischen Wirkungsquerschnitte.

Aufgaben

4.1. Man berechne den f-Faktor für ein quadratisches Brennstoffgitter aus UO_2-Stäben in H_2O. Stabradius $a = 0{,}5$ cm, $V^{H_2O}:V^{UO_2} = 2:1$, $T = 300\,°K$, Anreicherung des ^{235}U : 3%.

4.2. Wie ändert sich der f-Faktor in Aufg. 4.1 beim Anfahren des Reaktors auf Leistung? Zahlenwerte wie in Aufg. III. 4.2.

4.3. Wie ändert sich der f-Faktor, wenn im Kühlmittel Sieden zugelassen wird? Zahlenwerte wie in Aufg. III. 4.3.

Literaturverzeichnis

[1] POOLE, M. J.: Measurement of neutron spectra in moderators and reactor lattices. J. Nucl. Energy 5, 325 (1957).

[2] PARKS, D. E., J. R. BEYSTER, and N. F. WIKNER: Thermal neutron spectra in graphite. Nucl. Sci. Eng. 13, 306 (1962).

[3] WESTCOTT, C. H.: Effective cross section values for well moderated thermal reactor spectra. CRRP-960 (1960).

[4] WIGNER, E. P., and J. E. Wilkins, Jr.: Effect of the temperature of the moderator on the velocity distribution of neutrons with numerical calculations for H as moderator. AECD-2275 (1944).

[5] COHEN, E. R.: A survey of neutron thermalisation theory. Proc. Int. Conf., Geneva 1955, Vol. 5, p. 405, P/611.

[6] WILKINS, J. E., Jr.: Effect of the temperature of the moderator on the velocity distribution of neutrons for a heavy moderator. CP-2481 (1944).

[7] HURWITZ, J., Jr., M. S. NELKIN, and G. J. HABETLER: Neutron thermalization. I. Heavy gaseous moderator. Nucl. Sci. Eng. 1, 280 (1956).

[8] HOROWITZ, J.: 1959, nicht veröffentlicht.

[9] CADILHAC, M., J. L. SOULE, and O. TRETIAKOFF: Thermalisation et spectres de neutrons. Proc. Third Int. Conf., Geneva 1964, Vol. 2, p. 153, P/73.

[10] FERMI, E.: Ric. Sci. **7**, 13 (1936). Englische Übersetzung: USAEC-TIS, Oak-Ridge, NP-2385.
[11] HOVE, L. VAN: Correlations in space and time and Born approximation scattering in systems of interacting particles. Phys. Rev. **95**, 249 (1954).
[12] ZEMACH, A. C., and R. J. GLAUBER: Neutron scattering by molecules. Phys. Rev. **101**, 118 (1956).
[13] GLAUBER, R. J.: Time-dependent displacement correlations and inelastic scattering by crystals. Phys. Rev. **98**, 1962 (1955).
[14] NELKIN, M.: Scattering of slow neutrons by water. Phys. Rev. **119**, 2, 741 (1960),
[15] KRIEGER, T., and M. NELKIN: Phys. Rev. **106**, 290 (1957).
[16] HERZBERG, G.: Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules. Van Nostrand, Princeton, 1960.
[17] BUTLER, D.: The scattering of slow neutrons by heavy water. Proc. Phys. Soc. **81**, 276 (1963).
[18] PUCHER, M.: Die Streuung langsamer Neutronen in Wasser. Dissertation, TH Stuttgart 1966, Nukleonik **10**, 129 (1967).
[19] JONES, R. H.: A compilation of experimental and theoretical neutron spectra, AERE-R 4776, 1964.
[20] HONECK, H. C.: THERMOS, A thermalisation transport theory code for reactor lattice calculations. BNL-5826, 1961.
[21] BEYSTER, J. R.: Nucl. Sci. Eng. **9**, 168 (1961).
[22] KOPPEL, J. U., J. R. TRIPLETT, and Y. D. NALIBOFF: GASKET, A unified code for thermal neutron scattering. GA 7417 (Rev.), 1967.
[23] MC. LATCHIE, R. C. F.: Program description LEAP, AERE, Harwell (1962).
[24] HAYWOOD, B. C., and I. M. THORSON: The scattering law for light and heavy water at 20 °C and 150 °C. Proc. Brookhaven Conf. on Neutron Thermalization, BNL-719, Vol. I, 1962.
[25] NELKIN, M. S.: Neutron thermalisation. Proc. Symp. Appl. Math., Vol. XI, 20 (1961).
[26] AMOUYAL, A., P. BENOIST, and J. HOROWITZ: Nouvelle méthode de détermination du facteur d'utilisation thermique d'une cellule. J. Nucl. Energy **6**, 79 (1957).
[27] EMENDÖRFER, D.: Streumodelle für die Neutronenthermalisierung im Kernreaktor. Atomkernenergie **14**, 97 (1969).

B · I - Hochschultaschenbücher

Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft

Auszug aus dem Gesamtverzeichnis

MATHEMATIK

Allgemeine Mathematik

Determinanten und Matrizen **(293*)**
von A. C. Aitken *M. A., D. Sc., F. R. S. Prof. of Mathematics in the University of Edinburgh. 142 Seiten.*

Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen **(112/112a)**
von Dr. Henri Cartan, *Professeur à la Faculté sciences de Paris. 236 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Cauchy-Weierstraßsche Funktionentheorie **(48*)**
von Dr. Alexander Dinghas, *o. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 114 Seiten.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen **(19)**
von Dr. Friedhelm Erwe, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. 2., verbesserte Auflage. 152 Seiten mit 11 Abb.*

Differential- und Integralrechnung I, II **(30/30a, 31/31a)**
von Dr. Friedhelm Erwe, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen.*
I Elemente der Infinitesimalrechnung · Differentialrechnung. *364 Seiten mit 29 Abb.*
II Integralrechnung. *197 Seiten mit 50 Abb.*

Matrizenrechnung **(103/103a)**
von Dr. Wolfgang Gröbner, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck. 276 Seiten.*

Algebraische Geometrie I **(273/273a)**
von Dr. Wolfgang Gröbner, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck. 193 Seiten.*

Topologie **(836/836a)**
von Dr. K. P. Grotemeyer, *o. Prof. an der Freien Univ. Berlin, ausgearbeitet von* Eberhard Letzner, *Akad. Rat an der Freien Univ. Berlin, und* Rudolf Reinhard, *Studienrat an der Fritz-Karsen-Schule, Berlin. 187 Seiten mit Abb.*

Einführung in die mathematische Statistik und ihre Anwendung **(42/42a)**
von Martin Hengst, *a. o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule Berlin. 258 Seiten.*

Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen **(67*)**
von E. L. Ince, *D. Sc., Lecturer in Technical Mathematics in the University of Edinburgh. 180 Seiten.*

Tensorrechnung für Ingenieure **(197/197a)**
von Dr. Eberhard Klingbeil, *Institut für Praktische Mathematik der Techn. Hochschule Darmstadt. 197 Seiten mit Abb.*

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik **(413/413a)**
von Dr. Gerhard Kropp, *Privatdozent für Geschichte der Mathematik an der Freien Univ. Berlin. 194 Seiten mit Abb.*

Ingenieurmathematik I, II, III, IV, V **(59, 60, 61, 62/62a, 93)**
von Dr. Detlef Laugwitz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.*
I *158 Seiten mit 43 Abb.* — II *152 Seiten mit 43 Abb.*
III Gewöhnliche Differentialgleichungen. *142 Seiten.* — IV *196 Seiten mit Abb.*
V Komplexe Veränderliche. *158 Seiten mit Abb.*

Aufgaben zur Ingenieurmathematik (Ingenieurmathematik VII) **(95/95a)**

von Dr. DETLEF LAUGWITZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, und Dr.* CURT SCHMIEDEN, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 182 Seiten.*

Überblicke Mathematik 1968 I, II **(161/161a, 232/232a)**

Herausgegeben von Dr. DETLEF LAUGWITZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.* I *213 Seiten.* II *210 Seiten mit Abb.*

Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung **(165/165a)**

von Dr. ROLF LEIS, *o. Prof. und Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik an der Univ. Bonn. 212 Seiten mit Abb.*

Nichteuklidische Geometrie **(123/123a)**

von Dr. HANFRIED LENZ, *apl. Prof. an der Techn. Hochschule München. 235 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen **(139)**

von M. J. LIGHTHILL. *F. R. S., Director, Royal Aircraft Establishment. 96 Seiten.*

Lineare Algebra **(828/828a)**

von Dr. ROLF LINGENBERG, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 161 Seiten.*

Metamathematik **(25)**

von Dr. PAUL LORENZEN, *o. Prof. an der Univ. Erlangen. 173 Seiten.*

Analysis I, II **(832*, 833*)**

von Dr. ERICH MARTENSEN, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.* I *200 Seiten.* II *Etwa 180 Seiten.*

Einführung in die moderne Mathematik **(75/75a)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 2. verbesserte Auflage. 189 Seiten mit 44 Abb.*

Grundlagen der euklidischen Geometrie **(105/105a)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 231 Seiten.*

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik **(51)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 151 Seiten mit 15 Abb.*

Mathematiker-Lexikon **(414/414a*)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 309 Seiten mit Abb.*

Mathematisches Begriffswörterbuch **(99/99a)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 302 Seiten mit Abb.*

Aufgabensammlung zur Einführung in die Moderne Mathematik **(263/263a)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin, und* GÜNTER LESSNER, *Studienrat. 136 Seiten.*

Unendliche Reihen **(35)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 160 Seiten mit 19 Abb.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung **(285/285a)**

von Dr. HERBERT MESCHKOWSKI, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 233 Seiten mit Abb.*

Analytische Geometrie und lineare Algebra **(15/15a)**

von Prof. Dr. ERNST PESCHL, *Direktor des Mathem. Instituts der Univ. Bonn. Revidierter Nachdruck. 200 Seiten mit 8 Abb.*

Funktionentheorie I (131/131a)
von Prof. Dr. ERNST PESCHL, *Direktor des Mathem. Instituts der Univ. Bonn. 274 Seiten.*

Algebra (110/110a)
von Dr. HANS-JÖRG REIFFEN, *Privatdozent an der Univ. Bochum, Dr.* GÜNTER SCHEJA, *Wissenschaftlicher Rat und Prof. an der Univ. Münster, und Dr.* UDO VETTER, *Assistent an der Techn. Hochschule Hannover. 276 Seiten.*

Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra (492/492a)
von Prof. Dr. W. W. SAWYER, *Weleyan University. Etwa 180 Seiten.*

Mengenlehre I (Einführung in die axiomatische Mengenlehre) (56/56a)
von Dr. JÜRGEN SCHMIDT, *apl. Prof. an der Univ. Bonn.* I Grundbegriffe. *241 Seiten mit Abb.*

Allgemeine Algebra (803/803a)
von Dr. JÜRGEN SCHMIDT, *apl. Prof. an der Univ. Bonn. Etwa 260 Seiten.*

The Concept of Number (825/825a)
(A Chapter in the History of Mathematics, with Applications of Interest to Teachers), *by* CHRISTOPH J. SCRIBA, *Dozent an der Univ. Hamburg, with the assistance of M. E.* DORMER ELLIS, *University of Toronto. 216 Seiten.*

Transzendente Zahlen (137*)
von Dr. CARL LUDWIG SIEGEL, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey. Prof. em. an der Univ. Göttingen. 87 Seiten.*

Projektive Geometrie (829/829a)
von OLAF TAMASCHKE, *Univ. Tübingen. Etwa 120 Seiten.*

Aufgaben zur Funktionentheorie I (195/195a)
von L. J. VOLKOVISKII, G. I. LUNTS *und* J. G. ARAMANOVICH. *Etwa 220 Seiten mit Abb.*

Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (831/831a)
von Dr. GERHARD WANNER, *Mathematisches Institut der Univ. Innsbruck. 182 Seiten.*

Algebraische Zahlentheorie (136/136a)
von HERMANN WEYL, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey. 222 Seiten.*

Spezielle Mathematik

n-Ecke (471/471a*)
von Dr. FRIEDRICH BACHMANN, *o. Prof. an der Univ. Kiel, und* ECKART SCHMIDT, *Studienrat, Kiel. Etwa 220 Seiten.*

Algebren (97/97a)
von Dr. ERNST-AUGUST BEHRENS, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 260 Seiten.*

Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren (122/122a)
von Dr. EDGAR BERZ, *apl. Prof. an der Univ. Gießen. 233 Seiten.*

Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation (808/808a)
von Dr. BRUNO BROSOWSKI, *Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Privatdozent an der Univ. München. 157 Seiten.*

Mathematische Grundlagen der statistischen Mechanik (58/58a)
von Prof. Dr. A. J. CHINTSCHIN. *175 Seiten.*

Theorie der Verbände (38/38a)
von Dr. HELMUTH GERICKE, *o. Prof. an der Univ. München. 174 Seiten mit 61 Abb.*

Contributions to the Method of Lie Series (802/802a*)
von Dr. WOLFGANG GRÖBNER, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck, und Dr.* H. KNAPP, *Dozent an der Univ. Innsbruck. 265 Seiten.*

Vorlesungen über Riemannsche Flächen **(837/837a)**

von R. C. GUNNING, *o. Prof., Princeton, New Jersey. Etwa 260 Seiten.*

Algebraische Zahlentheorie **(M.F.O.2)**

Herausgegeben von Prof. Dr. HELMUT HASSE, *Direktor des mathematischen Seminars der Univ. Hamburg, und Prof. Dr.* PETER ROQUETTE, *Direktor des Mathematischen Instituts der Univ. Tübingen. 272 Seiten.*

Untersuchungen zum Vierfarbenproblem **(810/810a/810b)**

von Prof. Dr. HEINRICH HEESCH, *Techn. Hochschule Hannover. Etwa 380 Seiten mit Abb.*

Stabilitätstheorie von Ljapunow – Die direkte Methode mit Anwendungen **(194*)**

von JOSEPH LA SALLE *und* SALOMON LEFSCHETZ, *RIAS, Baltimore, Maryland (Research Institute for Advanced Studies, The Martin Company). 121 Seiten.*

Schulmathematik vom höheren Standpunkt **(118/118a)**

von Dr. DETLEF LAUGWITZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, und Dr.* HANS-JOACHIM VOLLRATH, *Studienrat im Hochschuldienst, Techn. Hochschule Darmstadt. (Reihe: Mathematik für Studienanfänger, hrsg. von Prof. Dr.* H. BEHNKE *und Prof. Dr.* D. LAUGWITZ.*) 195 Seiten mit Abb.*

Spezielle Funktionen und ihre Anwendung I, II **(234*, 235*)**

von N. N. LEBEDEV, *Physikalisch-Technisches Institut der Akademie der Wissenschaften, U. S. S. R. Jeder Band etwa 180 Seiten.*

Einführung in die Tensoranalysis **(77*)**

von A. LICHNEROWICZ, *Professeur au College de France. 157 Seiten.*

Grundlagen der Geometrie I **(158/158a)**

von Dr. ROLF LINGENBERG, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 260 Seiten mit Abb.*

Einführung in die abstrakte Algebra **(146/146a)**

von E. M. PATTERSON, *B. Sc., Ph. D., F. R. S. E., Prof. of Mathematics, University of Aberdeen, und* D. E. RUTHERFORD, *Dr. Math., D. Sc. Gregory Prof. of Applied Mathematics, University of St Andrews. 175 Seiten.*

Funktionalanalysis I **(82/82a)**

von Dr. ERIKA PFLAUMANN, *Institut für Angewandte Mathematik an der Univ. Bonn, und Dr.* HEINZ UNGER, *o. Prof. an der Univ. Bonn, Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik. 240 Seiten.*

Topologische Vektorräume **(164/164a)**

von A. P. ROBERTSON, *Prof. an der Univ. Keele, und* WENDY ROBERTSON. *169 Seiten.*

Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie **(278/278a*)**

von Dr. WOLFGANG SCHWARZ, *Privatdozent an der Univ. Freiburg. Etwa 240 Seiten.*

Permutationsstrukturen **(710/710a)**

von OLAF TAMASCHKE, *Univ. Tübingen. Etwa 280 Seiten.*

Konvexe Mengen **(402/402a)**

von Prof. Dr. FREDERICK A. VALENTINE, *Department of Mathematics, University of California, Los Angeles. 247 Seiten mit Abb.*

Graphentheorie **(248/248a*)**

von Dr. KLAUS WAGNER, *apl. Prof. an der Univ. Köln. Etwa 260 Seiten.*

Angewandte Mathematik

Statistische Methoden der Datenanalyse **(816/816a)**

von Dr. SIEGMUND BRANDT, *Privatdozent an der Univ. Heidelberg. 267 Seiten.*

Algorithmen, rekursive Funktionen und formale Sprachen **(817*)**

von Dr. WILFRIED BRAUER, *Institut für Angewandte Mathematik der Univ. Bonn, und Dipl.-Math.* KLAUS INDERMARK, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Birlinghoven/Bonn. 171 Seiten.*

Fortran-Fibel **(204*)**

von Dr. HANS BREUER, *Prof. an der University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada. 85 Seiten mit Abb.*

Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden **(826/826a)**

von PAUL L. BUTZER, *o. Prof. an der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen, und Dr.* KARL SCHERER, *Lehrstuhl A für Mathematik der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen. 172 Seiten.*

Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung **(434*)**

von Dr. HEINZ ELTERMANN, *Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. 128 Seiten mit Abb.*

Mathematische Methoden der Physik I, II **(89, 90/90a)**

von Dr. WOLFGANG GRÖBNER, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck, und Dr.* PETER LESKY, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart.*
I *164 Seiten.* — II *248 Seiten.*

Fehler- und Ausgleichsrechnung **(262/262a*)**

von Dr. ERWIN HARDTWIG, *apl. Prof. an der Univ. München. 262 Seiten mit Abb.*

Analogrechnen **(168/168a)**

von Dr. JOSEF HEINHOLD, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* ULRICH KULISCH, *o. Prof. an der Univ. Karlsruhe. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Mathematische Grundlagen der Kartographie **(443/443a)**

von Dr. JOSEF HOSCHEK, *Privatdozent an der Techn. Hochschule Darmstadt. 167 Seiten mit Abb.*

Automatentheorie und formale Sprachen **(821/821a)**

(I. Turingmaschinen und rekursive Funktionen) *von Privatdozent Dr.* GÜNTER HOTZ, *Wissenschaftlicher Rat an der Univ. Saarbrücken, und Dipl.-Math.* HERMANN WALTER, *Institut für Angewandte Mathematik der Univ. Saarbrücken. 174 Seiten.*

Tensorrechnung für Ingenieure **(197/197a)**

von Dr. EBERHARD KLINGBEIL, *Institut für Praktische Mathematik der Techn. Hochschule Darmstadt. 197 Seiten mit Abb.*

Stabilitätstheorie von Ljapunow – Die direkte Methode mit Anwendungen **(194*)**

von JOSEPH LA SALLE *und* SALOMON LEFSCHETZ, *RIAS, Baltimore, Maryland (Research Institute for Advanced Studies, The Martin Company). 121 Seiten.*

Anwendung von Lieschen Gruppen in der Physik **(163/163a)**

von HARRY J. LIPKIN, *Weizmann Institute of Science, Rehovoth, Israel. 177 Seiten mit Abb.*

Schwingungslehre **(189/189a)**

von Dr. H. LIPPMANN, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. 264 Seiten mit Abb.*

Analyse technischer Systeme **(81/81a*)**

von MACFARLANE, *B. Sc. Ph. D. A. M. I. E. E., Queen Mary College, University of London. 312 Seiten mit Abb.*

Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik **(154/154a)**

von Dr. OTTO MAHRENHOLTZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 208 Seiten mit Abb.*

Programmierung elektronischer Rechenanlagen **(49*)**

von Dr. DIETER MÜLLER, *Institut für Theoretische Physik der Univ. Heidelberg. 3., wesentlich erweiterte Auflage. 182 Seiten mit 26 Abb.*

FORTRAN IV-Programmieranleitung **(804*)**

von Dipl.-Math. KARL H. MÜLLER *und Dipl.-Math.* IRMTRAUD STREKER, *Zentrales Recheninstitut der Univ. Frankfurt am Main. 140 Seiten.*

Einführung in die Praktische Mathematik **(812*)**

von Dr. JOACHIM NITSCHE, *o. Prof. an der Univ. Freiburg. 144 Seiten.*

Numerisches Rechnen I (88)

von Ben Noble, *M. A., B. Sc., D. Sc., A. M. I. E. E., The Royal College of Science and Technology, Glasgow. 154 Seiten mit Abb.*

Elektro- und Magnetohydrodynamik (811/811a*)

Vorträge der GAMM-Fachtagung am 10. u. 11. 10. 1967 in Aachen. Herausgegeben von Prof. Dr. sc. techn. F. Schultz-Grunow, *Institut für Allgemeine Mechanik an der Techn. Hochschule Aachen. 308 Seiten mit Abb.*

Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik (M.F.O.1)

Bericht einer Tagung des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach 15.–21. März 1964. Herausgegeben von Dr. Eduard Stiefel, *o. Prof. für Angewandte Mathematik an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich. 350 Seiten mit Abb.*

Matrizenrechnung in der Elektrotechnik (91)

von A. Mary Tropper, *M. Sc. Ph. D., Queen Mary College, Univ. of London. 99 Seiten.*

Darstellende Geometrie I, II (96/96a, 133/133a)

von Dr. Walter Wunderlich, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Wien.*
I *187 Seiten mit Abb.* — II *234 Seiten mit Abb.*

Mathematische Tafelwerke

12stellige Tafeln der Legendre-Polynome (320a–e)

von Dr. Werner Bundke, *Institut für Angewandte Physik der Univ. Frankfurt am Main. 352 Seiten.*

Mathematische Formelsammlung (13)

von Dr. Karl Rottmann, *2., verbesserte Auflage. 176 Seiten mit 39 Abb.*

Mathematische Funktionstafeln (14/14a)

von Dr. Karl Rottmann. *204 Seiten.*

Siebenstellige dekadische Logarithmen (17/17a)

von Dr. Karl Rottmann. *194 Seiten.*

Siebenstellige dekadische Logarithmen der trigonometrischen Funktionen (26/26a/26b)

von Dr. Karl Rottmann. *440 Seiten.*

Winkelfunktionen und logarithmische Funktionen (113/113a)

von Dr. Karl Rottmann. *273 Seiten.*

Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und Chemie (54*)

Mathematische Formelsammlung II
von Ian N. Sneddon, *M. A., D. Sc., Simson Prof. of Mathematics in the University of Glasgow. 166 Seiten mit 14 Abb.*

Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Tafeln I und II (55/55a, 76/76a)

von Kurt Uhde, *Brown, Boveri/Krupp Reaktorbau GmbH, Mannheim.* I *267 Seiten* — II *211 Seiten.*

PHYSIK

Allgemeine Physik

Elektrodynamik (233/233a)

von Dr. Gernot Eder, *o. Prof. an der Univ. Gießen. 273 Seiten mit Abb.*

Ein Vierteljahrhundert moderner Physik (702a–702m)

Otto Haxel zum 60. Geburtstag – herausgegeben von Dr. Heinz Filthuth, *o. Prof. an der Univ. Heidelberg. 773 Seiten mit Abb.*

Statistische Mechanik I, II, III **(68, 69, 70)**

von KERSON HUANG, *Associate Prof. of Physics, Massachusetts Institute of Technology.*
I Thermodynamik und kinetische Theorie, *163 Seiten.* II Statistische Mechanik, *214 Seiten.*
III Spezielle Probleme der statistischen Mechanik, *164 Seiten.*

Grundbegriffe der Physik **(449/449a)**

von Dr. FRIEDRICH HUND, *o. Prof. em. für theoretische Physik an der Univ. Göttingen. 234 Seiten.*

Aufgaben und Lösungen zur Experimentalphysik I, II **(155*, 156*)**

von Dr. KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.*
I *158 Seiten mit Abb.* — II *150 Seiten mit Abb.*

Experimentalphysik I (1. und 2. Teil) **(111*, 114*)**

von Prof. Dr. EDGAR LÜSCHER, *Direktor im Physik-Department der Techn. Hochschule München, mit Übungsaufgaben von Dr.* KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.*
Mechanik, Geometrische Optik, Wärme. I *260 Seiten mit Abb.* II *215 Seiten mit Abb.*

Experimentalphysik II, III (Elektromagnetische Vorgänge) **(115/115a, 116/116a)**

von Prof. Dr. EDGAR LÜSCHER, *Direktor im Physik-Department der Techn. Hochschule München, mit Übungsaufgaben von Dr.* KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.* I *336 Seiten mit 327 Abb. und graphischen Darstellungen.* II *Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Philosophische Probleme der modernen Physik **(50/50a)**

von Dr. PETER MITTELSTAEDT, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Köln. 3., überarbeitete Auflage. 208 Seiten mit 12 Abb.*

Physikalische Übungsaufgaben I, II, III **(32, 33, 34)**

von Prof. Dr. P. SCHERRER, *em. Ordinarius für Physik, und Prof. Dr.* P. STOLL, *Titular-Prof. an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich.*
I Mechanik, Akustik *(92 Aufgaben), 96 Seiten mit 44 Abb.*
II Optik, Thermodynamik, Elektrizitätslehre *(97 Aufgaben), 103 Seiten.*
III Elektrizitätslehre und Atomphysik *(83 Aufgaben), 103 Seiten.*

Theoretische Mechanik I **(801*)**

von Dr. GEORG SÜSSMANN, *o. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 192 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Atomphysik **(12)**

von Dr. HORST TEICHMANN, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 136 Seiten mit 47 Abb.*

Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung **(39/39a)**

von Dr. HORST TEICHMANN, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 3. Auflage. 231 Seiten mit 64 Abb.*

Physikalische Fachliteratur **(440/440a)**

von Dr. VALENTIN WEHEFRITZ, *Bochum. 171 Seiten.*

Einführung in die Physik I, II, III **(3, 4, 5)**

von Prof. Dr. WALTER WEIZEL, *Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Univ. Bonn. 5. Auflage.*
I Mechanik, Wärme, *171 Seiten mit 138 Abb.*
II Elektrizität, Magnetismus, *176 Seiten mit 12 Abb.*
III Optik, Atomphysik, *192 Seiten mit 99 Abb.*

Physikalische Formelsammlung I, II, III **(28, 36, 37/37a)**

von Prof. Dr. WALTER WEIZEL, *Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Univ. Bonn.*
I Mechanik, Strömungslehre, Elektrodynamik, *175 Seiten mit 23 Abb.*
II Optik, Thermodynamik, Relativitätstheorie, *148 Seiten.*
III Quantentheorie, *169 Seiten mit zweifarbigem Druck der Formeln.*

Quantentheorie, Relativitätstheorie, Elementarteilchen

S-Matrix-Theorie **(438/438a)**

von A. O. BARUT, *Dr. Sc., Prof. an der Univ. von Colorado. Etwa 300 Seiten mit Abb.*

Kernmodelle **(203/203a*)**

von Dr. GERMAN BAUMGÄRTNER *und Dipl.-Phys.* PETER SCHUCK, *Physik Department der Techn. Hochschule München, Abt. Theorie. 267 Seiten mit Abb.*

Relativistische Quantenmechanik **(98/98a*)**

von JAMES D. BJORKEN, *Associate Prof., und* SIDNEY D. DRELL, *Prof. an der Stanford University. 312 Seiten mit Abb.*

Relativistische Quantenfeldtheorie **(101/101a*)**

von JAMES D. BJORKEN, *Associate Prof., und* SIDNEY D. DRELL, *Prof. an der Stanford University. 312 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Theorie der Kernspektren **(473/473a*)**

von Dr. WOLFGANG DONNER, *Köln. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Quantenmechanik I **(264/264a*)**

von Dr. GERNOT EDER, *o. Prof. an der Univ. Gießen. 324 Seiten.*

Drehimpulse in der Quantenmechanik **(53/53a)**

von A. R. EDMONDS, *Department of Physics, Imperial College of Science and Technology of the University of London. 167 Seiten.*

Einführung in die Kernphysik **(16)**

von Prof. Dr. LEONARD EISENBUD *und Prof. Dr.* EUGENE P. WIGNER, *Princeton/New Jersey. 145 Seiten mit 15 Abb.*

Quantenelektrodynamik **(401/401a*)**

von Prof. Dr. RICHARD P. FEYNMAN, *California Institute of Technology. 249 Seiten mit Abb.*

Elementarteilchenphysik I **(462/462a)**

von STEPHAN GASIOROWICZ, *Ph. D., Prof. an der Univ. von Minnesota. Etwa 200 Seiten.*

Physikalische Prinzipien der Quantentheorie **(1)**

von Prof. Dr. WERNER HEISENBERG, *Direktor des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik in München. 125 Seiten mit 22 Abb.*

Geschichte der Quantentheorie **(200/200a*)**

von Dr. FRIEDRICH HUND, *o. Prof. em. für theoretische Physik an der Univ. Göttingen. 239 Seiten mit Abb.*

Elementarteilchenphysik **(100/100a/100b)**

von GUNNAR KÄLLÉN, *Department of Theoretical Physics, University of Lund, Schweden. 572 Seiten mit Abb.*

Quantentheorie **(701/701a*)**

von Dr. HEINRICH MITTER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München und Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik. 316 Seiten.*

Relativistische Elektronentheorie **(422/422a)**

von M. E. ROSE, *M. A., Ph. D. Chief Physicist, Oak Ridge National Laboratory. Etwa 300 Seiten mit Abb.*

Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie **(435/435a*)**

von R. F. STREATER, *Imperial College of Science and Technology, und* A. S. WIGHTMAN, *Princeton University. 235 Seiten.*

Einführung in die Quantenmechanik I **(9/9a)**

von Dr. GEORG SÜSSMANN, *o. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main.* I *Grundlagen, 202 Seiten.*

Quantenmechanik der Vielteilchensysteme **(52/52a)**

von D. J. THOULESS, *Department of Mathematical Physics, Univ. of Birmingham (England). 208 Seiten mit 32 Abb.*

Spezielle Physik

Neutronenphysikalisches Praktikum I, II **(170/170a, 171/171a)**

von Dr. Friedrich Bensch *und Dr.* Carl M. Fleck, *Atominstitut der österreichischen Hochschulen, Wien.*
I Einführung in die Physik und Technik der Aktivierungssonden. *234 Seiten mit Abb.*
II Ausgewählte Versuche und ihre Grundlagen. *182 Seiten mit Abb.*

Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse **(162/162a*)**

von Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam, und* Peter Mazur, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Leyden. 217 Seiten.*

Thermodynamik irreversibler Prozesse **(18/18a)**

von Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam. 216 Seiten mit Abb.*

Supraleitung **(74*)**

von E. A. Lynton, *Prof. of Physics, Rutgers, The State University New Brunswick, N. J., USA. 205 Seiten.*

Statistische Methoden der Thermodynamik **(288/288a*)**

von Dr. Peter Mazur, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Leyden, und Dr.* Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam. Etwa 240 Seiten.*

Halbleiter **(21)**

von Dr. Horst Teichmann, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 2. Auflage. 136 Seiten mit 55 Abb.*

Der Mößbauer-Effekt und seine Anwendungen in Physik und Chemie **(2/2a)**

von Dr. Horst Wegener, *a. o. Prof. an der Univ. Erlangen-Nürnberg. 214 Seiten mit 70 Abb.*

Angewandte Physik

Einführung in die Metallkunde **(196/196a)**

von Dr.-Ing. Horst Böhm, *o. Prof. am Institut für Werkstoffkunde an der Techn. Hochschule Aachen. 236 Seiten mit Abb.*

Theorie der Kernreaktoren I, II **(411/411a*, 412/412a)**

von Dr. K. H. Höcker, *o. Prof. am Institut für Kernenergetik an der Techn. Hochschule Stuttgart, und Dr.* D. Emendörfer, *Dozent am Institut für Kernenergetik an der Techn. Hochschule Stuttgart.*

Einführung in die Geophysik I **(275/275a)**

von Dr. Walter Kertz, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. Etwa 240 Seiten.*

Altersbestimmung mit der C^{14}-Methode **(403/403a*)**

von Prof. Dr. Willard F. Libby, *Chikago, mit einem Kapitel von Frederick Johnson. 205 Seiten mit Abb.*

Maser und Laser **(79/79a)**

von Prof. Dr. Erich Mollwo, *Direktor des Instituts für Angewandte Physik an der Univ. Erlangen-Nürnberg, und Dipl.-Phys.* Wittich Kaule, *Assistent am Institut für Angewandte Physik an der Univ. Erlangen-Nürnberg. 2. Auflage. 279 Seiten.*

Reaktorphysik I, II **(6, 11)**

von Prof. Dr. Rudolf Schulten *und Dr.* Wernfried Güth, *Arbeitsgemeinschaft BBC-Krupp für Kernenergie-Anlagen.*
I Der Reaktor im stationären Betrieb, *171 Seiten mit 24 Abb.*
II Der Reaktor im nichtstationären Betrieb, *164 Seiten mit 21 Abb.*

Abbildungen von Oberflächen mit Elektronen, Ionen und Röntgenstrahlen **(428/428a)**

von Dr. Hellmut Seiler, *Privatdozent am Institut für Angewandte Physik an der Univ. Tübingen. 131 Seiten mit Abb.*

CHEMIE

Chemische Thermodynamik **(213/213a*)**

von Dr. Valentin Freise, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 270 Seiten.*

Biochemie **(187/187a)**

von Dr. Gernot Grimmer, *Privatdozent an der Univ. Hamburg. Etwa 260 Seiten.*

Chromatographie in der Gasphase I–IV **(22/22a, 23/23a*, 24/24a, 92/92a, 468/468a, 472/472a)**

von Dr. Rudolf Kaiser, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen.*
I Gas-Chromatographie, *revidierter Nachdruck. 205 Seiten mit 102 Abb.*
II Kapillar-Chromatographie, *2., wesentlich erweiterte Auflage. 339 Seiten mit Abb.*
III Tabellen, 2. erweiterte Auflage. 1. Teil (24/24a) *181 Seiten mit Abb.* 2. Teil (468/468a) *165 Seiten mit Abb.* IV Quantitative Auswertung, 2. Auflage. 1. Teil (92/92a) *185 Seiten mit Abb.* – 2. Teil (472/472a) *118 Seiten mit Abb.*

Reaktionskinetik I (homogene Gasreaktion) **(290/290a*)**

von Keith J. Laidler, *Chairman of the Department of Chemistry, University of Ottawa. Etwa 230 Seiten mit Abb.*

Elektronenspektren organischer Moleküle **(250/250a*)**

von J. N. Murrell, *Prof. für Chemie an der Univ. von Sussex. 359 Seiten mit Abb.*

Quantentheoretische Chemie I, II, III **(43, 44/44a, 45/45a)**

von Dr. Heinzwerner Preuss, *Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Privatdozent für theoretische physikalische Chemie an der Univ. Frankfurt am Main.*
I *94 Seiten mit 19 Abb.* — II *238 Seiten mit 19 Abb.* — III *222 Seiten mit Abb.*

Anorganische Chemie I, II **(86/86a, 150/150a)**

von Prof. Dr. Max Schmidt, *Direktor des Instituts für Anorganische Chemie der Univ. Würzburg.*
I *301 Seiten mit Abb.* — II *221 Seiten mit Abb.*

Photochemie **(27/27a)**

von Dr. Herbert Staude, *Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 168 Seiten mit 40 Abb.*

Organische Chemie **(71/71a)**

von Dr. Manfred Wilk, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 372 Seiten mit Abb.*

BIOLOGIE

Biochemisches Praktikum für Landwirtschafts- und Ernährungswissenschaften **(809/809a)**

von Dr. K.-H. Neumann, *Justus Liebig-Univ. Gießen. Etwa 200 Seiten mit zahlreichen Abb.*

Paläobotanik I, II **(357/357a, 359/359a)**

von Dr. Friedemann Schaarschmidt, *Naturmuseum und Forschungsinstitut Senckenberg, Frankfurt am Main.* I *121 Seiten mit Abb. und 14 Farbtafeln.* II *102 Seiten mit Abb. und 22 Farbtafeln.*

Pflanzenleben **(145/145a*)**

von Prof. F. C. Steward, *unter Mitarbeit von* A. J. Krikorian, *Cornell University, Ithaca, N. Y. Autorisierte Übersetzung von Dr.* K.-H. Neumann, *Justus Liebig-Univ. Gießen. 268 Seiten mit Abb.*

VERFAHRENSTECHNIK

Grundlagen der thermischen Flüssigkeitszerlegung **(29)**

von Dr.-Ing. Reinhard Billet, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 150 Seiten mit 50 Abb.*

Optimierung in der Rektifiziertechnik **(261*)**
von Dr.-Ing. Reinhard Billet, *Verfahrenstechnische Versuchsgruppe, Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 129 Seiten.*

Verdampfertechnik **(85)**
von Dr.-Ing. Reinhard Billet, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 166 Seiten mit Abb.*

REGELUNGSTECHNIK

Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik **(154/154a)**
von Dr. Otto Mahrenholtz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 208 Seiten mit Abb.*

Regelungstechnik I **(63/63a*)**
von Gerhard Pressler, *Dipl.-Phys., Hartmann u. Braun, Frankfurt am Main.*
I Grundelemente, *3., überarbeitete Auflage. 348 Seiten mit 235 Abb.*

Frequenzgang- und Wurzelortskurvenverfahren **(193/193a)**
von Dr. Helmut Schwarz, *Wissenschaftlicher Rat und Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 164 Seiten.*

INFORMATIK

Endliche Automaten I **(H703)**
von Dr. Karl Heinz Böhling *und* Klaus Indermark, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Birlinghoven/Bonn. 99 Seiten.*

Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen – Theorie der Syntax **(404/404a)**
von Dr. H. Maurer, *University of Calgary.* Reihe: INFORMATIK, *herausgegeben von Dr.* U. Kulisch, *Karlsruhe. Etwa 220 Seiten.*

Lineare Automaten **(708)**
von Dr. Bernd Reusch, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Birlinghoven/Bonn. Etwa 160 Seiten.*

Die harmonische Linearisierung I, II **(469/469a, 470/470a)**
von Dr. Rudolf Starkermann, *BBC AG, Baden/Schweiz.* (*Beschreibungsfunktion*) Reihe: Theoretische und experimentelle Methoden der Regelungstechnik, *herausgegeben von* Gerhard Pressler.
I Einführung, Schwingungen, nichtlineare Regelkreisglieder – II Nichtlineare Regelsysteme.
Jeder Band etwa 200 Seiten.

ELEKTROTECHNIK

Grundlagen der Elektrotechnik I, II, III **(182, 183, 184)**
von Dr. Georg Bosse, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, unter Mitarbeit von Dipl.-Ing.* W. Mecklenbräuker, *wiss. Assistent und Dipl.-Ing.* G. Wiesemann, *wiss. Assistent.*
I *141 Seiten mit Abb.* — II *153 Seiten mit Abb.* — III *136 Seiten.*

Dampf- und Wasserkraftwerke **(300/300a*)**
von Dr. Paul Denzel, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. 231 Seiten mit Abb.*

Statistische Übertragungstheorie **(130/130a)**
von Dr. Friedrich Alexander Fischer, *Honorarprof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 187 Seiten.*

Probleme der Zuverlässigkeit elektronischer Schaltungen **(820/820a)**
von Dr.-Ing. Winfried Görke, *Institut für Nachrichtenübertragung und Nachrichtenverarbeitung der Techn. Hochschule Karlsruhe. Etwa 200 Seiten.*

Wellenausbreitung I **(141/141a)**

von Dr.-Ing. JÜRGEN GROSSKOPF, *Lehrbeauftragter an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 260 Seiten mit Abb.*

Antennen I **(140/140a)**

von Dipl.-Ing. ADOLF HEILMANN, *Honorarprof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Aufgabensammlung zur Starkstromtechnik **(198/198a)**

von Dr.-Ing HANS PRASSLER, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe und Dr.-Ing.* A. PRIESS. *192 Seiten mit Abb.*

Energiewandler der Starkstromtechnik I **(199/199a)**

von Dr.-Ing. HANS PRASSLER, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe. 178 Seiten mit Abb.*

Matrizenrechnung in der Elektrotechnik **(91)**

von A. MARY TROPPER, *M. Sc. Ph. D., Queen Mary College, Univ. of London. 99 Seiten.*

Elektrische Netzwerke und Maschinen (In Matrizendarstellung) **(108/108a*)**

von Dr. HERBERT WEH, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. 309 Seiten mit Abb.*

Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie I **(818/818a)**

von Dr.-Ing. INGO WOLFF, *wissenschaftl. Mitarbeiter am Institut für Hochfrequenztechnik der Techn. Hochschule Aachen. 236 Seiten mit Abb.*

TECHNISCHE MECHANIK

Aufgaben zur Theoretischen Mechanik **(709**)**

von JENS BAUCHERT, *wiss. Assistent,* GÜNTER HESSE, *wiss. Assistent,* SIEGFRIED KESSEL, *Akad. Rat,* JÜRGEN LENZ, *wiss. Assistent, Lehrstuhl für Theoretische Mechanik der Univ. Karlsruhe. Etwa 260 Seiten.*

Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I **(124/124a)**

von Dr.-Ing. GERHARD CZERWENKA, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* WALTER SCHNELL, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 193 Seiten mit Abb.*

Rechenmethoden des Leichtbaus II **(125/125a*)**

von Dr.-Ing. GERHARD CZERWENKA, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* WALTER SCHNELL, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Technische Mechanik I, II **(205/205a*, 206/206a)**

von Dr.-Ing. EDUARD PESTEL, *o. Prof. am Institut für Mechanik an der Techn. Hochschule Hannover.* I *284 Seiten mit Abb.* — II *196 Seiten mit Abb.*

Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierten Sprache **(830*)**

von Dr.-Ing. K.-H. SCHRADER, *Privatdozent für Mechanik an der Techn. Univ. Berlin. 137 Seiten.*

WERKSTOFFKUNDE

Einführung in die Werkstoffkunde **(467**)**

von Dr. HEIN-PETER STÜWE, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. Etwa 240 Seiten mit Abb.*



B·I·
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER
BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT
412/412a

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

412/412a

THEORIE DER KERNREAKTOREN

ZWEITER TEIL

VON

D. EMENDÖRFER UND K. H. HÖCKER

Institut für Kernenergetik
der Universität Stuttgart



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Gesamtherstellung: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer
Bindearbeit: Lachenmaier, Reutlingen
Printed in Germany
A

INHALTSVERZEICHNIS

ERSTER TEIL

ZWEITER TEIL

V. NEUTRONENDIFFUSION IN ELEMENTARER BEHANDLUNG

In den Kap. III und IV wurde die Energieverteilung der Neutronen als Folge von Stößen mit Atomkernen berechnet. Dabei ist zunächst ein unendlich ausgedehntes, homogenes Medium und eine räumlich konstante Quelldichte zugrundegelegt worden. Die räumliche Ausbreitung der Neutronen (Diffusion) tritt in diesem Falle nicht in Erscheinung, da die Überlagerung der Zickzackwege (abgesehen von Schwankungserscheinungen) im Mittel eine räumlich konstante Flußdichte ergibt. Beim endlichen Reaktor oder einer heterogenen Verteilung von Quellen und Senken wandern jedoch die Neutronen überwiegend aus dem Bereich der Quellen in den Bereich der Senken. Als Senken wirken der äußere Rand und lokale Absorber.

In diesem Kapitel werden vor allem die Auswirkungen des Neutronenausflusses durch die Oberfläche des endlichen Reaktors sowie ungleichförmiger Verteilungen der Neutonenquellen und -absorber auf die Raumabhängigkeit der Neutronenflußdichte (und der Wärmequelldichte) im Innern des Reaktors untersucht. Zur Berechnung dieser Größen dient die Diffusionstheorie, die in einer elementaren und in einer höheren Form vorliegt. Die erste setzt quasi isotrope Verteilung der Flugrichtungen der Neutronen voraus. Die zweite berücksichtigt eine ausgeprägte Strömungsrichtung und eine Richtungsabhängigkeit des Streuaktes. Die zweite Fassung wird auch Transporttheorie genannt.

Die Gleichung, die die Neutronenbilanz beschreibt, können wir aus der kinetischen Gastheorie übernehmen. Es gilt für die Bewegung von Neutronen in einem Reaktor ebenso wie für die Bewegung von Atomen und Molekülen, Elektronen und Ionen in einem Gasraum die Bilanz (alle Größen je Volumeneinheit und Sekunde):

$$\begin{aligned}&\text{Erzeugung} - \text{Absorption} - \text{Diffusionsverluste}\\&= \text{zeitliche Änderung der Teilchendichte}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Beschränken wir uns auf stationäre Zustände, so ist die rechte Seite der Gleichung 0.

Die exakte mathematische Formulierung dieser Bilanz stammt von BOLTZMANN und ist als Boltzmannsche Stoßgleichung bekannt (s. Kap. VI). Wir verzichten darauf, in diesem Kapitel die strenge Stoßgleichung hinzuschreiben und gehen gleich zur Herleitung der elementaren Diffusionstheorie über, die mit einigen von der Transporttheorie begründeten Erweiterungen als erste Näherung des Problems angesehen wird.

1. Das Ficksche Gesetz für die Stromdichte

Aus der kinetischen Gastheorie oder auch aus der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrizität kennen wir den Begriff des Stromes. Haben wir nämlich eine örtlich veränderliche Konzentration (Temperatur, Potential), so wird ein Strom in Richtung auf die kleinere Konzentration (Temperatur, Potential) fließen (Teilchenstrom, Wärmestrom, elektrischer Strom). Wir wollen diesen Strom für Neutronen berechnen. Zu unserem Zweck fragen wir nach der Zahl von Neutronen eines bestimmten Energiebereichs, die durch ein Flächenelement $\mathrm{d}S$ in einer Richtung – sagen wir von oben nach unten (s. Abb. 1.1) – hindurchgeht. Diese Neutronen müssen irgendwo oberhalb der Ebene von $\mathrm{d}S$ gestoßen haben. Nehmen wir an, es sei in dem Volumenelement $\mathrm{d}V$ geschehen, dessen sphärische Koordinaten r, φ, ϑ sind. Die Zahl der Stöße in $\mathrm{d}V$ in einer Sekunde ist

$$\mathrm{d}Z = \Sigma_{\mathrm{T}}\, \Phi\, \mathrm{d}V. \tag{1.2}$$

1.1. Isotrope Streuung im Laborsystem

Die Zahl der Teilchen, die nach einem Streuakt von $\mathrm{d}V$ nach $\mathrm{d}S$ gelangt, hängt vom Streugesetz und von der Flugrichtung der Teilchen ab. Der für die weitere Rechnung einfachste Fall ist die Annahme, daß das Neutron bei einem Stoß seine ursprüngliche Richtung im Mittel vollständig verliert, d. h. daß es im Laborsystem isotrop gestreut wird. Dann ist der Bruchteil der Neutronen, der in Richtung auf das Flächenelement $\mathrm{d}S$ gestreut wird, durch das Verhältnis der Fläche, unter der $\mathrm{d}S$ von $\mathrm{d}V$ aus erscheint, zur Kugeloberfläche gegeben, also durch $\mathrm{d}S \cdot \cos\vartheta / 4\pi\, r^2$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron von $\mathrm{d}V$ nach $\mathrm{d}S$ ohne Absorption oder Richtungsablenkung gelangt, ist $\mathrm{e}^{-\Sigma_\mathrm{T} r}$ ($\Sigma_\mathrm{T} = \Sigma_\mathrm{A} + \Sigma_\mathrm{S}$).

Demzufolge wird die Zahl der Neutronen, die in $\mathrm{d}V$ je Sekunde gestreut werden, und die $\mathrm{d}S$ durchsetzen,

$$\Sigma_\mathrm{S}\,\Phi\,\mathrm{d}V\,\frac{\mathrm{d}S\cos\vartheta}{4\pi r^2}\,\mathrm{e}^{-\Sigma_\mathrm{T} r} = \frac{\mathrm{d}S}{4\pi}\,\Sigma_\mathrm{S}\,\Phi\,\mathrm{e}^{-\Sigma_\mathrm{T} r}\cos\vartheta\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,. \tag{1.3}$$

Die Gesamtzahl der Neutronen $j_{z-}\cdot\mathrm{d}S$, die $\mathrm{d}S$ von oben nach unten durchsetzen, erhält man durch Integration über den oberen Halbraum. Also

$$j_{z-}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}S}{4\pi}\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}\Sigma_\mathrm{S}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{e}^{-\Sigma_\mathrm{T} r}\cdot\cos\vartheta\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,. \tag{1.4}$$

Zur Auswertung des Integrals entwickeln wir $\Phi(\boldsymbol{r})$ in eine Taylorreihe um die Stelle $\boldsymbol{r} = 0$ und brechen nach dem linearen Gliede ab.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x, y, z) = \Phi_0 + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0\,. \tag{1.5}$$

Das bedeutet ausreichende Genauigkeit bei langsamen Flußdichteänderungen in einem Bereich von 2 bis 3 mittleren freien

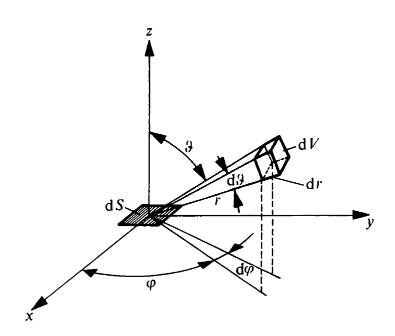


Abb. 1.1: Zur Ableitung der Neutronenstromdichte.

Weglängen λ_T um $\boldsymbol{r} = 0$. Wenn allerdings $\lambda_T = 1/\Sigma_T$ weitgehend durch die Absorption bestimmt ist, treten naturgemäß starke Flußänderungen auf. Daher ist in solchen Fällen die Diffusionstheorie nicht anwendbar. Flußschwankungen über größere Entfernungen fallen dagegen nicht ins Gewicht, da diese wegen des Faktors $\exp(-\Sigma_T r)$ nur wenig zum Integral beitragen. Die Umrechnung der kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten geschieht durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nimmt man das kartesische Koordinatensystem wie in Abb. 1.1 an, so entfallen die Glieder mit $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ und $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ bei der Integration über φ. Es bleibt übrig

$$j_{z-}\, \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}S}{4\pi}\, 2\pi \int_{r=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \Sigma_S \left[\Phi_0 + r \cos\vartheta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \right] \mathrm{e}^{-\Sigma_T r} \cos\vartheta \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r \tag{1.7}$$

oder nach Auswertung und Division durch dS

$$j_{z-} = \frac{\Sigma_S}{\Sigma_T} \frac{\Phi_0}{4} + \frac{\Sigma_S}{6\Sigma_T^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \approx \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\,\Sigma_T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0. \tag{1.8}$$

In der letzten Zeile ist von der Voraussetzung für die Gültigkeit der Gl. (1.5,8), nämlich $\Sigma_S / \Sigma_T \approx 1$, Gebrauch gemacht.

Ganz entsprechend findet man den Strom, der von unten nach oben 1 cm² passiert, indem man über ϑ von $\pi/2$ bis π integriert:

$$j_{z+} = \frac{\Sigma_S}{\Sigma_T} \frac{\Phi_0}{4} - \frac{\Sigma_S}{6\,\Sigma_T{}^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \approx \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0. \tag{1.9}$$

Diese Gleichungen sind für die Berechnung von Strömen durch Grenzflächen von Bedeutung.

Der Überschußstrom durch 1 cm² in positiver z-Richtung, der gewöhnlich als Stromdichte schlechthin bezeichnet wird, ist die Differenz von j_{z+} und j_{z-}:

$$j_z(0) = j_{z+}(0) - j_{z-}(0) = -\frac{\Sigma_S}{3\,\Sigma_T{}^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 = -D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0. \tag{1.10}$$

Der Faktor

$$D = \frac{\Sigma_n}{3\Sigma_T^{\,2}} \approx \frac{1}{3\,\Sigma_T} \text{ (da } \Sigma_A \ll \Sigma_n \text{ nach Voraussetzung)} \qquad (1.11)$$

heißt elementare Diffusionskonstante für ein im Laborsystem isotrop streuendes Medium und wird gewöhnlich mit D bezeichnet. Die Naturgesetze führen jedoch nicht auf eine isotrope Streuung im Laborsystem, sondern allenfalls im Schwerpunktsystem. Daher wird an (1.11) von vornherein eine Korrektur angebracht, die wir im nächsten Abschnitt ableiten (Gl. 1.20–21).

Der Ausdruck für j_z erscheint hier als Näherungsausdruck erster Ordnung. Es sei bemerkt, daß (1.10) in einem homogenen Medium unverändert gilt, wenn man die Taylor-Reihe (1.5) bis zum zweiten Glied ausdehnt. Die hinzukommenden Terme fallen bei der Bildung der Differenz (1.10) heraus.

Wenn das Flächenelement nicht senkrecht zur z-Richtung liegt, so ist bezüglich des Stromes durch dS in z-Richtung anstelle von dS die Projektion von dS auf die (x, y)-Ebene maßgebend. In diesem Fall hat dS auch für Ströme in x- und y-Richtung von Null verschiedene Projektionen. Die Größe j_z und die entsprechend gebildeten j_x und j_y erscheinen als Komponenten des Vektors der Stromdichte

$$\boldsymbol{j}(0) = -D\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \boldsymbol{i}_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \boldsymbol{i}_y + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \boldsymbol{i}_z\right]. \qquad (1.12)$$

Da das Flächenelement dS willkürlich in den Koordinatenursprung gelegt wurde, ist die Beziehung auf den Punkt $\boldsymbol{r} = 0$ nicht wesentlich. Man kann daher das Ergebnis verallgemeinern und die Stromdichte unter Benutzung des Operators grad für beliebige Koordinaten so schreiben*:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -D \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}). \qquad (1.13)$$

Diese Beziehung nennt man Ficksches Gesetz.

* In der kinetischen Gastheorie ist es üblich, den Strom durch den Gradienten der Teilchendichte statt der Flußdichte auszudrücken. Da v unabhängig vom Ort ist, gilt

$$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{3\,\Sigma_T} \operatorname{grad} \Phi = -\frac{v}{3\,\Sigma_T} \operatorname{grad} n = -D' \operatorname{grad} n. \qquad (1.13a)$$

Es ist

$$D' = D \cdot v. \qquad (1.11a)$$

1.2. Anisotrope Streuung, die Transportweglänge

Bei der Berechnung des Diffusionskoeffizienten hatten wir eben vorausgesetzt, daß die Neutronenstreuung im Laborsystem isotrop ist. Tatsächlich ist die Neutronenstreuung im Laborsystem nicht isotrop, sondern bevorzugt nach vorwärts gerichtet. Die Abweichungen von der Isotropie sind um so stärker, je leichter der Kern ist (s. Abschn. III. 1.1). Wir fragen jetzt nach derjenigen geradlinigen Strecke in der Ausgangsrichtung, über die hinweg die Vorzugsrichtung erkennbar ist. Diese Strecke heißt Transportweglänge. Wir beschränken uns auf monoenergetische Darstellung. Für eine energieabhängige Behandlung ist die Transporttheorie heranzuziehen.

Bis zu einer herausgegriffenen ersten Wechselwirkung möge ein Neutron die Wegstrecke l zurückgelegt haben. Die Kernwechselwirkung sei entweder eine elastische Streuung oder eine Absorption. Unelastische Streuungen sollen nicht vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Neutron nicht absorbiert, sondern gestreut wird, ist Σ_n/Σ_T. Bei der Streuung wird das Neutron aus der Einfallsrichtung $\boldsymbol{\Omega}$ in die Richtung $\boldsymbol{\Omega}'$ abgelenkt. Bei der folgenden Streuung, die wieder mit der Wahrscheinlichkeit Σ_n/Σ_T eintritt, werde das Neutron in die Richtung $\boldsymbol{\Omega}''$ abgelenkt, usw. (vgl. Abb. 1.2). Die Transportweglänge l_{tr} setzt sich dann aus l und den Projektionen der Strecken $l', l'', \ldots$ auf die Richtung der Wegstrecke l zusammen. Hierzu tragen die Strecken $l', l'', \ldots$ jedoch nur mit den Wahrscheinlichkeiten (Σ_n/Σ_T), $(\Sigma_n/\Sigma_T)^2, \ldots$ bei, da der Absorption Rechnung getragen werden muß. Also ist:

$$l_{tr} = l + \frac{\Sigma_n}{\Sigma_T}\, l' \cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') + \left(\frac{\Sigma_n}{\Sigma_T}\right)^2 l'' \cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}'') + \ldots \quad (1.14)$$

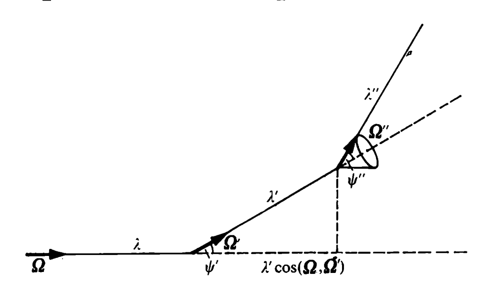


Abb. 1.2: Zur Ableitung der Transportweglänge.

Durch Mittelung von (1.14) über alle möglichen Flugrichtungen und Wegstrecken zwischen den Stößen erhalten wir die mittlere Transportweglänge λ_{tr}.

Da die jeweilige freie Weglänge bei einem homogenen Medium von der Bewegungsrichtung unabhängig ist, ist die Mittelung über die $l^{(i)}$ unabhängig von der Mittelung über die Richtungen $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$. Die erstere führt natürlich auf die mittlere freie Weglänge

$$\bar{l} = \lambda_T. \tag{1.15}$$

Die Mittelungen über die Richtungen $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ sind gleichfalls unabhängig voneinander durchzuführen. Wir zeigen das Vorgehen am Beispiel der cos-Funktion des dritten Gliedes. Nach dem cos-Satz der sphärischen Trigonometrie gilt

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}'') = {} & \cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \cdot \cos(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'') \\ & + \sin(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \cdot \sin(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'') \cdot \sin\varphi,\end{aligned} \tag{1.16}$$

wo φ der Azimutwinkel des Einheitsvektors $\boldsymbol{\Omega}''$ in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\Omega}'$ ist. Da alle Streurichtungen $\boldsymbol{\Omega}''$ auf einem Kegel mit dem Öffnungswinkel $\psi'' = \sphericalangle(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'')$ um $\boldsymbol{\Omega}'$ gleichwahrscheinlich sind, verschwindet das sin-Glied bei der Integration über φ. Für den Mittelwert $\overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}'')}$ folgt daher

$$\begin{aligned}\overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}'')} &= \overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \cdot \cos(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'')} \\ &= \overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')} \cdot \overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'')} = \overline{\cos\psi}^{\,2},\end{aligned} \tag{1.17}$$

letzteres, da die Mittelungen über die Richtungen $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ unabhängig voneinander durchzuführen sind. Analoges gilt bei den dritten und folgenden Stößen. Daher ist allgemein:

$$\overline{\cos(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}^{(i)})} = \overline{\cos\psi}^{\,i}. \tag{1.18}$$

Folglich ist die gewogene geradlinige Strecke, die das Neutron nach vielen Stößen, unter Berücksichtigung der Absorptionswahrscheinlichkeit, in der Anfangsrichtung zurücklegt:

$$\begin{aligned}\lambda_{tr} \equiv \bar{l}_{tr} &= \lambda_T \left[1 + \frac{\Sigma_n}{\Sigma_T}\overline{\cos\psi} + \left(\frac{\Sigma_n}{\Sigma_T}\right)^2 \overline{\cos\psi}^{\,2} + \dots\right] \\ &= \frac{\lambda_T}{1 - \dfrac{\Sigma_n}{\Sigma_T}\overline{\cos\psi}} = \frac{1}{\Sigma_T - \Sigma_n \overline{\cos\psi}} = \frac{1}{\Sigma_A + \Sigma_n\left(1 - \overline{\cos\psi}\right)}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Aus (1.19) folgt, daß die mittlere Transportweglänge bei isotroper Streuung im Laborsystem ($\overline{\cos\psi} = 0$) in die mittlere freie Weglänge λ_T übergehen würde. Umgekehrt ist es plausibel, daß wir bei der Diffusionskonstanten (1.11) in Anbetracht ihrer Ableitung (s. Abschn. 1.1) die mittlere freie Weglänge λ_T durch λ_{tr} ersetzen sollten, um eine bessere Näherung zu bekommen, also

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} = \frac{1}{3\,\Sigma_{tr}}. \tag{1.20}$$

Eine strenge Rechtfertigung wird im Kap. VI im Rahmen der Neutronentransporttheorie gegeben. Diese Korrektur im Diffusionskoeffizienten wird in der Neutronendiffusionstheorie immer durchgeführt. Sie ist nur für eine monoenergetische Behandlung des Problems ausreichend. Die Größe

$$\Sigma_{tr} = \frac{1}{\lambda_{tr}} = \Sigma_T - \Sigma_n \overline{\cos\psi} \tag{1.21}$$

heißt Transportquerschnitt. Ist die Streuung im Schwerpunktsystem isotrop, so gilt für den mittleren Kosinus des Streuwinkels im Laborsystem (vgl. Abschn. III. 1.1)

$$\overline{\cos\psi} = \frac{2}{3\,A}, \tag{1.22}$$

wobei A die Kernmasse in Einheiten der Neutronenmasse ist.

Bei den leichten Kernen treten die größten Unterschiede zwischen der mittleren freien Weglänge λ_T und der mittleren Transportweglänge λ_{tr} auf. Für Wasserstoff gilt mit $\overline{\cos\psi} = 2/3$ bei Vernachlässigung der Absorption

$$\lambda_{tr}^{H} = 3\,\lambda_T^{H}. \tag{1.23}$$

2. Die monoenergetische Diffusionsgleichung

2.1. Aufstellung der Gleichung

Wir betrachten ein Teilvolumen ΔV eines Mediums, in dem Neutronen der Geschwindigkeit v diffundieren. Die Zahl der in ΔV enthaltenen Neutronen ist

$$\int\limits_{\Delta V} n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{v}\int\limits_{\Delta V} \Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V. \tag{2.1}$$

Diese Neutronen erleiden einen Absorptionsverlust gemäß

$$\int\limits_{\Delta V} \Sigma_{\mathrm{A}}\, v\, n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\Delta V} \Sigma_{\mathrm{A}}\, \Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V. \tag{2.2}$$

Ferner geht ein Teil durch die Oberfläche $S(\Delta V)$ des Volumens ΔV verloren. Nach (1.13) ist der Strom durch die Oberfläche von innen nach außen

$$\oint\limits_{S(\Delta V)} \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint\limits_{S(\Delta V)} D\,\mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{2.3}$$

(2.3) läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Volumintegral verwandeln:

$$\begin{aligned} -\oint\limits_{S(\Delta V)} D\,\mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\int\limits_{\Delta V} \mathrm{div}\,D\,\mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V \\ &= -\int\limits_{\Delta V} \nabla D\,\nabla\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Für räumlich konstantes D ist

$$\mathrm{div}\,D\,\mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = D\,\Delta\,\Phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V. \tag{2.5}$$

In der Bilanz sind (2.2,4) als Verlustterme zu buchen. Nehmen wir jetzt noch eine räumlich verteilte Quelldichte $Q(\boldsymbol{r}, t)$ in ΔV an, so ist der Gewinn an Neutronen

$$\int\limits_{\Delta V} Q(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V. \tag{2.6}$$

Wir bilden nun die Neutronenbilanz für das Volumelement ΔV gemäß (1.1). Mit den Gl. (2.1–6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V} \frac{1}{v}\,\Phi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V &= \int\limits_{\Delta V} Q(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V + \int\limits_{\Delta V} \nabla D\,\nabla\,\Phi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V - \\ &\quad - \int\limits_{\Delta V} \Sigma_{\mathrm{A}}\,\Phi(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da die Gleichung für beliebige Teilvolumina des Mediums gilt, muß sie für die Integranden selbst erfüllt sein:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t) = Q(\boldsymbol{r},t) + \nabla D \nabla \Phi(\boldsymbol{r},t) - \Sigma_A \Phi(\boldsymbol{r},t). \quad (2.8)$$

Die Diffusionsgleichung als solche beherrscht weite Bereiche der Reaktortheorie. Sie wurde hier für konstante Geschwindigkeit v, also monoenergetische Neutronen, abgeleitet. Da im Reaktor Neutronen verschiedener Geschwindigkeit vorkommen, ist die Form (2.8) nur unter speziellen Voraussetzungen für eine Überschlagsrechnung brauchbar. Dazu muß noch der Quellterm $Q(\boldsymbol{r},t)$ bestimmt werden.

Um die formale Schwierigkeit zu umgehen, die in der Formulierung der Anteile der verzögerten Neutronen (s. Abschn. I. 3) liegt, werden wir die Diffusionsgleichung hinfort – sofern wir die Quelldichte explizit angeben – nur für den stationären Fall hinschreiben. Hierfür ist der Zeitpunkt, zu dem Neutronen als Folge einer Kernspaltung freigesetzt werden, gleichgültig. Zeitabhängige Reaktorprobleme werden erst im zweiten Band behandelt.

Die Gesamtzahl der je cm^3 aus der Kernspaltung freigesetzten Neutronen kann im Rahmen einer monoenergetischen Theorie für thermische Einzonenreaktoren (Reaktoren mit einheitlicher Materialzusammensetzung nach (I. 4.10) in der Form angesetzt werden:

$$Q_{\text{th}}(\boldsymbol{r}) = Q^*_{\text{th}}\,\Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) = k_\infty\,W_s\,\Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) \quad (2.9)$$

mit $k_\infty = f_{\text{th}} \cdot \eta_{\text{th}} \cdot \varepsilon \cdot p$. Bezieht man Q_{th} nicht auf die Zahl $\Sigma_A \Phi$ der je cm^3 und s absorbierten Neutronen, sondern auf die Zahl $\Sigma_f \Phi$ der Kernspaltungen, so gilt mit (II. 3.2–4)

$$Q_{\text{th}}(\boldsymbol{r}) = \nu_{\text{th}}\,\varepsilon\,p\,W_s\,\Sigma_f\,\Phi(\boldsymbol{r}). \quad (2.9\text{a})$$

Der Quellterm für die Eingruppentheorie eines schnellen Einzonenreaktors lautet mit (I. 4.5)

$$Q_s(\boldsymbol{r}) = f_s\,\eta_s\,\varepsilon\,\Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) = \nu_s\,\varepsilon\,\Sigma_f\,\Phi(\boldsymbol{r}). \quad (2.9\text{b})$$

Für den stationären Betrieb eines thermischen Einzonenreaktors gilt also die Gleichung:

$$D\,\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) + k_\infty\,W_s\,\Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) = 0. \quad (2.10)$$

Für einen schnellen Einzonenreaktor würde gelten:

$$D\,\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) + f_s\,\eta_s\,\varepsilon\,\Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) = 0. \quad (2.10\text{a})$$

Gelegentlich – insbesondere bei der Behandlung des Zeitverhaltens von Reaktoren – schreibt man die Reaktorgleichung gern in den Neutronendichten $n(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r})/v$. Setzt man $D' = D \cdot v$ und benützt (s. (II. 1.13)) die Lebensdauer der thermischen Neutronen

$$l_0 = \frac{1}{v\,\Sigma_A}, \tag{2.11}$$

so entsteht aus (2.10)

$$D'\,\Delta n(\boldsymbol{r}) + (k_\infty\,W_s - 1)\frac{n(\boldsymbol{r})}{l_0} = 0. \tag{2.12}$$

Eine analoge Gleichung gilt für schnelle Einzonenreaktoren.

2.2 Lösung der Diffusionsgleichung in quellfreiem homogenem Material, die Diffusionslänge

Dividiert man die Diffusionsgleichung für stationären Betrieb

$$D\,\Delta\Phi - \Sigma_A\,\Phi + Q = 0 \tag{2.13}$$

durch D, so entsteht eine Gleichung, die im quellfreien Raum ($Q = 0$) nur von einer einzigen Materialkonstanten Σ_A/D abhängt. $\sqrt{D/\Sigma_A}$ hat die Dimension einer Länge und wird als Diffusionslänge L bezeichnet.

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_A}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\Sigma_A\,\Sigma_{tr}}} = \frac{1}{\sqrt{3\,\Sigma_A(\Sigma_A + \Sigma_n(1 - \overline{\cos\psi}))}}. \tag{2.14}$$

L bestimmt die Abnahme der Flußdichte in der Umgebung einer Neutronenquelle. Ist z. B. eine homogene Neutronenquelle in Form einer Ebene gegeben, so ist die Abnahme der Neutronenflußdichte senkrecht zu dieser Ebene aus (2.13) zu berechnen

$$\Phi = A_E \cdot e^{-\frac{|z|}{L}}, \tag{2.15}$$

wenn das Medium in z-Richtung unendlich ausgedehnt ist. Die Diffusionslänge gibt also denjenigen Abstand von der Quellebene an, bei dem die Flußdichte auf den e. Teil abgesunken ist. Die Konstante A_E folgt aus der Bedingung, daß die Stromdichte in den Halbraum

an der Stelle $z = 0$ gleich $Q/2$ sein muß, wenn $Q/2$ die je s und cm^2 von der Quelle in den Halbraum emittierte Neutronenzahl darstellt:

$$- D \operatorname{grad} \Phi \Big|_{z=0} = - D \frac{d\Phi}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{Q}{2}. \tag{2.16}$$

Daraus findet man

$$A_E = \frac{Q \cdot L}{2 \cdot D}. \tag{2.17}$$

Entsprechend erhält man in einem unendlich ausgedehnten Medium um eine punktförmige Quelle die Flußdichte

$$\Phi = A_P \cdot \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}. \tag{2.18}$$

Für die Stromdichte in radialer Richtung erhält man

$$- D \operatorname{grad} \Phi = - D \frac{d\Phi}{dr} = D A_P e^{-\frac{r}{L}} \frac{1 + r/L}{r^2}. \tag{2.19}$$

Wenn an der Stelle $r = 0$ Q Neutronen je s emittiert werden, so muß sein

$$\lim_{r \to 0} (- 4 \pi r^2 D \operatorname{grad} \Phi) = Q. \tag{2.20}$$

Daraus folgt nach Einsetzen von (2.19)

$$A_P = \frac{Q}{4 \pi D}. \tag{2.21}$$

Wir können nun die mittlere Strecke, die ein thermisches Neutron vom Ort seiner Entstehung bis zum Ort seinerAbsorption zurücklegt, berechnen. Aus praktischen Gründen arbeiten wir allerdings besser nicht mit der mittleren Strecke $\overline{r}$, sondern mit dem mittleren Verschiebungsquadrat bis zur Absorption $\overline{r^2}$. Den Entstehungsort des Neutrons machen wir zum Zentrum eines räumlichen Polarkoordinatensystems. Die Zahl der zwischen r und $r + dr$ absorbierten Neutronen ist $4 \pi r^2 \, dr \, \Sigma_A \, \Phi(r)$. Daher ist das Quadrat

des mittleren Wegs von der Quelle bei $r = 0$ bis zur Absorption an der Stelle r gegeben durch

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2 \cdot 4\pi r^2 \Sigma_A \Phi(r)\, dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 \Sigma_A \Phi(r)\, dr}. \tag{2.22}$$

Setzt man $\Phi(r)$ aus (2.18) ein, so entsteht

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^3 \cdot e^{-\frac{r}{L}}\, dr}{\int_0^\infty r \cdot e^{-\frac{r}{L}}\, dr} = 6 L^2. \tag{2.22a}$$

Das Quadrat der Diffusionslänge ist also 1/6 des mittleren Quadrats jener Strecke, die das Neutron vom Ort seiner Entstehung bis zu seiner Absorption zurücklegt. (Der bei der Diffusion durchlaufene Zickzackweg ist natürlich sehr viel größer als $\sqrt{\overline{r^2}}$). Zahlenwerte für die Diffusionslänge sind in Tab. 2.1 angegeben.

Tab. 2.1: Diffusionskonstanten und Diffusionslängen thermischer Neutronen für verschiedene Moderatoren [1].

Moderator	H_2O	D_2O	Be	C
ϱ, g/cm^3	1	1,1	1,85	1,60
D, cm	0,16	0,87	0,5	0,84
L, cm	2,7	170	21	54

In Tab. 2.2 sind weitere Lösungen der Diffusionsgleichung (2.13) im unendlichen Medium für Einheitsquellen verschiedener Geometrien aufgeführt. Dabei ist zu beachten, daß die Einheitsquellen in den verschiedenen Geometrien verschiedene Dimensionen haben. Die Lösung der Diffusionsgleichung für die Einheitsquelle bezeichnet man als „Greensche Funktion" oder „Diffusionskern" $K_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$. $\boldsymbol{r}'$ ist der Quellpunkt, $\boldsymbol{r}$ der Aufpunkt. Bemerkenswert

Tab. 2.2: Diffusionskerne für verschiedene Quellgeometrien im unendlich ausgedehnten homogenen Medium.

Quell-geometrie	Quell-koord.	Quellstärke Q	Diffusionskern K_D
Ebene	x'	1 Neutron je s und cm²	$\frac{L}{2D} \cdot e^{-\lvert x-x'\rvert/L}$
Punkt	$\boldsymbol{r}'$	1 Neutron je s	$\frac{e^{-\lvert \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert/L}}{4\pi D\lvert \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}$
Kugel-schale	r'	1 Neutron je s und Schale mit Radius r'	$\frac{L}{8\pi r r' D}\left[e^{-\lvert r-r'\rvert/L} - e^{-\lvert r+r'\rvert/L}\right] = \begin{cases} \frac{\sinh(r'/L)}{r'/L} \cdot \frac{e^{-r/L}}{4\pi D r} \text{ für } r > r' \\ \frac{e^{-r'/L}}{4\pi D r'} \cdot \frac{\sinh(r/L)}{r/L} \text{ für } r < r' \end{cases}$
Linie	r', φ'	1 Neutron je s und Höhe 1 cm	$\frac{1}{2\pi D} K_0(\varrho/L)$ mit $\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\varphi - \varphi')$
Zylinder-schale	r'	1 Neutron je s und Schale mit Radius r' und Höhe 1 cm	$\frac{1}{2\pi D} K_0(r/L)\, I_0(r'/L)$ für $r > r'$ $\frac{1}{2\pi D} K_0(r'/L)\, I_0(r/L)$ für $r < r'$

ist, daß eine Kugelschalenquelle mit Radius r′ für $r > r'$ wie eine Punktquelle mit einer um den Faktor $\frac{\sinh r'/L}{r'/L}$ erhöhten Quellstärke wirkt. Entsprechend kann eine Zylinderschalenquelle für außerhalb liegende Punkte durch eine Linienquelle mit dem Verstärkungsfaktor $I_0(r/L)$ ersetzt werden. I_0 und K_0 sind die modifizierten Zylinderfunktionen.

Mit dem Diffusionskern $K_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ kann die Flußdichte für eine beliebige Quelldichte $Q(\boldsymbol{r}')$ wie folgt dargestellt werden:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} Q(\boldsymbol{r}')\, K_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\, dV' \tag{2.23}$$

2.3. Anschluß- und Randbedingungen

Ein Reaktor besteht im allgemeinen aus mehreren Zonen mit verschiedener Materialzusammensetzung. Die Neutronenflußdichte sei in jeder Zone durch die Diffusionsgleichung bestimmt. Die Lösungen der Differentialgleichungen in den Zonen müssen durch Anschlußbedingungen aufeinander bezogen werden. An der Grenze zum Außenraum gelten Randbedingungen.

In der Nähe von Materialgrenzen ist die Diffusionstheorie allerdings unzuverlässig. Dies gilt insbesondere vom äußeren Rand. Auf einer inneren Grenze sind demgegenüber die durch die Diffusionsnäherung entstehenden Fehler klein, wenn die Diffusionseigenschaften der beiden Medien ähnlich sind.

Wir betrachten als einfachstes Beispiel das Zweizonenproblem, repräsentiert durch eine homogene Mischung aus Brennstoff und Moderator, umgeben von einem Reflektor.

Die Anschlußbedingungen für die Lösung im Innen- und Außenraum ergeben sich aus der physikalisch plausiblen Forderung, daß die Neutronenströme aus der Spaltzone in den Reflektor und aus dem Reflektor in die Spaltzone stetig sein müssen: $j_+^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{R}_G) = j_+^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{R}_G)$ und $j_-^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{R}_G) = j_-^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{R}_G)$. Mit (1.8–9) entstehen daraus durch Addition und Subtraktion folgende Anschlußbedingungen:

1. Der Nettostrom senkrecht durch die Grenzschicht, $D \operatorname{grad} \Phi \cdot d\boldsymbol{S}$, muß im Innen- und Außenraum gleich sein.

$$D^{\mathrm{I}} \left[\frac{d}{dn} \Phi^{\mathrm{I}}\right]_{\boldsymbol{R}_G} = D^{\mathrm{II}} \left[\frac{d}{dn} \Phi^{\mathrm{II}}\right]_{\boldsymbol{R}_G} . \tag{2.24}$$

2. Die Flußdichte Φ ist beiderseits der Grenze $\boldsymbol{R}_G$* gleich:

$$\Phi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{R}_G) = \Phi^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{R}_G). \tag{2.25}$$

Aus (2.24–25) ergibt sich ein Flußdichteverlauf mit einem Knick in der Grenzschicht, der um so stärker ist, je mehr D^{I} von D^{II} abweicht. Abb. 2.1 gibt diesen Flußdichteverlauf qualitativ wieder.

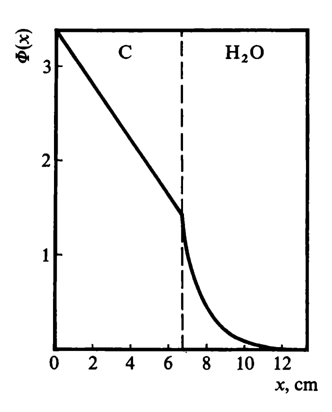


Abb. 2.1: Die Neutronenflußdichte einer Flächenquelle (bei $x = 0$) in zwei Medien mit verschiedenen Diffusionskonstanten. Die Neutronenflußdichte in der Graphitschicht verläuft annähernd linear, da die Schichtdicke sehr viel kleiner ist als die Diffusionslänge in Graphit.

Am äußeren Rand treten die Neutronen aus dem Reflektor aus. Wegen des im allgemeinen großen freien Raumes um den Reaktor und wegen der geringen Dichte der Luft ist die Wahrscheinlichkeit für die Rückstreuung in den Reaktor gering. Man betrachtet daher den Außenraum näherungsweise als Vakuum. Das Vakuum verhält sich bezüglich der Rückstreuung wie ein idealer Absorber.

Man kann für diesen Fall mit Hilfe von (1.8) eine Randbedingung formulieren, die wegen der Ungenauigkeit von (1.8) im Bereich stark variierender Flüsse zwar nicht in der engsten Umgebung der Randzone, aber doch im Abstand weniger freier Weglängen vom Rand den Verlauf der Flußdichte näherungsweise wiedergibt, und die der Einfachheit der Diffusionsgleichung entspricht. Sie setzt die Stromdichte j_-, die ins Reaktorinnere gerichtet ist, gleich 0.

* Zur Bezeichnung: Feste Werte einer laufenden Koordinate bezeichnen wir gewöhnlich durch große Buchstaben. Für die Grenzkoordinate zwischen zwei Medien verwenden wir den tiefgestellten Index G, für den materiellen Rand R.

Ist $\boldsymbol{n}$ die Normale auf der Randfläche $\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}$ des Reflektors gegen Vakuum, so gilt für (1.8) mit den Beziehungen (1.11, 20) auf dem äußeren Rand $\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}$:

$$j_{n-}(\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}) = \frac{\Phi(\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}})}{4} + \frac{\lambda_{\mathrm{tr}}}{6}\left[\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right]_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}} = 0. \tag{2.26}$$

Da wir bei $\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}$ einen endlichen Nettostrom $j_n = \frac{\lambda_{\mathrm{tr}}}{3}\left[\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right]_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}} \neq 0$ aus dem Reaktor in den Außenraum haben, ist nach (2.26) $\Phi(\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}) \neq 0$. Setzt man die Flußdichte mit ihrer Steigung am Rand nach außen fort, so verschwindet die „extrapolierte Flußdichte" an der Stelle $\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}} + d$ (s. Abb. 2.2). Die „lineare Extrapolationsstrecke" d ist gegeben durch

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right|_{\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}}} = -\frac{\Phi(\boldsymbol{R}_{\mathrm{R}})}{d}. \tag{2.27}$$

Geht man mit (2.27) in (2.26) ein, so erhält man

$$d = \frac{2}{3}\lambda_{\mathrm{tr}}. \tag{2.28}$$

Wie schon erwähnt, ist die Diffusionstheorie in der Nähe der Grenze gegen Vakuum eine schlechte Näherung. Man müßte hier die

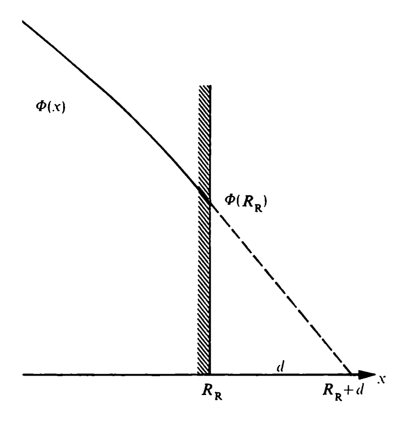


Abb. 2.2: **Zur Randbedingung der Diffusionstheorie.**

Transporttheorie (Kap. VI) anwenden. In einem schwach absorbierenden Medium kann man durch Änderung der Extrapolationslänge d erreichen, daß die Flußdichte nach der Diffusionstheorie im Abstand einiger freier Weglängen vom Rand mit der Flußdichte nach der Transporttheorie zusammenfällt. Der korrigierte Wert der Extrapolationslänge d beträgt für ebene Grenzflächen

$$d = 0{,}71\ \lambda_{tr}. \tag{2.29}$$

Man benutzt in der Regel (2.29) statt (2.28).

Anstelle der etwas komplizierten Bedingung (2.27) fordert man meist näherungsweise

$$\Phi(\boldsymbol{R}_R + d) = 0, \tag{2.30}$$

d. h., man ersetzt die geradlinig extrapolierte Flußdichte durch die Fortsetzung des im Inneren geltenden Funktionsverlaufs.

Die Größe d hängt von der Krümmung der Grenzfläche ab. In der Abb. 2.3 ist $d = d(a)$ für schwarze Zylinder und Kugeln mit Radius a, die in ein streuendes, nichtabsorbierendes Medium eingebettet sind, angegeben. Diese Werte sind an den Grenzen zu Steuerstäben maßgebend.

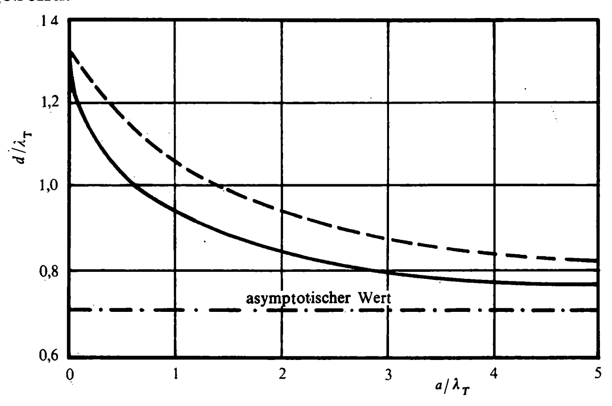


Abb. 2.3: Extrapolationsstrecke für zylindrische (ausgezogen) und kugelförmige (gestrichelt) Oberflächen schwarzer Körper als Funktion des Radius a (nach [2]).

2.4. Lösung der Diffusionsgleichung für den homogenen Einzonenreaktor

Die Diffusionsgleichung mit Spaltquellen, d. h. die Reaktorgleichung (2.10) oder (2.10 a) ist vom Typ

$$\Delta\,\Phi(\boldsymbol{r}) + B^2\,\Phi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{2.31}$$

Hierin steht B^2 als Zusammenfassung von Materialkonstanten. Beim thermischen Reaktor, den wir als Beispiel heranziehen wollen, ist

$$B^2 = (k_\infty W_s - 1)\frac{\Sigma_A}{D}. \tag{2.32}$$

B^2 ist aber nicht frei wählbar, da die Randbedingungen von (2.10) bzw. (2.31) befriedigt werden müssen. Das führt zu einer Beziehung zwischen materiellen und geometrischen Daten, die für den „kritischen" Reaktor erfüllt sein muß.

2.4.1. *Eigenfunktionen und Eigenwerte*

Die Lösungen von (2.31) für geläufige Geometrien sind in Tab. 2.3 zusammengestellt. Die weiteren partikulären Lösungen der Differentialgleichungen 2. Ordnung sind aus physikalischen Gründen (Symmetrie der Flußdichte zu $x = 0$ und Endlichkeit der Flußdichte bei $r \doteq 0$) ausgeschlossen. Sofern der Δ-Operator mehrere Variablen enthält, sind diese durch einen Produktansatz für $\Phi(\boldsymbol{r})$ zu trennen.

Die Randbedingung (2.30) führt mit den Funktionen aus Tab. 2.3 zu den folgenden Bestimmungsgleichungen für den Eigenwert B:

$$\cos B(X_R + d) = 0 \quad \text{für die Platte,} \tag{2.33}$$

$$\frac{\sin B(R_R + d)}{R_R + d} = 0 \quad \text{für die Kugel,} \tag{2.34}$$

$$J_0\big(B(R_R + d)\big) = 0 \quad \text{für den unendlichen Zylinder.} \tag{2.35}$$

J_0 ist die Zylinderfunktion erster Art. Den jeweils niedersten Eigenwert $B_0 = B$ nennen wir Flußwölbung, da $B^2 = -\Delta\Phi/\Phi$ ein Maß für die Krümmung des Neutronenflußdichteverlaufs darstellt. Die Werte von B, die (2.33–35) befriedigen, sind in der letzten Spalte der Tab. 2.3 für die erwähnten Geometrien aufgeführt. Höhere Eigenwerte, wie z. B.

$B_1 = \dfrac{3\,\pi/2}{X_R + d}$, $B_2 = \dfrac{5\,\pi/2}{X_R + d}, \ldots$ im Falle der Platte, erfüllen zwar ebenfalls die Randbedingung, die zugehörigen Eigenfunktionen wechseln jedoch innerhalb des Reaktors das Vorzeichen. Da die

Neutronenflußdichte $\Phi = v\,n$ stets positiv ist, haben die höheren Eigenfunktionen für den stationären Zustand keine physikalische Bedeutung. Die einzig sinnvolle Lösung ist der niederste Eigenwert und die zugehörige, im ganzen Innern des Reaktors positive und auf dem extrapolierten Rand verschwindende Eigenfunktion, die sog. „Grundlösung". Ein kleiner Reaktor besitzt nach Tab. 2.3 eine große Flußwölbung, ein großer Reaktor eine kleine. Im Grenzfall des unendlich ausgedehnten Reaktors wird $B = 0$ die Flußdichte also räumlich konstant.

In einem unterkritischen Reaktor mit Fremdquelle treten neben der Grundlösung auch Beimischungen höherer Eigenfunktionen auf. Bei Störungen des stationären Zustands (s. Bd. II) können ebenfalls höhere Eigenfunktionen zur Grundlösung beigemischt sein. Sie beschreiben im instationären Reaktor Ausgleichsvorgänge.

2.4.2. Die kritische Gleichung

Mit $L^2 = D/\Sigma_A$ und einer kleinen Umordnung wird aus (2.32)

$$\frac{k_\infty \cdot W_s}{1 + L^2 B^2} = 1. \tag{2.36}$$

(2.36) verknüpft den durch die Geometrie bestimmten Eigenwert B^2, für den die Gl. (2.31) lösbar ist, mit den Materialkonstanten $k_\infty = f\,\eta\,\varepsilon\,p$ und $L^2 = D/\Sigma_A$ des multiplizierenden Mediums, und zwar in dem Sinne, daß bei Gültigkeit von (2.36) die Bilanzgleichung (2.10) für den stationären Zustand erfüllt ist und umgekehrt. Die Neutronenproduktion durch Spaltung ist dann gerade durch Absorptionen und Neutronenverluste durch die Oberfläche kompensiert. Gl. (2.36) heißt daher „kritische Gleichung" des thermischen Einzonenreaktors nach der Eingruppentheorie. Stellt man (2.36) der Gl. (I. 4.11)

$$k = k_\infty \cdot W_s \cdot W_{th} = 1 \tag{2.36a}$$

gegenüber, so folgt, daß der Faktor

$$\frac{1}{1 + L^2 B^2} = W_{th} \tag{2.37}$$

die Verbleibwahrscheinlichkeit für die thermischen Neutronen darstellt.

Tab. 2.3: Lösungen der stationären Eingruppengleichung für den homogenen Reaktor ohne Reflektor. Die Lage der Koordinatenachsen und die Abmessungen sind aus Abb. 2.4 zu ersehen.

Geometrie	Laplace-Operator Δ	Lösung der Wellengleichung (1.3)	Eigenwert B^2
Unendliche Platte	$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$	$\cos Bx$	$\left(\frac{\pi/2}{X_\mathrm{R}+d}\right)^2$
Kugel	$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$	$\frac{\sin Br}{r}$	$\left(\frac{\pi}{R_\mathrm{R}+d}\right)^2$
Unendlicher Zylinder	$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$	$\mathrm{J}_0(Br)$	$\left(\frac{2{,}405}{R_\mathrm{R}+d}\right)^2$
Endlicher Zylinder	$\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\mathrm{J}_0(B_r r)\cdot\cos(B_z z)$	$\left(\frac{2{,}405}{R_\mathrm{R}+d}\right)^2+\left(\frac{\pi/2}{Z_\mathrm{R}+d}\right)^2$
Quader	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\cos(B_x x)\cdot\cos(B_y y)\cdot\cos(B_z z)$	$\left(\frac{\pi/2}{a+d}\right)^2+\left(\frac{\pi/2}{b+d}\right)^2+\left(\frac{\pi/2}{c+d}\right)^2$

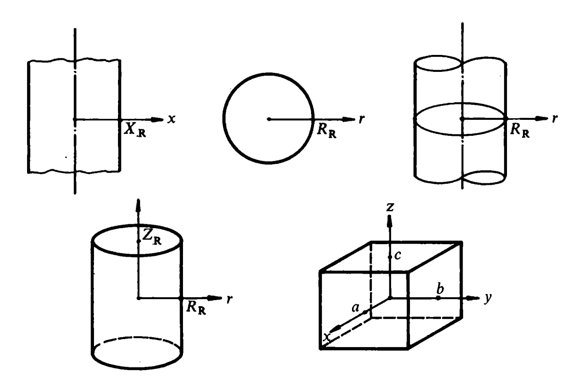


Abb. 2.4. Bezeichnungen zu Tab. 2.3.

Bei einem schnellen Reaktor ergibt sich für B^2 anstelle von (2.32)

$$B^2 = (k_\infty - 1)\frac{\Sigma_{As}}{D_s} = \frac{k_\infty - 1}{L_s^2}, \tag{2.38}$$

wobei die Materialkonstanten für schnelle Neutronen einzusetzen sind, $k_\infty = f_s\,\eta_s\,\varepsilon$. Damit ergibt sich die kritische Gleichung $k_\infty\,W_s = 1$ (vgl. I. 4.6) in der Form

$$\frac{k_\infty}{1 + L_s^2\,B^2} = 1. \tag{2.39}$$

Also hat W_s eine W_{th} entsprechende Form:

$$W_s = \frac{1}{1 + L_s^2\,B^2}. \tag{2.40}$$

Aufgaben

2.1. Man berechne die Neutronenflußdichte, die von einer in Graphit eingebetteten punktförmigen Neutronenquelle ausgeht, wenn diese Quelle 10^5 Neutronen je s emittiert. Wie groß ist die Flußdichte im Abstand $r = 10$, 50 und 100 cm von der Quelle, wenn $\sigma_\gamma = 0{,}0034$ b, $\sigma_n = 4{,}8$ b und $\varrho = 1{,}6$ g/cm³ ist?

2.2. Man berechne die Flußdichteverteilung einer unendlich ausgedehnten, ebenen Flächenquelle aus der Überlagerung der Flußdichteverteilung von Punktquellen.

2.3. In einem unendlich ausgedehnten Graphitblock befinde sich eine in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnte Schwerwasserschicht der Dicke $2\,X_G$. In der Mitte dieser Schwerwasserschicht emittiere eine unendlich ausgedehnte ebene Flächenquelle je s und cm² $Q/2$ Neutronen in den Halbraum. Man bestimme die Flußdichte $\Phi(x)$ und zeichne sie qualitativ auf.

2.4. Zur Bestimmung der Diffusionslänge L in Graphit wird ein Graphitblock der Höhe $2\,c$ auf der Grundfläche $2a \cdot 2b$ durch eine Flächenquelle (thermische Säule eines Forschungsreaktors) bestrahlt und die Flußdichte längs der z-Achse in der Mitte des Blocks gemessen (Exponentialexperiment). Man berechne diesen Flußdichteverlauf für den Fall eines unendlich hohen Blockes (in der Praxis ist $2c > 3L$ ausreichend) unter Berücksichtigung des Ausflusses in x- und y-Richtung.

2.5. Man berechne die Stromdichte in einem Einzonen-Plattenreaktor der Dicke $2X_R$ an der Stelle $x = X_R/2$ und vergleiche mit der Flußdichte an dieser Stelle (Zahlenbeispiele für die Diffusionskonstante eines Wasser- u. Graphitreaktors s. Tab. 2.1).

2.6. Man berechne die Gesamtleistung eines nackten Kugelreaktors bei vorgegebener maximaler Flußdichte im Zentrum.

2.7. Man beweise (2.37) aus der Definition der thermischen Verbleibwahrscheinlichkeit. *Anleitung:* Die verbleibenden Neutronen werden absorbiert. Deren Zahl ist in Beziehung zur Gesamtzahl der verlorengehenden Neutronen zu setzen.

2.8. Wie groß sind der kritische Radius und die kritische Masse einer Kugel aus reinem Spaltstoff (^{235}U, ^{239}Pu) mit folgenden Daten für ^{235}U: $\varrho = 18{,}7$ g/cm³, $\sigma_\gamma = 0{,}25$ b, $\sigma_f = 1{,}4$ b, $\sigma_{tr} = 6{,}8$ b, $\nu = 2{,}6$. Daten für ^{239}Pu: $\varrho = 15{,}8$ g/cm³ (bei 800 °K), $\sigma_\gamma = 0{,}26$ b, $\sigma_f = 1{,}85$ b, $\sigma_{tr} = 6{,}8$ b, $\nu = 2{,}98$. Wie groß werden Radius und Masse, wenn zur Wärmeabfuhr 30% des Spaltzonenvolumens mit flüssigem Na gefüllt sind ($\varrho^{Na} = 0{,}97$ g/cm³, $\sigma_A^{Na} = 0$ b, $\sigma_{tr}^{Na} = 3{,}3$ b)? Man berechne die Verbleibwahrscheinlichkeiten.

2.9. Wie groß ist der kritische Radius eines wassermoderierten, homogenen, nackten Kugelreaktors (Brennstoff ^{235}U). $\eta = 2{,}08$, $p\,\varepsilon = 1$, $N^H/N^{235} = 500$, $W_s = 0{,}63$. Als Wasserstoffkonzentration nehme man die des reinen Wassers. Wie groß ist die kritische Masse des Urans im Vergleich zu Aufg. 2.8?

2.10. Man leite die kritische Gleichung für einen reflektierten, ebenen, in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnten Reaktor nach der Eingruppentheorie ab. Die Spaltzone reicht von $-X_G$ bis $+X_G$, der Reflektor hat die Dicke T. Man setze $W_s = 1$. *Anleitung*: Man stelle die Diffusionsgleichung für Spaltzone und Reflektor auf. Die Lösungen müssen die Randbedingungen bei $x = 0$ (Symmetrieforderung) und bei $|x| = X_G + T + d^R$ erfüllen. Die kritische Gleichung folgt aus den Anschlußbedingungen bei $|x| = X_G$.

2.11. Die Spaltzonendicke X_G des reflektierten Reaktors nach Aufgabe 2.10 ist gegenüber der Dicke X_R der nicht-reflektierten Spaltzone mit der gleichen Materialzusammensetzung um den Betrag $X_R - X_G$ kleiner. Man definiert $\delta = X_R + d - X_G$ als „Reflektorersparnis". Man berechne δ aus den Anschlußbedingungen der Aufg. 2.10 für $B\delta \ll 1$.

2.12. Man vergleiche die Verhältnisse von mittlerer zu maximaler Flußdichte in der Spaltzone eines reflektierten und eines nackten Plattenreaktors mit Hilfe des Konzepts der Reflektorersparnis. Daten: $B^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ cm², $D = 1{,}33$ cm, $D^R = 0{,}813$ cm, $\Sigma_A = 0{,}000221$ cm⁻¹, $T = 50$ cm.

2.13. Man berechne nach der Eingruppentheorie den kritischen Radius eines ^{235}U-Kugelreaktors, der von einem unendlich ausgedehnten ^{238}U-Reflektor umgeben ist. Man vergleiche das Gewicht der Spaltzone mit dem Gewicht eines nackten ^{235}U-Kugelreaktors, s. Aufg. 2.8. Daten für ^{238}U: $\varrho = 18{,}9$ g/cm³, $\sigma_\gamma = 0{,}16$ b, $\sigma_f \approx 0$, $\sigma_{tr} = 6{,}9$ b.

2.14. Die Mantelfläche eines homogenen Zylinderreaktors der Höhe H ist von einem Graphitreflektor der Dicke T umgeben. Deckel und Boden des Reaktors sind ohne Reflektor. Man bestimme die Flußdichte nach der Eingruppentheorie als Funktion von r und z, wobei die Annahme gemacht werden darf, daß die Extrapolationslängen in axialer Richtung für Reaktor und Reflektor gleich sind.

2.15. Gegeben ist ein nackter, homogener, nicht moderierter Kugelreaktor aus $^{235}UC_2$. Im Zentrum dieses Reaktors herrsche eine Temperatur $T_{max} = 2700$ °K, die (aus Materialgründen) nicht überschritten werden darf. Der Reaktor strahlt seine Wärme

nach dem Gesetz $\sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4$ ab. Wie groß ist auf der Basis der Eingruppentheorie die maximale Neutronenflußdichte, der Temperaturverlauf im Reaktor, die Abstrahltemperatur und die abgestrahlte thermische Leistung? Bei der Berechnung darf angenommen werden, daß die Flußdichte auf dem materiellen Rand verschwindet. (Die Aufgabe charakterisiert die Arbeitsweise eines Kernreaktors für die Energieversorgung eines Raumfluggeräts.) – Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5{,}66 \cdot 10^{-12}$ Watt/cm² °K⁴, Emissionskoeffizient $\varepsilon = 0{,}9$, Wärmeleitzahl $\lambda = 0{,}3$ Watt/cm°K, $\sigma_A^{235} = 1{,}65$ b, $\sigma_f^{235} = 1{,}4$ b, $\nu = 2{,}6$, $\sigma_{tr}^{235} = 6{,}8$ b, $\sigma_A^C \approx 0$, $\sigma_{tr}^C = 2$ b, $\varrho^{UC_2} = 11{,}7$ g/cm³ (Mittelwerte).

3. Die energieabhängige Diffusionsgleichung für Einzonenreaktoren und ihre Behandlung nach der Alterstheorie

Im Kap. III wurde die Abbremsung der Neutronen im unendlichen Medium behandelt. Dabei ist die räumliche Bewegung der Neutronen während des Bremsprozesses ohne Bedeutung, sofern Quellen und Senken homogen verteilt sind. Bei endlichen Medien wird das Bremsspektrum in jedem Falle durch die räumliche Diffusion der Neutronen beeinflußt. Bremsung und Diffusion werden durch die energieabhängige Diffusionsgleichung beschrieben, die als eine Überlagerung von Bremstermen aus der Bremsgleichung (III. 2.7) und der monoenergetischen Diffusionsgleichung (2.10a) verstanden werden kann.

Bei der Lösung dieser Gleichung hat man sich, solange sie in einem einfachen analytischen Ausdruck bestehen mußte, gern der Fermischen Alterstheorie bedient. Wir werden dieses Verfahren weitgehend in der Gestalt von Übungsaufgaben behandeln. Heute wird die energieabhängige Diffusionsgleichung mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen gelöst. Dafür ist die Gruppendiffusionstheorie entwickelt, die wir in Abschn. 4 beschreiben.

3.1. Die energieabhängige Diffusionsgleichung

Wir definieren zunächst die Funktion $n(\boldsymbol{r}, E, t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}V$ als die Zahl der Neutronen mit der Energie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$, die sich zur Zeit t im Volumenelement $\mathrm{d}V$ bei $\boldsymbol{r}$ befindet. Analog benutzen wir die Funktionen $\Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}V = v \cdot n(\boldsymbol{r}, E, t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}V$ und $Q(\boldsymbol{r}, E, t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}V$, s. Gl. (III. 1.50, 51).

Für $\Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}V$ gilt eine Gleichung, die als wesentlichen Bestandteil die Bilanzgleichung für monoenergetische Neutronen hat. Da jedoch jeder Streuakt mit Energieänderung verbunden ist,

entstehen zusätzliche Verluste, nämlich in Höhe der Zahl der Streuakte, die die Neutronen der Energie E im betrachteten Volumen ΔV je Sekunde erleiden. Das sind

$$\int_{\Delta V} \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E.$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit den Verlusten für Absorption

$$\int_{\Delta V} \Sigma_A(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E$$

zusammenfassen:

$$\int_{\Delta V} \left[\Sigma_S(\boldsymbol{r}, E) + \Sigma_A(\boldsymbol{r}, E)\right] \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E = \int_{\Delta V} \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E. \tag{3.1}$$

Andererseits entstehen in ΔV zusätzliche Gewinne durch Einstreuung von Neutronen aus anderen Energiebereichen

$$\int_{\Delta V} \mathrm{d}V \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', t)\, \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E)\, \mathrm{d}E.$$

$\Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E)$ ist dabei der Übergangsquerschnitt im Bremsbereich, s. Gl. (III. 2.3). Wir erhalten somit die gegenüber der monoenergetischen Behandlung (2.7) erweiterte Bilanzgleichung für die Neutronen der Energie zwischen E und $E + \mathrm{d}E$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \frac{1}{v} \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E &= \int_{\Delta V} \nabla D(\boldsymbol{r}, E)\, \nabla \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E - \\ &- \int_{\Delta V} \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E + \int_{\Delta V} Q(\boldsymbol{r}, E, t)\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E + \\ &+ \int_{\Delta V} \mathrm{d}V \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', t) \cdot \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E)\, \mathrm{d}E. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da die Gleichung für beliebige Teilvolumina gilt, muß sie für die Integranden selbst gelten. Wir erhalten also als energieabhängige Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\boldsymbol{r}, E, t) &= \left[\nabla D(\boldsymbol{r}, E)\, \nabla - \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\right] \Phi(\boldsymbol{r}, E, t) + Q(\boldsymbol{r}, E, t) + \\ &+ \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', t) \cdot \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Gleichung entspricht der Bremsgleichung (III. 2.4), die wir für ein unendlich ausgedehntes Medium und stationäre Verhältnisse abgeleitet hatten. Als wesentliche Ergänzung enthält (3.3) den Diffusionsterm $\nabla D \nabla \Phi$. — Bei Benutzung der Lethargieskala lautet die Diffusionsgleichung

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, u, t)}{\partial t} = \left[\nabla D(\mathbf{r}, u) \nabla - \Sigma_{\mathrm{T}}(\mathbf{r}, u)\right] \Phi(\mathbf{r}, u, t) + Q(\mathbf{r}, u, t) + \\ + \int_{u'} \Phi(\mathbf{r}, u', t) \, \Sigma_{\mathrm{S}}(\mathbf{r}, u' \to u) \, \mathrm{d}u'. \tag{3.4}$$

Bei thermischen Energien muß im Stoßintegral, das die Einstreuung von Neutronen aus anderen Energien beschreibt, über Energien oberhalb und unterhalb E bzw. u integriert werden.

Bei isotroper elastischer Streuung im Schwerpunktsystem vereinfacht sich (3.3) analog (III. 2.7) auf

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, E, t) = \left[\nabla D(\mathbf{r}, E) \nabla - \Sigma_{\mathrm{T}}(\mathbf{r}, E)\right] \Phi(\mathbf{r}, E, t) + Q(\mathbf{r}, E, t) + \\ + \sum_m \frac{1}{1 - \alpha^m} \int_E^{E/\alpha^m} \frac{\mathrm{d}E'}{E'} \Sigma_{\mathrm{n}}^m(\mathbf{r}, E') \, \Phi(\mathbf{r}, E', t). \tag{3.5}$$

In der Lethargieskala gilt (vgl. (III. 2.9a)):

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, u, t) = \left[\nabla D(\mathbf{r}, u) \nabla - \Sigma_{\mathrm{T}}(\mathbf{r}, u)\right] \Phi(\mathbf{r}, u, t) + Q(\mathbf{r}, u, t) + \\ + \sum_m \frac{1}{1 - \alpha^m} \int_{u + \ln \alpha^m}^{u} \mathrm{d}u' \, \Sigma_{\mathrm{n}}^m(\mathbf{r}, u') \, \Phi(\mathbf{r}, u', t) \cdot \mathrm{e}^{u' - u}. \tag{3.6}$$

Die Quellen für die stationären Gleichungen (verzögerte Neutronen werden wie prompte Neutronen behandelt) erhält man durch Aufintegrieren aller Spaltungen und Berücksichtigung der Energieverteilung der Spaltneutronen (s. (I. 3.26)):

$$Q(\mathbf{r}, E, t) = \chi(E) \int_{E'=0}^{\infty} \nu(E') \, \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, E') \, \Phi(\mathbf{r}, E', t) \, \mathrm{d}E', \tag{3.7a}$$

$$Q(\mathbf{r}, u, t) = \chi(u) \int_{u'=0}^{\infty} \nu(u') \, \Sigma_{\mathrm{f}}(u') \, \Phi(\mathbf{r}, u', t) \, \mathrm{d}u'. \tag{3.7b}$$

Damit lautet die stationäre Diffusionsgleichung

$$\left[\nabla D(\boldsymbol{r}, E) \nabla - \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, E)\right] \Phi(\boldsymbol{r}, E) + \\ + \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int_E^{E/\alpha^m} \frac{\mathrm{d}E'}{E'} \Sigma_{\mathrm{n}}^m(\boldsymbol{r}, E') \Phi(\boldsymbol{r}, E') + \\ + \chi(E) \int_{E'=0}^{\infty} \nu(E') \Sigma_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r}, E') \Phi(\boldsymbol{r}, E') \mathrm{d}E' = 0, \tag{3.8a}$$

$$\left[\nabla D(\boldsymbol{r}, u) \nabla - \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, u)\right] \Phi(\boldsymbol{r}, u) + \\ + \sum_m \frac{1}{1-\alpha^m} \int_{u+\ln\alpha^m}^{u} \mathrm{d}u' \, \Sigma_{\mathrm{n}}^m(\boldsymbol{r}, u') \, \Phi(\boldsymbol{r}, u') \, \mathrm{e}^{u'-u} + \\ + \chi(u) \int_{u'=0}^{\infty} \nu(u') \, \Sigma_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r}, u') \, \Phi(\boldsymbol{r}, u') \, \mathrm{d}u' = 0. \tag{3.8b}$$

Die beiden energieabhängigen Diffusionsgleichungen (3.8a, b) sind streng gültig, sofern die Diffusionstheorie anwendbar ist und unelastische Streuungen nicht berücksichtigt werden müssen. Unelastische Streuungen sind in der Regel nur für Energien oberhalb 0,05 MeV von Bedeutung. Bei einem thermischen Reaktor ist dieser Bereich für den Gesamtablauf relativ unbedeutend. Daher kann hierfür i. a. mit (3.8a, b) gerechnet werden. Bei schnellen Reaktoren dagegen sind die unelastischen Streuungen zu berücksichtigen.

3.2. Auswertung des Stoßintegrals nach der Alterstheorie, die Altersgleichung

Wir setzen voraus, daß sich die Neutronenflußdichte und die Neutronenquerschnitte in einem Stoßintervall von u bis $u + \ln \alpha^m$ wenig mit der Energie ändern, so daß analog zu Gl. (III. 2.28) die Taylor-Entwicklung an der Stelle u

$$\Sigma_{\mathrm{n}}^m(\boldsymbol{r}, u') \, \Phi(\boldsymbol{r}, u') = \Sigma_{\mathrm{n}}^m(\boldsymbol{r}, u) \, \Phi(\boldsymbol{r}, u) + \\ + (u'-u) \frac{\partial}{\partial u} \left[\Sigma_{\mathrm{n}}^m(\boldsymbol{r}, u) \, \Phi(\boldsymbol{r}, u)\right] + \dots \tag{3.9}$$

schon nach dem 2. Glied abgebrochen werden kann. Mit dieser Voraussetzung läßt sich das Stoßintegral St. I. der Diffusionsgleichung (3.6) auswerten:

$$\text{St. I.} = \frac{1}{1-\alpha^m} \Sigma_n^m(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u) \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} e^{u'-u}\, du' +$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha^m} \frac{\partial}{\partial u} \left[\Sigma_n^m(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u)\right] \int\limits_{u+\ln\alpha^m}^{u} (u'-u)\, e^{u'-u}\, du' =$$

$$= \Sigma_n^m(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u} \left[\Sigma_n^m(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u)\right] \left(1 + \frac{\alpha^m}{1-\alpha^m} \ln \alpha^m\right). \qquad (3.10)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (3.8b) ein und erhalten unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (III. 1.44) für ξ^m und (III. 2.31) für $\bar{\xi}$ eine erste Form der Altersgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\bar{\xi}(\boldsymbol{r}, u)\, \Sigma_n(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u)\right] =$$
$$= \left[\nabla D(\boldsymbol{r}, u) \nabla - \Sigma_A(\boldsymbol{r}, u)\right] \Phi(\boldsymbol{r}, u) + Q(\boldsymbol{r}, u). \qquad (3.11)$$

(3.11) entspricht der Näherungsform (III. 2.29) für die Bremsgleichung.

Eine gebräuchliche zweite Form der Altersgleichung benutzt den Begriff der Bremsdichte. Dessen Definition ist unter (III. 2.69) für ein Bremsmedium mit vernachlässigbarer Absorption gegeben:

$$q(u) = \bar{\xi}(u)\, \Sigma_T(u)\, \Phi(u) \approx \bar{\xi}(u)\, \Sigma_n(u)\, \Phi(u). \qquad (3.12)$$

Damit schreibt sich Gl. (3.11)

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r}, u)}{\partial u} = \left[\nabla D(\boldsymbol{r}, u) \nabla - \Sigma_A(\boldsymbol{r}, u)\right] \frac{q(\boldsymbol{r}, u)}{\bar{\xi}(\boldsymbol{r}, u)\, \Sigma_n(\boldsymbol{r}, u)} + Q(\boldsymbol{r}, u). \qquad (3.13)$$

Wir postulieren ortsunabhängige Materialkonstanten und führen eine neue Variable

$$d\tau = \frac{D(u)}{\bar{\xi}(u)\, \Sigma_n(u)}\, du \qquad (3.14)$$

ein. Man sieht aus der Definitionsgleichung von τ, daß diese Größe nur für homogene Medien gebraucht werden kann, weil τ sonst

ortsabhängig würde. Mit (3.14) ergibt sich die übliche Form der Altersgleichung

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r}, \tau)}{\partial \tau} = \Delta q(\boldsymbol{r}, \tau) - \frac{\Sigma_A(\tau)}{D(\tau)} q(\boldsymbol{r}, \tau) + Q(\boldsymbol{r}, \tau) \cdot \frac{\bar{\xi}(\tau)\,\Sigma_n(\tau)}{D(\tau)}. \tag{3.15}$$

Im quellenfreien Raum gilt

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{r}, \tau)}{\partial \tau} = \Delta q(\boldsymbol{r}, \tau) - \frac{\Sigma_A(\tau)}{D(\tau)} \cdot q(\boldsymbol{r}, \tau). \tag{3.16}$$

Die Größe

$$\tau = \int_0^u \frac{D(u')\,\mathrm{d}u'}{\bar{\xi}(u')\,\Sigma_n(u')} = \int_E^{E_0} \frac{D(E')}{\bar{\xi}(E')\,\Sigma_n(E')} \cdot \frac{\mathrm{d}E'}{E'} \tag{3.17}$$

ist ein Maß für die Lethargie und damit für die Energie, allerdings verbunden mit Materialkonstanten; die Dimension ist cm^2. τ ist dem mittleren Quadrat des Abstands eines Bremsneutrons von der Quelle proportional (vgl. Tab. 3.3). Es hat für die Neutronenbremsung dieselbe Bedeutung, die das Diffusionslängenquadrat für die Diffusion der thermischen Neutronen hat. Daher heißt τ das Bremslängenquadrat, $\sqrt{\tau}$ Bremslänge. Man bezeichnet τ auch als Neutronen- oder Fermi-Alter. Die Namensgebung ist durch die formale Analogie der Gl. (3.15) zu einer zeitabhängigen Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung angeregt worden.

Tab. 3.1: Bremszeit und thermische Diffusionszeit für einige Moderatoren.

	H_2O	D_2O	Be	C
Bremszeit, s	10^{-5}	$4{,}6 \cdot 10^{-5}$	$6{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
Mittlere Stoßzahl während der Bremsung	20	27	86	114
Diffusionszeit, s	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,15	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$
Mittlere Stoßzahl der thermischen Neutronen	117	16042	806	1056

Zahlenwerte für τ sind in Tab. 3.2 enthalten. Bei den Berechnungen für leichten Wasserstoff differiert die Alterstheorie auffallend von den in der Tabelle angegebenen richtigen Daten. Das liegt an der Näherung (3.9) der Alterstheorie und an der unzureichenden Behandlung der in allen Energiebereichen im Laborsystem stark anisotropen Wasserstoffstreuung. Hierfür ist die Überlegung, die zum Fickschen Gesetz (vgl. Abschn. 1.1) führte, nicht mehr gültig. Auch die Erweiterung, die wir für den monoenergetischen Fall vorgenommen haben (Gl. (1.20)), ist bei der energieabhängigen Diffusion nicht ausreichend.

Tab. 3.2: Das Bremslängenquadrat $L_s^2(E) \equiv \tau(E)$ in cm² für 2 MeV-Neutronen in leichtem Wasser, schwerem Wasser und Graphit ($\varrho = 1{,}60$ g/cm³) [3].

E	τ^{H_2O}	τ^{D_2O}	τ^{C}
2 MeV	0	0	0
1 MeV	11,53	13,5	63,3
500 keV	14,92	17,95	96,5
100 keV	18,88	29,71	137,6
10 keV	20,79	45,81	176,3
1 keV	21,83	61,82	210,1
125 eV	22,72	75,71	242,6
15,3 eV	23,60	90,35	264,9
1,44 eV	24,63	111,82	315,1
0,025 eV	27,5	125	364

Die Lösung von (3.16) für $\Sigma_A = 0$, normiert auf eine Einheitsquelle an der Stelle 0 mit dem Alter 0, gibt für $\tau = \tau_{th}$ die Zahl der Neutronen an, die ausgehend von dieser Einheitsquelle an der Stelle $\boldsymbol{r}$ thermisch werden (entsprechend für beliebige andere τ). Diese Lösung heißt Bremskern der Alterstheorie. Man bezeichnet ihn mit $K_\tau(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{r}$ der Feldpunkt und $\boldsymbol{r}'$ der Quellpunkt ist (in unserem Fall: $\boldsymbol{r}' = 0$). Die Bremskerne für verschiedene Einheitsquellen (Punkt, Linie, Ebene) sind in Tab. 3.3 zusammengestellt (vgl. Aufg. 3.2).

Tab. 3.3: Bremskern und mittleres Abstandsquadrat nach der Alterstheorie.

Quellgeometrie	$K_\tau(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = \frac{1}{Q_0} \cdot q(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}, \tau)$	Mittleres Abstandsquadrat
Punktquelle	$\frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\lvert \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \rvert^2}{4\tau}}$	$\overline{\lvert \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \rvert^2} = 6\,\tau$
Linienquelle	$\frac{1}{4\pi\tau} \cdot e^{-\frac{\lvert \varrho - \varrho' \rvert}{4\tau}}$	$\overline{\lvert \varrho - \varrho' \rvert^2} = 4\,\tau$
Ebene Flächenquelle	$\frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{\lvert x - x' \rvert^2}{4\tau}}$	$\overline{\lvert x - x' \rvert^2} = 2\,\tau$

3.3. Lösung der Altersgleichung für multiplizierende Medien

Wir diskutieren die Lösung der Gl. (3.16) unter der Voraussetzung, daß in dem zu untersuchenden τ-Bereich Absorptionen vorkommen. Die Quellen mögen alle an der Stelle $\tau = 0$ liegen; d. h. die Energie der Spaltneutronen sei einheitlich zu 2 MeV angenommen. Eine Untersuchung dieser Gleichung soll uns die Verbleibwahrscheinlichkeit W_S und damit die Quelle thermischer Neutronen in der monoenergetischen Diffusionsgleichung (2.10) liefern. Denn der Ausdruck $q(\boldsymbol{r}, \tau_{th})$ bedeutet nach Definition gerade die Zahl der Neutronen, die an der Stelle $\boldsymbol{r}$ die Stelle τ_{th}, d. h. die Grenze zu den thermischen Neutronen, passieren. (2.10) lautet mit diesem Quellterm

$$D\,\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) - \Sigma_A\,\Phi(\boldsymbol{r}) + q(\boldsymbol{r}, \tau_{th}) = 0. \qquad (3.18)$$

$q(\boldsymbol{r}, \tau_{th})$ ist die Lösung von (3.16).

Wir wollen (3.16) zunächst auf den absorptionsfreien Fall zurückführen. Dazu setzen wir

$$q(\boldsymbol{r}, \tau) = p(\tau) \cdot \overline{q}(\boldsymbol{r}, \tau), \qquad (3.19)$$

wobei $\bar{q}$ Gl. (3.16) im absorptionsfreien Medium erfüllt. Setzt man (3.19) in (3.16) ein, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\Sigma_{\mathrm{A}}(\tau)}{D(\tau)}\, p(\tau). \tag{3.20}$$

Daraus mit (3.14):

$$p(\tau) = \mathrm{e}^{-\int\limits_0^{\tau} \frac{\Sigma_{\mathrm{A}}(\tau)}{D(\tau)}\,\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\int\limits_0^{u} \frac{\Sigma_{\mathrm{A}}(u)}{\xi\,\Sigma_{\mathrm{n}}(u)}\,\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-\int\limits_E^{E_0} \frac{\Sigma_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})}{\xi\,\Sigma_{\mathrm{n}}(E)}\cdot\frac{\mathrm{dE}}{E}}. \tag{3.21}$$

Diese Formel entspricht (III. 2.35).

Für $\bar{q}(\boldsymbol{r}, \tau)$ gilt

$$\frac{\partial \bar{q}(\boldsymbol{r}, \tau)}{\partial \tau} = \Delta \bar{q}(\boldsymbol{r}, \tau) \tag{3.22}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\bar{q}(\boldsymbol{r}, 0) = f\,\eta\,\varepsilon\,\Sigma_{\mathrm{A}}\,\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{k_\infty}{p(\tau_{\mathrm{th}})}\,\Sigma_{\mathrm{A}}\,\Phi(\boldsymbol{r}). \tag{3.23}$$

Diese Anfangsbedingung legt einen Produktansatz zur Beschreibung der τ-Abhängigkeit nahe:

$$\bar{q}(\boldsymbol{r}, \tau) = \bar{q}(\boldsymbol{r}, 0)\cdot T(\tau) \quad \text{mit} \quad T(0) = 1. \tag{3.24}$$

Einsetzen von (3.24) in (3.22) und Division durch $\bar{q}(\boldsymbol{r}, 0)\cdot T(\tau)$ ergibt

$$\frac{1}{T(\tau)}\cdot\frac{\mathrm{d}T(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\Delta\bar{q}(\boldsymbol{r}, 0)}{\bar{q}(\boldsymbol{r}, 0)}. \tag{3.25}$$

Da jede der beiden Seiten von verschiedenen Variablen abhängt, muß jede konstant ($= -B^2$) sein. Daraus folgt mit (3.23)

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + B^2\cdot\Phi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{3.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}T(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + B^2\cdot T(\tau) = 0. \tag{3.27}$$

Gl. (3.26) ist identisch mit (2.31). Die Lösungen sind für geläufige Geometrien in Tab. 2.3 angegeben. Die Lösung von (3.27) ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (3.24)

$$T(\tau) = \mathrm{e}^{-B^2\tau}. \tag{3.27a}$$

Damit wird die Bremsdichte im homogenen nackten Reaktor:

$$q(\boldsymbol{r}, \tau) = p\,\bar{q}(\boldsymbol{r}, \tau) = k_\infty \frac{p(\tau)}{p(\tau_{\text{th}})} \mathrm{e}^{-B^2\tau}\, \Sigma_{\text{A}}\, \Phi(\boldsymbol{r}). \tag{3.28}$$

Sie ist der Verteilung $\Phi(\boldsymbol{r})$ der die Spaltung auslösenden thermischen Neutronen proportional.

Setzt man (3.28) mit $\tau = \tau_{\text{th}}$ in (3.18) ein, so entsteht eine homogene Differentialgleichung von der Form (2.10):

$$D\,\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) + (k_\infty\, \mathrm{e}^{-B^2\tau_{\text{th}}} - 1)\, \Sigma_{\text{A}}\, \Phi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{3.29}$$

Durch Vergleich mit (2.10) folgt, daß die dort unbestimmt gebliebene Verbleibwahrscheinlichkeit der schnellen Neutronen nach der Alterstheorie als

$$W_{\text{S}} = \mathrm{e}^{-B^2\tau_{\text{th}}} \tag{3.30}$$

zu schreiben ist. Die kritische Gleichung (2.36, 36a) des Einzonenreaktors lautet mit der Ergänzung (3.30)

$$k = \frac{k_\infty\, \mathrm{e}^{-B^2\tau_{\text{th}}}}{1 + B^2 L^2} = 1. \tag{3.31}$$

k ist die in Abschn. I. 4 definierte Multiplikationskonstante.

Gl. (3.30) hat eine andere Form als die unter (2.40) aus einer Eingruppentheorie für die schnellen Neutronen abgeleitete Verbleibwahrscheinlichkeit. Bei allen großen Reaktoren sind jedoch die Ausdrücke $B^2\tau$ und B^2L^2 klein gegen 1. Daher kann man die Exponentialfunktion entwickeln und nach dem zweiten Glied abbrechen.

$$\mathrm{e}^{+B^2\tau_{\text{th}}}(1 + B^2 L^2) \approx (1 + B^2\tau_{\text{th}})(1 + B^2 L^2) \approx 1 + B^2(\tau_{\text{th}} + L^2). \tag{3.32}$$

Das Bremslängenquadrat τ_{th} faßt man gelegentlich mit dem Diffusionslängenquadrat L^2 zum Wanderlängenquadrat M^2 zusammen:

$$\tau_{\text{th}} + L^2 = M^2 \tag{3.33}$$

Damit wird (3.31) bei einem großen Reaktor

$$k = \frac{k_\infty}{1 + B^2(\tau_{\text{th}} + L^2)} = 1. \tag{3.34}$$

Diese Form ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn man die kritische Größe aus den Materialdaten errechnen will.

Aufgaben

3.1. Die Annahme einer energieunabhängigen Extrapolationsstrecke d (zulässig für Spaltzonenabmessungen $\gg \lambda_{tr}$) ermöglicht beim homogenen Einzonenreaktor eine Lösung der energieabhängigen Diffusionsgleichung (3.3) durch den Separationsansatz $\Phi(\boldsymbol{r}, E) = R(\boldsymbol{r}) \cdot \Phi(E)$. Man leite die Gleichung für $\Phi(E)$ her. Wie ist relativ zum unendlichen Medium (s. Gl. (III. 2.4)) der Neutronenausfluß berücksichtigt? Wie verändert sich infolge des Ausflusses das Neutronenspektrum in einem kleinen Reaktor gegenüber dem Spektrum im unendlich ausgedehnten Medium?

3.2. Man verifiziere, daß die Altersgleichung für eine Quelle an der Stelle $\boldsymbol{r}' = 0$ im unendlich ausgedehnten absorptionsfreien Medium die in Tab. 3.3 angegebenen Lösungen besitzt und berechne daraus die mittleren Abstandsquadrate der Bremsneutronen. Man zeichne die Bremsdichte für verschiedene τ-Werte auf.

3.3. Man zeige, daß durch Überlagerung des Bremskerns für die Punktquelle aus Tab. 3.3 die Verteilung der Bremsneutronen um einen unendlich langen Quellfaden gewonnen werden kann.

3.4. Man leite die Altersgleichung durch Differentiation der Bremsdichte (III. 2.67) und Einführung des dabei auftretenden Stoßintegrals in die Diffusionsgleichung (3.6) her.

3.5. Um die kritische Größe einer Spaltzone bzw. deren Multiplikationskonstante zu ermitteln, bestrahlt man einen zylinderförmigen Gitterausschnitt mit Radius R und Höhe $H \gg L$ (unterkritische Anordnung) in einem Exponentialexperiment und mißt den Flußdichteabfall längs der z-Richtung analog zu Aufg. 2.4. Man berechne den Flußdichteabfall in dieser Richtung unter Berücksichtigung des radialen Ausflusses. Wie ergibt sich daraus die kritische Größe des Einzonenreaktors und die Multiplikationskonstante k_∞ ?

3.6. Im Rahmen der Alterstheorie wurde gezeigt, daß im Einzonenreaktor die Quelldichte für die thermischen Neutronen proportional zur Verteilung der Spaltneutronen ist (s. Gl. (3.28)). Man beweise, daß diese Gesetzmäßigkeit für einen beliebigen Bremskern $K(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ gilt, der lediglich vom Abstand $|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|$ zwischen Quellpunkt $\boldsymbol{r}'$ und Aufpunkt $\boldsymbol{r}$ abhängt: $K(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) = K(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|)$ (Eigenschaft der Bremskerne des unendlichen Mediums).
Anleitung: Man beschreibe die Quelldichte der thermischen Neutronen mit Hilfe des Bremskerns:

$$Q_{th} = \int_{\boldsymbol{r}'} k_\infty \, \Sigma_A \, \Phi(\boldsymbol{r}') \, K(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|) \, d\boldsymbol{r}'.$$

Durch Einführung der Fourierdarstellung für die Flußdichte zeige man, daß

$$Q_{th} = k_\infty \, \Sigma_A \, \overline{K} \, \Phi(\boldsymbol{r}).$$

Dabei ist $\overline{K}$ die Fouriertransformierte des Bremskerns.

3.7. Man zeige durch Ausrechnen, daß die Fouriertransformierte des für die Alterstheorie gültigen Bremskerns (s. Tab. 3.3) gleich $\exp(-B^2\tau)$ ist, vgl. Aufg. 3.6.

4. Gruppendiffusionstheorie

4.1. Aufstellung der Gruppendiffusionsgleichungen

Die energieabhängige Diffusionsgleichung (3.3) ist eine Integrodifferentialgleichung, abhängig von Energie-, Orts- und Zeitkoordinaten. In Kap. III wurde gezeigt, daß schon die nur von Energie-

koordinaten abhängige Integralgleichung für das homogene Medium im allgemeinen nicht mehr analytisch lösbar ist. Dies gilt um so mehr für die Gl. (3.3.). Man wird also numerische Verfahren diskutieren müssen. In der Praxis wird meistens das Energiegruppenverfahren benützt, das wir im Abschn. III. 2 für das unendlich ausgedehnte Medium beschrieben haben und das wir hier auf das endliche Medium übertragen werden. Die Diffusionsgleichung lautet für eine Reaktorzone, in der die Materialgrößen konstant sind, nach (3.3)

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} = \left[D(E)\,\Delta - \Sigma_\mathrm{T}(E)\right] \Phi(\mathbf{r}, E, t) + Q(\mathbf{r}, E, t) + \\ + \int \mathrm{d}E'\, \Phi(\mathbf{r}, E', t)\, \Sigma_\mathrm{S}(E' \to E). \qquad (4.1)$$

Wir vergleichen (4.1) mit der stationären Bremsgleichung (III. 2.4)

$$\Sigma_\mathrm{T}(E)\,\Phi(E) = Q(E) + \int \mathrm{d}E'\,\Phi(E')\,\Sigma_\mathrm{S}(E' \to E).$$

Man sieht, daß die Terme $\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ und $D\,\Delta\Phi$ zusätzlich auftreten.

Wir integrieren die Diffusionsgleichung analog zum Vorgehen in Abschn. III. 2 über ein Intervall ΔE_g bzw. Δu_g. Das führt auf

$$\left(\frac{1}{v}\right)_g \frac{\partial}{\partial t}\Phi_g(\mathbf{r}, t) = D_g\,\Delta\Phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{\mathrm{T}\,g}\,\Phi_g(\mathbf{r}, t) + Q_g(\mathbf{r}, t) + \\ + \sum_{g'} \Sigma_{\mathrm{S}\,g' \to g}\,\Phi_{g'}(\mathbf{r}, t). \qquad (4.2)$$

Hierzu sind Gruppenkonstanten analog zu (III. 2.49) und die Gruppenflüsse bzw. -quellen

$$\Phi_g(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta E_g} \Phi(\mathbf{r}, E, t)\,\mathrm{d}E \quad \text{und} \quad Q_g(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta E_g} Q(\mathbf{r}, E, t)\,\mathrm{d}E \qquad (4.3)$$

verwendet. Im Unterschied zu (III. 2.49) sind hier die Gruppenkonstanten mit ortsabhängigen Flußdichten zu berechnen. Zur Auswertung muß man jedoch annehmen, daß $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ in jedem Energieintervall für sich in das Produkt $\Phi(E) \cdot \Phi(\mathbf{r}, t)$ aufgespalten werden kann. Damit entstehen formal dieselben Ausdrücke wie in (III. 2.49), ergänzt durch

$$\left(\frac{1}{v}\right)_g = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \frac{1}{v(E)}\,\Phi(\mathbf{r},E,t)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} \Phi(\mathbf{r},E,t)\,\mathrm{d}E} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \frac{1}{v(E)}\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} \Phi(E)\,\mathrm{d}E},$$

$$D_g = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} D(E)\,\Delta\Phi(\mathbf{r},t)\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} \Delta\Phi(\mathbf{r},t)\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} D(E)\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} \Phi(E)\,\mathrm{d}E}. \tag{4.4}$$

Für $\Phi(E)$ kann in erster Näherung das Spektrum eines unendlichen Mediums genommen werden (s. Abschn. III. 2.3.2). Bei kleinen Reaktoren kann sich das Neutronenspektrum durch das Ausströmen der Neutronen verändern. Eine Berechnung dieser Veränderung wurde in der Aufg. 3.1 angegeben. Im übrigen verfährt man wie in Abschn. III. 2.3.2.

Spaltet man den totalen Querschnitt in Absorption und Streuung gemäß

$$\Sigma_{\mathrm{T}\,g} = \Sigma_{\mathrm{A}\,g} + \sum_{g'} \Sigma_{\mathrm{S}\,g\to g'} = \Sigma_{\mathrm{A}\,g} + \Sigma_{\mathrm{S}\,g\to g} + \sum_{g'\neq g} \Sigma_{\mathrm{S}\,g\to g'} \tag{4.5}$$

auf, so folgt die geläufigere Form der Gruppendiffusionsgleichungen

$$\left(\frac{1}{v}\right)_g \frac{\partial}{\partial t}\Phi_g(\mathbf{r},t) = D_g\,\Delta\Phi_g(\mathbf{r},t) - \Sigma_{\mathrm{A}\,g}\,\Phi_g(\mathbf{r},t) - \\ - \sum_{g'\neq g} \Sigma_{\mathrm{S}\,g\to g'}\,\Phi_g(\mathbf{r},t) + Q_g(\mathbf{r},t) + \sum_{g'\neq g} \Sigma_{\mathrm{S}\,g'\to g}\,\Phi_{g'}(\mathbf{r},t). \tag{4.6}$$

Wir beschränken uns jetzt auf die Beschreibung stationärer Verhältnisse und nehmen für $Q(\mathbf{r},E,t)$ die Spaltquelle (3.7) an. Dann wird die Quelle für die Gruppe g

$$Q_g(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Delta E_g} \mathrm{d}E\,\chi(E) \int\limits_{E'} \mathrm{d}E'\,\nu(E')\,\Sigma_{\mathrm{f}}(E')\,\Phi(\mathbf{r},E'). \tag{4.7}$$

Wenn wir die gemittelten Werte*

$$\chi_g = \int\limits_{\Delta E_g} \chi(E)\,\mathrm{d}E \tag{4.8}$$

---

* Wegen der Normierung $\int\limits_0^\infty \chi(E)\,\mathrm{d}E = 1$ gilt $\sum\limits_g \chi_g = 1$.

und

$$\nu_{g'}\,\Sigma_{\mathrm{f}g'} = \frac{\int\limits_{\Delta E_{g'}} \mathrm{d}E'\,\nu(E')\,\Sigma_{\mathrm{f}}(E')\,\Phi(E')}{\int\limits_{\Delta E_{g'}} \Phi(E')\,\mathrm{d}E'} \tag{4.9}$$

einführen, läßt sich (4.7) darstellen als

$$Q_g(\boldsymbol{r}) = \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'}\,\Sigma_{\mathrm{f}g'}\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r})\,. \tag{4.10}$$

Die zeitunabhängigen Gruppengleichungen zur Beschreibung des stationären Reaktors sind dann:

$$\begin{aligned} &D_g\,\Delta\Phi_g(\boldsymbol{r}) - \Sigma_{\mathrm{A}\,g}\,\Phi_g(\boldsymbol{r}) - \sum_{g' \neq g} \Sigma_{\mathrm{S}\,g\to g'}\,\Phi_g(\boldsymbol{r}) + \\ &+ \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'}\,\Sigma_{\mathrm{f}g'}\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r}) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{\mathrm{S}\,g'\to g}\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad g, g' = 1,2,\ldots,G. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Sie stellen ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen für G Energiegruppen dar.

4.2. Spezialisierung auf eine und zwei Energiegruppen

Spezialisiert man (4.11) auf eine Eingruppentheorie mit $g, g' = 1$, $\chi_1 = 1$, so ergibt sich als Diffusionsgleichung

$$D_1\,\Delta\Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Sigma_{\mathrm{A}1}\,\Phi_1(\boldsymbol{r}) + \nu_1\,\Sigma_{\mathrm{f}1}\,\Phi_1(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(Spaltzone)}, \tag{4.12}$$

$$D_1^{\mathrm{R}}\,\Delta\Phi_1^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) - \Sigma_{\mathrm{A}1}^{\mathrm{R}}\,\Phi_1^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(Reflektor)}. \tag{4.13}$$

Die Lösungen von (4.12–13) sind über die Grenzbedingungen (2.24–25) aneinander anzuschließen.

In (4.12) enthält das Quellglied im Gegensatz zu (2.10) keine Korrekturen, die der Neutronenentstehung in einem anderen Energiebereich Rechnung tragen. Die Gleichung hat daher für die Berechnung thermischer Reaktoren keine praktische Bedeutung. Dagegen wäre sie als Eingruppengleichung für den schnellen Reaktor anzusprechen. Sie ist formal identisch mit (2.10a) bis auf den Korrekturfaktor ε. Die entsprechenden Spaltungen im Brutstoff sind hier in $\Sigma_{\mathrm{f}1}\,\Phi_1$ berücksichtigt.

Bei einer Zweigruppentheorie mit $g, g' = 1, 2$ gilt für ein multiplizierendes Medium

$$D_1 \Delta\Phi_1 - \Sigma_{A1} \Phi_1 - \Sigma_{S\,1\to 2} \Phi_1 + \qquad (4.14a)$$
$$+ \Sigma_{S\,2\to 1} \Phi_2 + \chi_1(\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) = 0,$$

$$D_2 \Delta\Phi_2 - \Sigma_{A2} \Phi_2 - \Sigma_{S\,2\to 1} \Phi_2 + \qquad (4.14b)$$
$$+ \Sigma_{S\,1\to 2} \Phi_1 + \chi_2(\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2) = 0.$$

Gewöhnlich versteht man bei thermischen Reaktoren unter der zweiten Gruppe die thermischen Neutronen („thermische Gruppe"), unter der ersten Gruppe alle anderen („schnelle Gruppe"). Bei dieser groben Einteilung braucht man nur Streuungen von der schnellen Neutronengruppe in die thermische Neutronengruppe zu berücksichtigen (keine Aufwärtsstreuung), also $\Sigma_{S\,2\to 1} = 0$. Alle Spaltneutronen gehören in die schnelle Gruppe, also ist $\chi_1 = 1$ und $\chi_2 = 0$. Hiermit vereinfacht sich das System (4.14) zu:

$$D_1 \Delta\Phi_1 - \Sigma_{A1} \Phi_1 - \Sigma_{S\,1\to 2} \Phi_1 + \nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2 = 0,$$
$$D_2 \Delta\Phi_2 - \Sigma_{A2} \Phi_2 + \Sigma_{S\,1\to 2} \Phi_1 = 0. \qquad (4.15)$$

Unter denselben Voraussetzungen gilt für den Reflektor (die Anschlußbedingungen (2.24–25) sind für jede Energiegruppe zu formulieren):

$$\begin{aligned} D_1^R \Delta\Phi_1^R - \Sigma_{A1}^R \Phi_1^R - \Sigma_{S\,1\to 2}^R \Phi_1^R &= 0, \\ D_2^R \Delta\Phi_2^R - \Sigma_{A2}^R \Phi_2^R + \Sigma_{S\,1\to 2}^R \Phi_1^R &= 0. \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Die Gl. (4.15–16) beherrschen ein weites Feld der praktischen Reaktorberechnung. Die Gruppenkonstanten gebräuchlicher Moderatoren sind in Tab. 4.1 und 2.1 zusammengestellt. Ferner gilt für Moderatoren $\Sigma_{A1} = 0$.

Tab. 4.1: Konstanten für die schnelle Gruppe einer Zweigruppentheorie [5].

Moderator	H_2O	D_2O	Be	C
ϱ, g/cm³	1	1,1	1,85	1,60
D_1, cm	1,13	1,29	0,562	1,016
$\Sigma_{S\,1\to 2}$, cm⁻¹	0,0419	0,00985	0,00551	0,00276

In Analogie zur Diffusionslänge $L_2 = \sqrt{D_2/\Sigma_{A2}}$ der thermischen Neutronen (s. (2.14)) definiert man für die schnellen Neutronen eine Bremslänge:

$$L_1 = \sqrt{\frac{D_1}{\Sigma_{S\,1\to 2}}}. \tag{4.17}$$

L_1^2 ist gleich dem Fermi-Alter τ_{th}, wenn der Diffusionstheorie die Voraussetzungen der Alterstheorie auferlegt und Absorptionen vernachlässigt werden. Um das zu zeigen, setzen wir D_1 nach (4.4) und $\Sigma_{S\,1\to 2}$ nach (III. 2.49) in (4.17) ein.

$$L_1^2 = \frac{D_1}{\Sigma_{S\,1\to 2}} \tag{4.17a}$$
$$= \frac{\int\limits_{E=E_{th}}^{E_0} D(E)\,\Phi(E)\,dE \bigg/ \int\limits_{E=E_{th}}^{E_0} \Phi(E)\,dE}{\int\limits_{E=E_{th}}^{E_{th}/\alpha} \int\limits_{E'=\alpha E}^{E_{th}} \Phi(E)\,\Sigma_n(E\to E')\,dE'\,dE \bigg/ \int\limits_{E=E_{th}}^{E_0} \Phi(E)\,dE}.$$

Man beachte die Grenzen der Energieintervalle ΔE_g, die für das Streuintegral $\Sigma_{S\,1\to 2}$ gemäß (III. 2.49) nach (III. 1.27) einzusetzen sind. Sind mehrere streuende Kerne vorhanden ($\alpha \to \alpha^m$), so ist das Doppelintegral über alle m zu summieren. Dieses hat nach (III. 2.59–60) die Bedeutung der Bremsdichte $q(E_{th})$. Also wird

$$L_1^2 = \frac{\int\limits_{E=E_{th}}^{\infty} D(E)\,\Phi(E)\,dE}{q(E_{th})}. \tag{4.17b}$$

Für das Bremsspektrum im nicht-absorbierenden Medium gilt in großem energetischem Abstand von der Neutronenquelle nach (III. 2.33 a) und (III. 2.64)

$$\Phi(E) = \frac{Q_0}{\bar{\xi}(E)\,\Sigma_n(E)\,E}, \qquad Q_0 = q(E_{th}).$$

Damit wird (4.17b)

$$L_1^2 = \int\limits_{E=E_{th}}^{E_0} \frac{D(E)\,dE}{\bar{\xi}(E)\cdot\Sigma_n(E)\cdot E} = \tau, \tag{4.17c}$$

vgl. (3.17).

Analog zum Vorgehen bei der Alterstheorie (Abschn. 3.3) kann man auch nach dem Mehrgruppenmodell Bremskerne ableiten. Für das absorptions- und quellfreie Medium gilt für die schnelle Gruppe

$$D_1 \Delta\Phi_1 - \Sigma_{S\,1\to 2}\,\Phi_1 = 0. \tag{4.18}$$

Die Lösung dieser Gleichung für eine Einheitsflächenquelle bei x' lautet nach Tab. 2.2:

$$\Phi_1(x, x') = \frac{L_1}{2\,D_1}\,e^{-\frac{|x-x'|}{L_1}}. \tag{4.19}$$

Die Quelldichte für die thermischen Neutronen, d. h. die Bremsdichte oder der Bremskern, lautet damit:

$$K_1(x, x') = \Sigma_{S\,1\to 2}\,\Phi_1(x, x') = \frac{1}{2\,L_1}\,e^{-\frac{|x-x'|}{L_1}}. \tag{4.20}$$

Bremskerne für andere Quellgeometrien und Bremsmodelle sind zusammen mit den Verbleibwahrscheinlichkeiten in Tab. 4.2 zusammengestellt.

4.3. Lösung der Gruppendiffusionsgleichungen

Die Gruppendiffusionsgleichungen (4.11) haben wir für Medien mit gebietsweise konstanten Materialdaten abgeleitet. Hier wollen wir sie auf ein konkretes Beispiel anwenden und lösen. Als solches wählen wir die von einem homogenen Reflektor umgebene homogene Spaltzone. Die Attribute „homogen" sind so verstanden, daß die Linearausdehnung evtl. vorhandener Strukturen relativ zur mittleren freien Weglänge vernachlässigt werden können (Homogenisierung der Reaktorstruktur, heterogene Effekte behandeln wir im Abschn. 8). Wir lösen die Gruppengleichungen zunächst für die Spaltzone, dann für den Reflektor und schließen beide gemäß den Grenzbedingungen (2.24–25) aneinander an.

4.3.1. Zweigruppengleichungen für die Spaltzone und ihre Lösung

Die für die Spaltzone geltenden Gleichungen sind unter (4.15) angegeben. Um in den folgenden Rechnungen einfache Ausdrücke zu erhalten, schreiben wir sie in der symmetrischen Form

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1 - 2\,a_{11}\,\Phi_1 + a_{12}\,\Phi_2 &= 0, \\ \Delta\Phi_2 - 2\,a_{22}\,\Phi_2 + a_{21}\,\Phi_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Tab. 4.2: Bremskerne und Verbleibwahrscheinlichkeiten für unendlich ausgedehnte Medien.

Bremsmodell	Bremskern $K(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$	Verbleibwahrscheinlichkeit W_s
Alterstheorie	$\frac{1}{(4\pi\tau_{th})^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2}{4\tau_{th}}}$ Punktquelle $\frac{1}{(4\pi\tau_{th})^{1/2}} \cdot e^{-\frac{\lvert x-x'\rvert^2}{4\tau_{th}}}$ ebene Quelle	$\exp(-B^2\tau_{th})$
Gruppendiffusionstheorie (1 schnelle Gruppe)	$\frac{1}{4\pi L_1^2} \cdot \frac{e^{-\frac{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}{L_1}}}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}$ Punktquelle $\frac{1}{2L_1} \cdot e^{-\frac{\lvert x-x'\rvert}{L_1}}$ ebene Quelle	$\frac{1}{1+L_1^2 B^2}$
Gruppendiffusionstheorie (n schnelle Gruppen, ohne Überstreuung)	$\int_{\boldsymbol{r}_1} \cdots \int_{\boldsymbol{r}_{n-1}} K_1(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_1) \cdot K_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \cdots K_n(\boldsymbol{r}_{n-1}, \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_{n-1}$ mit $K_i(\boldsymbol{r}_{i-1}, \boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi L_i^2} \cdot \frac{e^{-\frac{\lvert\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}\rvert}{L_i}}}{\lvert\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}\rvert}$	$\frac{1}{(1+L_1^2 B^2)(1+L_2^2 B^2)\ldots(1+L_n^2 B^2)}$

mit

$$a_{11} = \frac{1}{2\,D_1}(-\nu_1\,\Sigma_{f1} + \Sigma_{S\,1\to 2} + \Sigma_{A1}) \quad a_{12} = \frac{1}{D_1}\nu_2\,\Sigma_{f2},$$
$$a_{22} = \frac{1}{2\,D_2}\Sigma_{A\,2} \qquad a_{21} = \frac{1}{D_2}\cdot\Sigma_{S\,1\to 2}. \tag{4.22}$$

Lösungsansatz. Wir versuchen als Lösungsansatz für die Spaltzone eine Überlagerung von zwei speziellen Lösungen $\Psi_{1,2}$ der Wellengleichung:

$$\Phi_1(\boldsymbol{r}) = A_1\,\Psi_1(\boldsymbol{r}) + A_2\,\Psi_2(\boldsymbol{r}), \tag{4.23}$$

$$\Phi_2(\boldsymbol{r}) = A_1'\,\Psi_1(\boldsymbol{r}) + A_2'\,\Psi_2(\boldsymbol{r}) \tag{4.24}$$

mit

$$\Delta\Psi_i(\boldsymbol{r}) + \mu_i^2\,\Psi_i(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{4.25}$$

Die μ_i^2 sind die Flußwölbungen der beiden speziellen Lösungen $\Psi_i(\boldsymbol{r})$ der Wellengleichung. Die Flußwölbungen der Flußdichten $\Phi_{1,2}$ hängen von beiden μ_i^2 und von dem Einfluß des Reflektors ab. Die $\Phi_{1,2}$ verschwinden jetzt nicht mehr wie beim nackten Reaktor auf dem extrapolierten Rand der Spaltzone, da vom Reflektor Neutronen in die Spaltzone zurückdiffundieren.

Gehen wir mit (4.23–24) in die Zweigruppengleichungen (4.21) ein, so folgt unter Beachtung von (4.25):

$$\sum_{i=1}^{2}\left[-(\mu_i^2 + 2\,a_{11})\,A_i + a_{12}\,A_i'\right]\Psi_i(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{4.26}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left[a_{21}\,A_i - (\mu_i^2 + 2\,a_{22})\,A_i'\right]\Psi_i(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{4.27}$$

Damit (4.26–27) für alle $\boldsymbol{r}$ gilt, müssen die Faktoren der $\Psi_i(\boldsymbol{r})$ einzeln verschwinden, d. h. für jedes i muß gelten:

$$-(\mu_i^2 + 2\,a_{11})\,A_i + a_{12}\,A_i' = 0, \tag{4.28}$$

$$a_{21}\,A_i - (\mu_i^2 + 2\,a_{22})\,A_i = 0, \; i = 1,2. \tag{4.29}$$

Bestimmung der Flußwölbungen μ_i^2. Das Gleichungssystem hat nur nichttriviale Lösungen, wenn seine Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -(\mu_i^2 + 2\,a_{11}) & a_{12} \\ a_{21} & -(\mu_i^2 + 2\,a_{22}) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.30}$$

(4.30) kann mit (4.22) in der Form

$$\frac{\nu_2\,\Sigma_{f2}/\Sigma_{A2}}{\left(1+\frac{\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}-\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}+L_1^2\,\mu_i^2\right)(1+L_2^2\,\mu_i^2)}=1 \qquad (4.31)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung wird beim **nackten** Reaktor mit einheitlicher Extrapolationslänge für beide Neutronengruppen zur kritischen Gleichung, wenn man die Wurzeln μ_i^2 durch die geometrische Flußwölbung ersetzt. Wegen der anders gearteten Randbedingungen ist letzteres hier nicht möglich. (4.31) stellt daher hier eine Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Flußwölbungen μ_i^2 dar. Man entnimmt aus (4.31), daß sie ausschließlich von Materialkonstanten abhängen. Die Lösungen von (4.30) sind:

$$\begin{aligned}\mu_1^2 &\equiv \quad\mu^2 = -(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+a_{12}\,a_{21}}\,,\\ \mu_2^2 &\equiv -\nu^2 = -(a_{11}+a_{22})-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+a_{12}\,a_{21}}\,.\end{aligned} \qquad (4.32)$$

Bei dieser Schreibweise ist $\mu_1^2=\mu^2>0$ vorausgesetzt. Das ist dann der Fall, wenn $a_{12}\,a_{21}>4a_{11}\,a_{22}$. Mit (4.22) folgt daraus

$$\frac{\nu_2\,\Sigma_{f2}}{\Sigma_{A2}}+\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}-\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}-1>0,$$

oder

$$\frac{\nu_2\,\Sigma_{f2}}{\Sigma_{A2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}-\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}}>1. \qquad (4.33)$$

Der erste Faktor auf der linken Seite von (4.33) ist das Verhältnis der produzierten schnellen zu den absorbierten thermischen Neutronen $(f\cdot\eta)$. Der zweite Faktor hat die Bedeutung des Produkts $\varepsilon\cdot p$ (man beachte die Definitionen dieser Faktoren in Abschn. I.4 und die Formeln aus der Lösung der Aufg. 4.2 nach Substitution der Spaltquellen mit (4.15) für das unendlich ausgedehnte Medium):

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}+\frac{\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}+\Sigma_{A1}}\right)\cdot\left(1+\frac{\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}\right)}\\ &\approx\left(1+\frac{\nu_1\,\Sigma_{f1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}+\Sigma_{A1}}\right)\cdot\left(1-\frac{\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}}\right).\end{aligned} \qquad (4.34)$$

Also hat die linke Seite von (4.33) die Bedeutung von k_∞:

$$k_\infty = \frac{\nu_2 \Sigma_{f2}}{\Sigma_{A2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\nu_1 \Sigma_{f1} - \Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to2}}}. \tag{4.35}$$

Die Überlagerungskonstanten A_i. Die Faktoren A'_i können durch

$$A'_i = S_i \cdot A_i \tag{4.36}$$

auf A_i zurückgeführt werden.

Nach (4.29) ist

$$S_i = \frac{a_{21}}{\mu_i^2 + 2\,a_{22}} = \frac{\Sigma_{S\,1\to2}/D_2}{\mu_i^2 + \Sigma_{A2}/D_2}. \tag{4.37}$$

Die S_i sind nur von Materialkonstanten abhängig.

Die Lösungen der Zweigruppendiffusionsgleichungen in einer homogenen Spaltzone sind also zu schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\boldsymbol{r}) &= A_1\,\Psi_1(\boldsymbol{r}) + A_2\,\Psi_2(\boldsymbol{r}),\\ \Phi_2(\boldsymbol{r}) &= A_1\,S_1\,\Psi_1(\boldsymbol{r}) + A_2\,S_2\,\Psi_2(\boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Die beiden Konstanten A_i sind durch Anschluß von (4.38) an die Lösungen im Reflektor zu bestimmen.

4.3.2. Zweigruppengleichungen für den Reflektor und ihr Anschluß an die Spaltzonenlösung

Die Zweigruppengleichungen für den Reflektor sind

$$\begin{aligned} D_1^R\,\Delta\Phi_1^R - (\Sigma_{A1}^R + \Sigma_{S\,1\to2}^R)\,\Phi_1^R &= 0,\\ D_2^R\,\Delta\Phi_2^R - \Sigma_{A2}^R \cdot \Phi_2^R + \Sigma_{S\,1\to2}^R\,\Phi_1^R &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Wir wählen wieder die abkürzende Schreibweise

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1^R - 2\,a_{11}^R\,\Phi_1^R &= 0,\\ \Delta\Phi_2^R - 2\,a_{22}^R\,\Phi_2^R + a_{21}^R\,\Phi_1^R &= 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Wir gehen wie im vorigen Abschnitt vor und erhalten die Lösungen

$$\begin{aligned} \Phi_1^R &= A_1^R\,\Psi_1^R,\\ \Phi_2^R &= A_2^R\,\Psi_2^R + A_1^R\,S^R\,\Psi_1^R, \end{aligned} \tag{4.41}$$

mit

$$\Delta \Psi_i^{\mathrm{R}} - \varkappa_i^2 \, \Psi_i^{\mathrm{R}} = 0, \tag{4.42}$$

$$\varkappa_i^2 = 2\, a_{ii}^{\mathrm{R}} = \frac{\Sigma_{\mathrm{A}i}^{\mathrm{R}} + \Sigma_{\mathrm{S}\,1\to 2}^{\mathrm{R}} \, \delta_{1i}{}^{*}}{D_i^{\mathrm{R}}}, \tag{4.43}$$

$$S^{\mathrm{R}} = \frac{a_{21}^{\mathrm{R}}}{-\varkappa_1^2 + 2\, a_{22}^{\mathrm{R}}} = \frac{\Sigma_{\mathrm{S}\,1\to 2}^{\mathrm{R}} / D_2^{\mathrm{R}}}{\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2}. \tag{4.44}$$

Die Ψ_i^{R} sind aus (4.42) zu bestimmen und verschwinden auf dem äußeren Rand (unter Berücksichtigung der Extrapolationsstrecke).

Die Konstanten A_1^{R}, A_2^{R}, A_1 und A_2 werden durch Anschluß von (4.41) an (4.38) mit Hilfe der Bedingungen (2.24–25) bestimmt. Das ergibt 4 homogene Gleichungen. Sie sind lösbar, wenn die zugehörige Determinante Δ verschwindet, und liefern dann die A_i, A_i^{R} bis auf einen gemeinsamen Faktor, der wie bei der Eingruppentheorie das Leistungsniveau des Reaktors bestimmt. Die Determinante Δ enthält die Ψ_i, Ψ_i^{R} und deren Ableitungen an der Grenze von Spaltzone und Reflektor. Sie kann also nicht ohne Bezug auf die Form des Reaktors formuliert werden. Die Forderung $\Delta = 0$ läuft auf die Bestimmung eines Eigenwertes (Radius der Spaltzone bei gegebener Materialzusammensetzung oder Spaltstoffkonzentration bei gegebener Geometrie) hinaus. Sie ist also die kritische Gleichung der Zweigruppentheorie, die geometrische Daten mit Materialkonstanten verknüpft. Ein Beispiel für Kugelgeometrie wird in den anschließenden Aufgaben behandelt.

Die Zweigruppentheorie und analog die Mehrgruppentheorie liefert Ausdrücke für Bremskerne, die wir zusammen mit den aus der Alterstheorie abgeleiteten Formeln (Tab. 3.3) in Tab. 4.2 wiedergeben. Bei der Gruppenrechnung hat der Bremskern die Form des Diffusionskerns für thermische Neutronen mit dem Unterschied, daß an Stelle der Diffusionslänge L und des Diffusionskoeffizienten D der thermischen Neutronen die Bremslänge L_{s} und der Diffusionskoeffizient D_{S} der jeweiligen Gruppe schneller Neutronen treten.

---

* δ_{ik} ist das Kroneckersymbol. Es gilt

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k. \end{cases}$$

Aufgaben

4.1. Man leite die kritische Gleichung

$$k = \frac{\nu_2\, \Sigma_{f2}/\Sigma_{A2}}{\left(1 + \frac{\Sigma_{A1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}} - \frac{\nu\, \Sigma_{f1}}{\Sigma_{S\,1\to 2}} + L_1^2\, B^2\right)\ (1 + L_2^2\, B^2)} = 1 \qquad (4.45)$$

für einen nackten homogenen thermischen Reaktor nach der Zweigruppentheorie her. (Die Extrapolationsstrecken der beiden Gruppen seien gemäß

$$d = \frac{L_1^2\, d_1 + L_2^2\, d_2}{L_1^2 + L_2^2} \qquad (4.46)$$

zu einer gemeinsamen zusammengefaßt [6]. Wie groß ist das Verhältnis von thermischer zu schneller Flußdichte für große Graphit- und Wasserreaktoren zahlenmäßig? Für den Graphitreaktor gelte $\Sigma_{A2} = 0{,}00111\ \text{cm}^{-1}$, $\Sigma_{S\,1\to 2} = 0{,}00219\ \text{cm}^{-1}$ und für den Wasserreaktor $\Sigma_{A2} = 0{,}16\ \text{cm}^{-1}$ und $\Sigma_{S\,1\to 2} = 0{,}028\ \text{cm}^{-1}$. Man nehme an, daß $D_2 B^2 \ll \Sigma_{A2}$ gilt (großer Reaktor).

4.2. Wie schreiben sich die Faktoren ε, p, W_s mit den mittleren Wirkungsquerschnitten der Zweigruppentheorie für den Einzonenreaktor? Man leite mit diesen und den Eingruppengrößen f, η (s. Abschn. II. 3.) und W_{th} die Formel (4.45) her.

4.3. Wie lautet die kritische Gleichung für einen reflektierten Kugelreaktor nach der Zweigruppentheorie?

4.4. Wie lauten die Ausdrücke für die Flußdichtenverläufe in einem axial reflektierten Zylinderreaktor? Wie heißt die kritische Gleichung nach der Zweigruppentheorie?

4.5. Analog zu Aufg. 4.4 leite man die Flußdichte und die kritische Gleichung für einen radialreflektierten Zylinderreaktor ab.

4.6. Man beweise, daß der Bremskern für das absorptionsfreie Medium nach der Zweigruppentheorie für eine punktförmige Quelle im absorptionsfreien Medium

$$K(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = \frac{1}{4\,\pi\, L_1^2\, |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \cdot e^{-\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{L_1}}$$

mit $L_1^2 = D_1/\Sigma_{S\,1\to 2}$ ist.

4.7. Gegeben sei ein Kugelreaktor mit D_2O-Reflektor. Die Spaltzone bestehe aus $^{235}UF_6$-Gas. Wie lautet die kritische Gleichung für diesen Hohlraumreaktor nach einer Zweigruppentheorie, wenn der Beitrag des Urans und des Fluors für die Neutronenbremsung zu vernachlässigen ist? Man zeichne die Flußdichteverläufe qualitativ. – Befinden sich in der Spaltzone 10^{20} ^{235}U-Atome je cm^3 (entspricht einem Druck von 7 at bei 500 °K), so gelten folgende Gruppendaten für Spaltzone und D_2O-Reflektor:

$$D_1 = 158\ \text{cm}, \qquad D_1^R = 1{,}29\ \text{cm},$$
$$\Sigma_{A1} - \nu_1\, \Sigma_{f1} = 0, \qquad \Sigma_{A1}^R = 0{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}^{-1},$$
$$\nu_2\, \Sigma_{f2} = 0{,}121\ \text{cm}^{-1}, \qquad \Sigma_{S\,1\to 2}^R = 0{,}00947\ \text{cm}^{-1},$$
$$D_2 = 5{,}56\ \text{cm}, \qquad D_2^R = 0{,}841\ \text{cm},$$
$$\Sigma_{A2} = 0{,}059\ \text{cm}^{-1}, \qquad \Sigma_{A2}^R = 3{,}25 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}^{-1}.$$

Man berechne den kritischen Radius des Hohlraumreaktors nach der Zweigruppentheorie, wenn der Reflektor 30 cm dick ist. Ist die Anwendung der Diffusionstheorie in der gasförmigen Spaltzone gerechtfertigt?

4.8. Wie lauten für den Hohlraumreaktor der Aufg. 4.7 die Gleichungen einer Viergruppentheorie, wenn angenommen wird, daß nur thermische Spaltung für die Neutronenproduktion wesentlich ist und im Reflektor nur von einer Gruppe in die nächste gestreut wird? Man löse das Gleichungssystem auf und gebe die Flußdichten der verschiedenen Gruppen als Funktion des Radius an. Wie wäre die kritische Gleichung für diesen Fall zu ermitteln?

5. Berechnung von Steuerstäben mit der Eingruppendiffusionstheorie

Zur Beeinflussung der Neutronenmultiplikation, die sich im Laufe der Zeit durch Abbrand von Spaltstoff und Erzeugung von Spaltprodukten ändert, sowie zur Regelung der Leistung sind bei den meisten Reaktoren bewegliche Stäbe aus stark absorbierendem Material eingebaut. Deren Einfluß auf die Kritikalität und den Flußdichteverlauf muß berechnet werden. Eine Homogenisierung des Absorbers mit den übrigen Materialien der Spaltzone darf hier wegen der starken Flußdichteänderung in der Umgebung des Stabes der Rechnung nicht zugrunde gelegt werden. Im folgenden wollen wir uns mit einem analytischen Rechenverfahren befassen, das die Berechnung ganz eingefahrener Regelstäbe gestattet. Wir führen die Rechnungen mit der Eingruppendiffusionstheorie durch. Man muß sich jedoch im klaren darüber sein, daß die Anwendung der Diffusionstheorie bei Steuerstabproblemen nur durch die Verwendung der transporttheoretischen Extrapolationslänge gerechtfertigt werden kann (vgl. Abschn. 5.3), und daß die Eingruppentheorie eine grobe Vereinfachung darstellt. Die resultierenden Formeln sind daher nur als erste Näherungen zu betrachten.

5.1. Der zentrale Steuerstab im nackten Reaktor

Die Wirkungsweise eines Steuerstabes wollen wir uns am Beispiel eines in z-Richtung unendlich ausgedehnten, nackten Zylinderreaktors klarmachen [7]. Sein kritischer Radius $R = R_R + d$ (einschließlich der Extrapolationsstrecke) ist bei fehlendem Steuerstab aus der Beziehung

$$B^2 = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \tag{5.1}$$

zu berechnen (vgl. Tab. 2.3 und Gl. (3.34)). M^2 ist das Wanderlängenquadrat (3.33). Der Flußdichteverlauf ist gleichfalls in Tab. 2.3 angegeben.

In das Zentrum dieses Reaktors wird nun ein schwarzer Steuerstab vom Radius a_0 eingesetzt. Die Oberfläche dieses Stabes wirkt ebenso wie die äußere Oberfläche des Reaktors: alle Neutronen, welche durch sie hindurchfliegen, sind für die Kettenreaktion verloren. Wir können daher als Randbedingung das Verschwinden des Neutronenflusses an der Stelle $a = a_0 - d$ fordern

$$\Phi(a) = 0. \tag{5.2}$$

Bei Stäben, deren Radius a_0 kleiner als die Extrapolationsstrecke d ist, wird diese Bedingung ersetzt durch (2.27). Die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung (2.31) für Zylindergeometrie lautet:

$$\Phi(r) = A \cdot \mathrm{J}_0(B' r) + C \cdot \mathrm{Y}_0(B' r). \tag{5.3}$$

B' ist die Flußwölbung des Reaktors mit Steuerstab, während B in (5.1) die Flußwölbung ohne Steuerstab darstellt. Man beachte, daß hier zusätzlich zu den Funktionen der Tab. 2.3 ein Summand $C\,\mathrm{Y}_0(B'r)$ mit $C \neq 0$ auftritt, da der Punkt $r = 0$, in dem Y_0 singulär ist, hier nicht zum Lösungsgebiet gehört.

Die Randbedingungen $\Phi(R) = 0$ und (5.2) führen auf die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} A \cdot \mathrm{J}_0(B' R) + C \cdot \mathrm{Y}_0(B' R) &= 0, \\ A \cdot \mathrm{J}_0(B' a) + C \cdot \mathrm{Y}_0(B' a) &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Das Gleichungssystem (5.4) für die Integrationskonstanten A und C hat eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizienten von A und C verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{J}_0(B' R) & \mathrm{Y}_0(B' R) \\ \mathrm{J}_0(B' a) & \mathrm{Y}_0(B' a) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.5}$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für die neue Flußwölbung B'.

Flußwölbung und Flußdichteverlauf. Im allgemeinen kann (5.5) nur mit numerischen Methoden gelöst werden. Unter den folgenden einschränkenden Voraussetzungen können für die Zylinderfunktionen Näherungsausdrücke eingesetzt werden, die die Lösung von (5.5) beträchtlich vereinfachen. Bei dünnen Steuerstäben in großen Spaltzonen ist das Argument $B'a$ sehr klein. Die Funktionen $\mathrm{J}_0(B'a)$

und $Y_0(B'a)$ können dann in guter Näherung durch das erste Glied ihrer Potenzreihenentwicklung (vgl. [8]) dargestellt werden.

$$Y_0(B'a) \approx -0{,}637 \ln \frac{1{,}123}{B'a} \approx -0{,}637 \cdot \ln \frac{1{,}123}{Ba}, \tag{5.6}$$

$$J_0(B'a) \approx 1. \tag{5.7}$$

Für die Zylinderfunktionen am äußeren Rand machen wir eine Taylor-Entwicklung um die Stelle BR, da die Funktionswerte an dieser Stelle bekannt sind*. Diese Reihen brechen wir nach dem zweiten Glied ab.

$$J_0(B'R) \approx J_0(BR) + (B'-B)R \cdot J'_0(B'R) = \tag{5.8}$$
$$= J_0(BR) - (B'-B)R \cdot J_1(BR) = -0{,}519(B'-B)R,$$

$$Y_0(B'R) \approx Y_0(BR) + (B'-B)R \cdot Y'_0(BR) = \tag{5.9}$$
$$= Y_0(BR) - (B'-B)R \cdot Y_1(BR) = 0{,}510 - 0{,}103\,(B'-B)\,R.$$

Durch Einsetzen der Gl. (5.6–9) in (5.5) erhalten wir den Näherungsausdruck für B':

$$B' = B + \frac{1{,}543}{R\left(\ln \frac{R}{a} - 0{,}451\right)}. \tag{5.10}$$

Der Flußdichteverlauf (5.3) ist mit Gl. (5.4) bis auf eine Normierungskonstante bestimmt:

$$\Phi(r) = C\left[Y_0(B'r) - \frac{Y_0(B'R)}{J_0(B'R)} \cdot J_0(B'r)\right]. \tag{5.11}$$

In Abb. 5.1 ist der Flußdichteverlauf (5.11) zusammen mit der Flußdichte des ungestörten Problems (vgl. Tab. 2.3) aufgezeichnet. Beachtenswert ist, daß der Steuerstab außer dem starken Abfall im Zentrum ein Ansteigen der Flußdichte im äußeren Teil der Spaltzone bewirkt. Dadurch wird der Abfall der Flußdichte am Spaltzonenrand steiler. Das bedeutet einen größeren Neutronenstrom aus dem Reaktor hinaus. Wir sehen also, daß ein Steuerstab auf zwei verschiedene Weisen die Neutronenbilanz beeinflußt: er absorbiert Neutronen aus dem zentralen Teil der Spaltzone und er vergrößert die Leckverluste durch Verdrängung der Flußdichte nach außen.

* $J_0(2{,}405) = 0$, $J_1(2{,}405) = 0{,}519$, $Y_0(2{,}405) = 0{,}510$, $Y_1(2{,}405) = 0{,}103$.

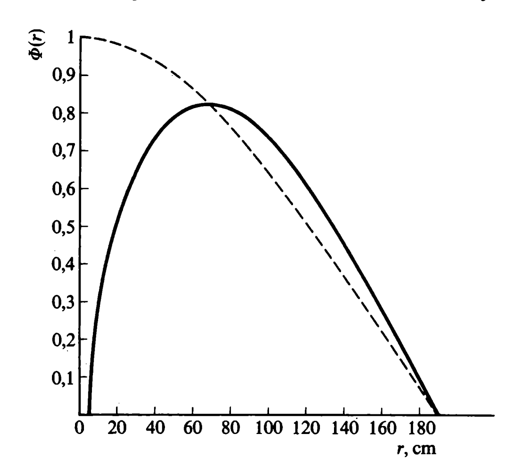


Abb. 5.1: **Flußdichte in einem nackten Zylinderreaktor ($k = 1{,}1$, $M = 25$ cm) mit zentralem Steuerstab. Die Flußdichte im Reaktor ohne Steuerstab ist gestrichelt eingezeichnet.**

Reaktivitätswert. Neben dem gestörten Flußdichteverlauf interessiert uns der Reaktivitätsverlust, den das Einsetzen eines Steuerstabes mit sich bringt. Nach Gl. (3.34)

$$k = k_\infty / (1 + B^2 M^2)$$

bewirkt eine kleine Änderung der Flußwölbung folgende Änderung der Multiplikationskonstante k, wenn k_∞ konstant bleibt:

$$\delta k = -\frac{k_\infty - 1}{k_\infty} \cdot \frac{\delta B^2}{B^2} = -\frac{k_\infty - 1}{k_\infty} \cdot \frac{2\,\delta B}{B}. \tag{5.12}$$

Bei kleinen δk gilt für den Reaktivitätswert des Steuerstabes (vgl. (I. 4.13))

$$\varrho = \delta k / (1 + \delta k) \approx \delta k\,. \tag{5.12a}$$

Als Maß für die Wirksamkeit eines Steuerstabes läßt sich daher der Quotient $\delta B^2 / B^2$ verwenden.

Aus (5.10) erhalten wir:

$$\frac{\delta B^2}{B^2} = \frac{2\,\delta B}{B} = \frac{2}{B} \cdot \frac{1{,}543}{R\left(\ln\frac{R}{a} - 0{,}451\right)} = \frac{1{,}283}{\ln\frac{R}{a} - 0{,}451}, \tag{5.13}$$

$$R = R_R + d,\ a = a_0 - d$$

und damit nach (5.12) den gesuchten Reaktivitätswert.

Die Betrachtungen dieses Abschnitts lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den endlichen, nackten Zylinderreaktor erweitern. Auf der linken Seite von Gl. (5.1) steht dann die Summe aus radialer und axialer Flußwölbung. Entsprechende Änderungen sind in (5.12–13) durchzuführen.

5.2. Der exzentrische Steuerstab im nackten Reaktor

Im allgemeinen ist ein Steuerstab für die Regelung eines Reaktors nicht ausreichend; abgesehen davon sind mehrere dünne Steuerstäbe einem dicken Stab wegen der gleichmäßigeren Flußabsenkung vorzuziehen. Bei Forschungsreaktoren ist außerdem häufig das Zentrum der Spaltzone für Bestrahlungskanäle freigehalten. Als Grundlage für eine beliebige Steuerstabverteilung befassen wir uns in diesem Abschnitt mit der Berechnung eines exzentrischen Steuerstabes.

Zu den Koordinaten r und φ des unendlich ausgedehnten Zylinders führen wir ein weiteres Koordinatensystem mit den Veränderlichen ϱ und ψ ein, dessen Ursprung im Zentrum des Steuerstabes liegt (vgl. Abb. 5.2). Da die Neutronenflußdichte in diesem Fall auch vom Winkel φ abhängt, müssen wir die folgende Wellengleichung lösen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \varphi} + B'^{\,2}\,\Phi = 0. \tag{5.14}$$

Abb. 5.2: Zum exzentrischen Steuerstab.

Die Lösung setzen wir entsprechend dem Vorgehen beim zentralen Steuerstab aus einer Funktion, die im ganzen Reaktor regulär ist, und einer Funktion, die im Zentrum des Stabes einen negativen Pol aufweist, zusammen. Als regulären Anteil nehmen wir eine Linearkombination sämtlicher in der Spaltzone regulärer Partiallösungen von Gl. (5.14)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \, \mathrm{J}_n(B'r) \cdot e^{\mathrm{i}\,n\,\varphi}. \tag{5.15}$$

Aus der Symmetriebedingung $\Phi(r, \varphi) = \Phi(r, -\varphi)$ (vgl. Abb. 5.2) folgt $A_n = A_{-n}$. Als zweiten Teil verwenden wir die Linearkombination der singulären Partiallösungen von Gl. (5.14) im (ϱ, ψ)-System:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, \mathrm{Y}_n(B'\varrho) \cdot e^{\mathrm{i}\,n\,\psi}. \tag{5.16}$$

Die Summe der Ausdrücke (5.15) und (5.16) stellt die Lösung unseres Problems dar. Die Konstanten A_n und C_n müssen über die Randbedingungen bestimmt werden. Für die Randbedingung

$$\Phi(r = R, \varphi) = 0 \tag{5.17}$$

muß der Ausdruck (5.16) mit Hilfe des Additionstheorems der Zylinderfunktionen [8] auf die Variablen r und φ umgeformt werden. Eine entsprechende Umformung ist im Ausdruck (5.15) für die Randbedingung

$$\Phi(\varrho = a, \psi) = 0 \tag{5.18}$$

vorzunehmen. Da die Bedingungen (5.17, 18) für alle φ bzw. ψ gelten sollen, müssen die Koeffizienten der Exponentialfunktionen verschwinden. Auf diese Weise erhält man ein homogenes lineares Gleichungssystem. Die Bedingung für eine nichttriviale Lösung, das Verschwinden der Koeffizientendeterminante, bestimmt die gesuchte Größe B'.

Dieses Verfahren ist sehr mühsam. Wir wollen deshalb eine einfache Näherungslösung ableiten. Für den Fall eines dünnen Steuerstabes in einer großen Spaltzone ist die Abhängigkeit der Flußdichte vom Winkel ψ gering, so daß wir in (5.16) alle Glieder mit $|n| > 0$ vernachlässigen können. Näherungsweise gilt dann

$$\Phi(r, \varphi, \varrho) = C_0 \, \mathrm{Y}_0(B'\varrho) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \, \mathrm{J}_n(B'r) \, e^{\mathrm{i}\,n\,\varphi}. \tag{5.19}$$

Das restliche Glied der Summe (5.16) wandeln wir nach [8] in Terme der Variablen r und φ um:

$$\mathrm{Y}_0(B'\varrho) = \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Y}_n(B'b)\cdot \mathrm{J}_n(B'r)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} & r \leq b, \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_n(B'b)\cdot \mathrm{Y}_n(B'r)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} & r \geq b. \end{cases} \tag{5.20}$$

Im Bereich $r > b$ lautet dann Gl. (5.19):

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[A_n \mathrm{J}_n(B'r) + C_0 \mathrm{J}_n(B'b)\, \mathrm{Y}_n(B'r)\right]\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{5.21}$$

Die Randbedingung (5.17) ergibt die Beziehungen

$$A_n \mathrm{J}_n(B'R) + C_0 \mathrm{J}_n(B'b)\, \mathrm{Y}_n(B'R) = 0, \tag{5.22}$$

die wir in Gl. (5.19) einsetzen:

$$\Phi(r, \varphi, \varrho) = \tag{5.23}$$

$$= C_0\left[\mathrm{Y}_0(B'\varrho) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_n(B'b)\,\mathrm{Y}_n(B'R)}{\mathrm{J}_n(B'R)}\,\mathrm{J}_n(B'r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\right].$$

Auf Grund der Tatsache, daß $B'R$ nahe bei der ersten Nullstelle von $\mathrm{J}_0(x)$ liegt, und weil $B'b$ kleiner als $B'R$ ist, macht das nullte Glied in (5.23) den wesentlichen Beitrag der Summe aus (vgl. [7]). Näherungsweise gilt also

$$\Phi(r, \varrho) = C_0\left[\mathrm{Y}_0(B'\varrho) - \frac{\mathrm{Y}_0(B'R)\,\mathrm{J}_0(B'b)}{\mathrm{J}_0(B'R)}\,\mathrm{J}_0(B'r)\right]. \tag{5.24}$$

Die φ-Abhängigkeit fällt dabei heraus. C_0 wird durch die Leistungsnormierung festgelegt.

Gl. (5.24) benützen wir zum Anschreiben der Randbedingung (5.18). Es muß jedoch bemerkt werden, daß Gl. (5.24) die Bedingung (5.18) nicht exakt befriedigen kann, da die Kurve, auf welcher die Flußdichte (5.24) Null wird, nicht genau kreisförmig sein kann. Für genauere Rechnungen müssen in den Summen (5.19, 23) Glieder mit $|n| > 0$ mitgenommen werden.

Wenn der Abstand des Stabes von der Reaktorachse sehr viel größer als der Stabradius a ist, können wir in (5.24) $r \approx b$ setzen. Die Randbedingung (5.18) lautet dann

$$Y_0(B' a) - \frac{Y_0(B'R)}{J_0(B'R)} \cdot J_0^2(B'b) = 0. \tag{5.25}$$

Mit den Näherungsausdrücken (5.6, 8, 9) und der Annahme $J_0(B' b) \approx J_0(B\, b)$ erhalten wir die folgende Bestimmungsgleichung für B′

$$B' = B + \frac{1{,}543 \cdot J_0^2(B\, b)}{R\left(\ln\frac{R}{a} - 0{,}762 + 0{,}311\, J_0^2(B\, b)\right)}. \tag{5.26}$$

B ist aus Gl. (5.1) bekannt. Aus (5.26) ergibt sich

$$\frac{\delta B^2}{B^2} = \frac{2\,\delta B}{B} = \frac{1{,}283 \cdot J_0^2(B\, b)}{\ln\frac{R}{a} - 0{,}762 + 0{,}311\, J_0^2(B\, b)}. \tag{5.27}$$

und daraus der Reaktivitätswert des Absorberstabes nach (5.12). Gl. (5.27) entspricht Gl. (5.13) für $b = 0$ bis auf den Faktor $J_0^2(B\, b)$. Wir können also die Wirksamkeit eines exzentrischen Steuerstabes aus dem Wert für den zentralen Stab durch Multiplikation mit einer von b abhängigen Gewichtsfunktion näherungsweise bestimmen. Die Gewichtsfunktion ist das Quadrat der ungestörten Flußdichte an der Stelle des Stabmittelpunkts. Sie bewirkt, daß der Reaktivitätswert des Stabes im Reaktorzentrum am größten ist und mit wachsendem b abnimmt.

Eine genauere Formel, bei deren Ableitung in der Summe von (5.23) die Glieder mit $n = \pm 1$ mitberücksichtigt wurden, lautet nach [4]

$$\left(\frac{\delta B^2}{B^2}\right)_1 = \left(\frac{\delta B^2}{B^2}\right)_0 \left[1 - 0{,}485 \left(\frac{J_1(B\, b)}{J_0(B\, b)}\right)^2 \left(\frac{\delta B^2}{B^2}\right)_0\right]. \tag{5.28}$$

Dabei ist der Ausdruck $(\delta B^2/B^2)_0$ durch Gl. (5.27) gegeben. Reaktivitätswerte, die mit Gl. (5.27) berechnet wurden, sind demnach immer zu hoch. Für den Fall $(\delta B^2/B^2)_0 = 0{,}1$ und $b = \frac{1}{2} R$ liegt der Fehler bei 2,65%.

5.3. Die Wechselwirkung zweier Steuerstäbe im nackten Reaktor

Die starken Veränderungen der Neutronenflußdichte, die ein Steuerstab hervorruft (vgl. Abb. 5.1), lassen vermuten, daß zwischen mehreren Steuerstäben in einer Spaltzone große Wechselwirkungen bestehen. Zur Untersuchung dieser Wechselwirkungen betrachten wir zwei gleichartige Steuerstäbe, die in gleichem Abstand von der Spaltzonenmitte auf demselben Durchmesser liegen (s. Abb. 5.3). Bei der Aufstellung des Lösungsansatzes verwenden wir das Konzept des vorhergehenden Abschnitts: die Flußdichte wird dargestellt als Summe einer regulären Funktion und von Funktionen, die im Zentrum der Stäbe eine Singularität aufweisen. Der Gl. (5.19) entspricht nun

$$\Phi(r, \varphi, \varrho_1, \varrho_2) = C_0 \, \mathrm{Y}_0(B'\varrho_1) + D_0 \, \mathrm{Y}_0(B'\varrho_2) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \, \mathrm{J}_n(B'r) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} n \varphi} . \qquad (5.29)$$

Da die Steuerstäbe dieselben Abmessungen und denselben Abstand vom Zentrum haben, muß $C_0 = D_0$ sein. Auf die beiden ersten Ausdrücke in (5.29) wenden wir Gl. (5.20), das Additionstheorem der Bessel-Funktionen, an. Die Randbedingung (5.17) führt dann auf die Beziehung

$$C_0 \, \mathrm{J}_n(B' b) \, \mathrm{Y}_n(B'R) \, (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i} n \pi}) + A_n \, \mathrm{J}_n(B'R) = 0 . \qquad (5.30)$$

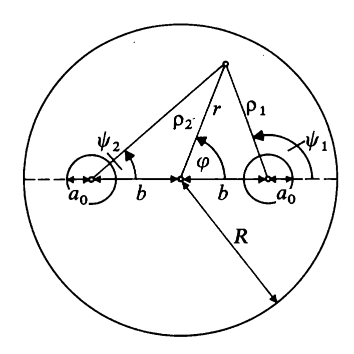


Abb. 5.3: Koordinaten bei der Berechnung der Wechselwirkung zweier Steuerstäbe.

Bei Vernachlässigung der Summanden mit $n \neq 0$ in (5.29) erhalten wir die folgende Näherungslösung für die Flußdichte:

$$\Phi(r, \varrho_1, \varrho_2) = C_0 \left[\mathrm{Y}_0(B'\varrho_1) + \mathrm{Y}_0(B'\varrho_2) - \right. \tag{5.31}$$

$$\left. - 2\,\mathrm{J}_0(B'b)\,\frac{\mathrm{Y}_0(B'R)}{\mathrm{J}_0(B'R)}\,\mathrm{J}_0(B'r) \right].$$

Die Randbedingung (5.18) führt aus Symmetriegründen für beide Stäbe auf dieselbe Beziehung

$$\mathrm{Y}_0(B'a) + \mathrm{Y}_0(B' \cdot 2b) - 2 \cdot \frac{\mathrm{Y}_0(B'R)}{\mathrm{J}_0(B'R)}\,\mathrm{J}_0^2(B'b) = 0. \tag{5.32}$$

Der Term $\mathrm{Y}_0(B' \cdot 2b)$ stellt, $b \gg a$ vorausgesetzt, den Flußbeitrag des Stabes 2 an der Oberfläche des Stabes 1 dar bzw. umgekehrt. Wir können ihn näherungsweise gleich $\mathrm{Y}_0(B \cdot 2b)$ setzen. Die gesuchte Flußwölbung B' erhalten wir durch Einsetzen der Gl. (5. 6, 8, 9) in (5.32)

$$B' = B + \frac{2 \cdot 1{,}543 \cdot \mathrm{J}_0^2(B\,b)}{R\left[\ln\frac{R}{a} - 0{,}762 + 0{,}311\,\mathrm{J}_0^2(B\,b) - 1{,}571\,\mathrm{Y}_0(B \cdot 2\,b)\right]}. \tag{5.33}$$

Abgesehen von dem Faktor 2 im Zähler tritt im Unterschied zu (5.26) im Nenner der Wechselwirkungsausdruck $-1{,}571 \cdot \mathrm{Y}_0(B \cdot 2b)$ auf. Den Reaktivitätswert der beiden Stäbe erhalten wir mit Gl. (5.12) über die Beziehung

$$\frac{\delta B^2}{B^2} = \frac{2 \cdot 1{,}283 \cdot \mathrm{J}_0^2(B\,b)}{\ln\frac{R}{a} - 0{,}762 + 0{,}311 \cdot \mathrm{J}_0^2(B\,b) - 1{,}571 \cdot \mathrm{Y}_0(B \cdot 2\,b)}. \tag{5.34}$$

In Abb. 5.4 ist $\delta B^2/B^2$ für die beiden Stäbe in Abhängigkeit ihres Abstandes b vom Zentrum aufgezeichnet. Zum Vergleich ist der zweifache Wert von Gl. (5.27), entsprechend der Wirkung zweier Stäbe, die sich nicht beeinflussen, angegeben. Bei kleinen b-Werten schwächt die Wechselwirkung die Wirksamkeit ab. Der Grund ist, daß der eine Stab an einer Stelle sitzt, an welcher die Flußdichte

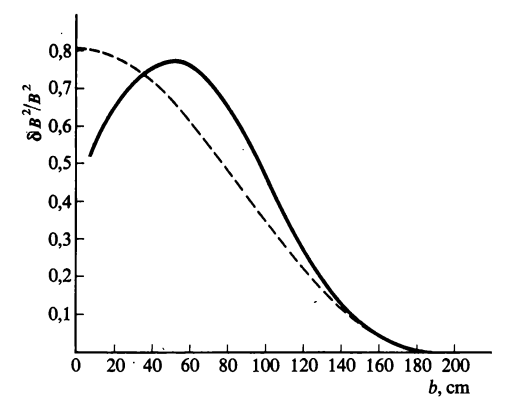


Abb. 5.4: $\delta B^2/B^2$ für zwei Steuerstäbe nach Gl. (5.34). Die gestrichelte Kurve stellt das Verhältnis $\delta B^2/B^2$ ohne gegenseitige Wechselwirkungen (5.27) dar.

durch den anderen Stab abgesenkt ist (shadowing). Der umgekehrte Effekt ist bei größeren Abständen festzustellen: am Ort des einen Stabes ist die Flußdichte durch den anderen Stab erhöht (anti-shadowing).

5.4. Allgemeine Bemerkungen zur Steuerstabberechnung

Die vorliegenden Rechnungen führen im allgemeinen auf zu hohe Reaktivitätswerte. Der wesentliche Fehler liegt in der Zusammenfassung aller Neutronen zu einer Energiegruppe. Dadurch wird angenommen, daß die schnellen Neutronen vom Steuerstab im selben Maß absorbiert werden wie die thermischen, obwohl sie ihn in Wirklichkeit fast ungestört durchfliegen. Dieser Nachteil läßt sich vermeiden, da das angegebene Rechenverfahren sich auf mehrere Gruppen erweitern läßt [9]. Zur genauen Beschreibung der Abbremsung und des Resonanzverhaltens schneller Neutronen in Steuerstäben sind jedoch numerische Methoden notwendig.

Steuerstäbe in reflektierten Reaktoren können, falls die Spaltzone sehr groß ist, über das Konzept der Reflektorersparnis mit der angegebenen Methode behandelt werden. Bei kleinen reflektierten Reaktoren ist eine Abänderung der Theorie notwendig [10].

Bei Leistungsreaktoren werden häufig Steuerstäbe kreuzförmigen Querschnitts verwendet. Sie können durch bezüglich ihrer Wirkung äquivalente, zylindrische Stäbe ersetzt werden, deren Abmessungen nach der Methode der Absorptionsflächen von Hurwitz und Roe

[11] bestimmt werden können. Mit diesem Umweg kann das angegebene Verfahren angewandt werden.

Das Problem des teilweise eingefahrenen Steuerstabs kann in erster Näherung störungstheoretisch behandelt werden. Für genauere Rechnungen kommen mehrdimensionale Differenzenverfahren und Methoden der Flußsynthese in Frage (vgl. Abschn. 7).

Aufgaben

5.1. Man leite die Formel (5.12) aus Gl. (3.34) ab. Wie müßte k_∞ geändert werden, um den Reaktor mit Steuerstab kritisch zu machen?

5.2. Man leite die kritische Gleichung für einen nackten Reaktor mit zentralem Steuerstab nach der Zweigruppentheorie ab. Im Absorberstab soll für die schnellen Neutronen die Diffusionstheorie gelten; für die thermischen Neutronen soll er schwarz sein.

5.3. Man überlege, wie dick eine Bor- bzw. eine Cadmiumschicht sein muß, damit sie einen auftreffenden Neutronenstrahl auf 1% seiner Ausgangsdichte schwächt (Daten aus Tab. II. 3.6).

6. Reaktoren mit ungleichförmiger Materialverteilung gemäß Ein- und Zweigruppendiffusionstheorie

Bisher hatten wir stets Spaltzonen mit räumlich konstanten Materialgrößen behandelt. Die gleichförmige Materialverteilung ist aber in vielen Fällen nicht die günstigste.

Betrachten wir z. B. die Verteilung der Leistungsdichte in der Spaltzone. Um bei einem vorgegebenen Grenzwert für die Leistungsdichte (bedingt z. B. durch Grenzen der Materialbelastbarkeit) maximale Gesamtleistung zu erzielen, muß die Leistungsdichte konstant sein. Die Leistungsdichte ist aber gewöhnlich bei gleichförmiger Brennstoff- und Moderatorverteilung im Zentrum der Spaltzone höher als am Rand.

Eine Glättung der Leistungsdichte kann auf verschiedene Weise erreicht werden:

1. Durch Erhöhung der Spaltstoffkonzentration in den Randzonen der Spaltzone.
2. Bei thermischen Reaktoren mit gleichförmiger Spaltstoffverteilung durch Veränderung der Moderatorkonzentration.
3. Durch ungleichförmige Verteilung von Neutronenabsorbern.
4. In kleinen thermischen Reaktoren durch den Einfluß des Reflektors auf das Neutronenspektrum in der Spaltzone.

Eine konstante Leistungsdichte erhöht nicht nur die Gesamtleistung des Reaktors, sondern auch die Lebenszeit eines Brennstoffeinsatzes, da der Abbrand gleichförmiger erfolgt. Von besonderem Vorteil für das Langzeitverhalten sind Reaktoren mit konstanter Spaltstoffverteilung und räumlich konstanter Flußdichte (zu erreichen durch ungleichförmige Moderatorverteilung oder geeignete Reflektorwirkung). In diesen Reaktoren behält die Neutronenflußdichte während des Abbrands ihre Form weitgehend bei, da sich das Verhältnis von Spaltstoff zu Spaltprodukten überall in der Spaltzone in der gleichen Weise ändert. Der Spaltstoffverbrauch während des Langzeitbetriebs kann in solchen Reaktoren vorteilhaft durch gleichförmig verteilte abbrennbare Gifte kompensiert werden.

Andere Auslegungsgesichtspunkte, wie z. B. Optimierung auf kleinste kritische Masse, kleinste Gesamtmasse, konstante Oberflächentemperatur längs des Kühlkanals oder die wirksamste Verteilung abbrennbarer Gifte in Reaktoren mit konstanter Spaltstoff- und Moderatordichte führen i. a. ebenfalls auf ungleichförmige Materialverteilungen.

6.1. Glättung der Leistungsdichte durch ungleichförmige Spaltstoffverteilung

Wir stellen das Problem an Hand einer Eingruppengleichung dar. Die bisher benutzte Berechnung des Quellterms mit Hilfe der Fermischen Alterstheorie (s. (2.9a) und (3.28)) ist hier nicht verwendbar, da wir eine Spaltzone mit Reflektor betrachten und aus der Zweigruppentheorie wissen, daß in diesem Fall der örtliche Verlauf der Quelldichte der schnellen Neutronen nicht mit dem der thermischen Neutronen zusammenfällt. Wir berechnen die Quelldichte der thermischen Neutronen aus der Quelldichte der schnellen Neutronen mit Hilfe der Bremskerne. Der Bremskern $K(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ gibt nach Abschn. 3 die Quelldichte der thermisch werdenden Neutronen $q(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}, E_{\text{th}})$ an der Stelle $\boldsymbol{r}$, herrührend von einer Einheitsquelle bei $\boldsymbol{r}'$, an. Die gesamte Quelldichte für die thermischen Neutronen an der Stelle $\boldsymbol{r}$ ergibt sich somit aus einer Integration über alle Spaltquellen gemäß

$$Q_{\text{th}}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{Spaltzone}} \nu\, \Sigma_{\text{f}}(\boldsymbol{r}')\, \Phi(\boldsymbol{r}')\, K(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V'.$$

Bremskerne für das unendlich ausgedehnte Medium sind in Tab. 4.2 für verschiedene Bremsmodelle angegeben. Der Einfluß

der Ränder ist dabei nicht berücksichtigt. Bremskerne für endliche Medien sind wesentlich komplizierter.

Als Beispiel wählen wir zunächst ein vereinfachtes, ebenes Reaktormodell, das analytisch behandelt werden kann. Diffusionskonstanten und Bremseigenschaften seien in der Spaltzone und dem unendlich ausgedehnten Reflektor gleich, unabhängig von der Verteilung des Spaltstoffes. Der Bremskern hängt unter diesen Voraussetzungen lediglich vom Abstand zwischen dem Quellpunkt in der Spaltzone und dem Aufpunkt in Spaltzone oder Reflektor ab: $K(|x - x'|)$. Spaltung und Neutroneneinfang erfolge ausschließlich im Bereich der thermischen Neutronen.

Gesucht ist die ortsabhängige Zahl $N^{235}(x)$ der ^{235}U-Kerne je cm^3, die eine konstante Leistungsdichte in der ganzen Spaltzone ergibt:

$$P(x) = q\, \sigma_f^{235}\, N^{235}(x)\, \Phi(x) = \begin{cases} C \text{ für } -X_G \leq x \leq X_G, \\ 0 \text{ für } \quad |x| > X_G. \end{cases} \tag{6.1}$$

q ist die je Spaltung erzeugte Wärmemenge (s. Gl. (I. 3.27)). Eine Variation der Spaltstoffkonzentration beeinflusse die Teilchenkonzentration der übrigen Materialien nicht. Für die thermischen Neutronen gilt dann mit dem obigen Quellglied (wobei $p \cdot \varepsilon = 1$ nach Voraussetzung) die folgende Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} &D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \Sigma_A^M \Phi(x) - \Sigma_A^{235}(x)\, \Phi(x) + \\ &+ \int\limits_{\text{Spaltzone}} \nu\, \Sigma_f^{235}(x')\, \Phi(x')\, K(|x' - x|)\, dx' = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

$K(|x' - x|)$ ist aus Tab. 4.2 zu entnehmen. Der Absorptionsquerschnitt ist aufgespalten in den ortsabhängigen Anteil $\Sigma_A^{235}(x)$ des ^{235}U und den räumlich konstanten Anteil Σ_A^M aller übrigen Materialien. Drücken wir $N^{235}(x) \cdot \Phi(x)$ nach (6.1) durch die vorgegebene Leistungsdichte P aus, so folgt:

$$\begin{aligned} &D \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot \Phi(x) - \Sigma_A^M \cdot \Phi(x) - \frac{\nu}{q \cdot \eta} P(x) + \\ &+ \int\limits_{\text{Spaltzone}} \frac{\nu}{q} P(x')\, K(|x' - x|)\, dx' = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch eine Fourier-Zerlegung des gewünschten Funktionsverlaufs $P(x)$ (s. (6.1)) können wir den zugehörigen Flußdichteverlauf und die Verteilung des Spaltstoffes ermitteln. Zur Fourier-Transformation der Gl. (6.3) multiplizieren wir jedes Glied mit e^{ikx} und integrieren über alle x.

Mit den Fourier-Transformierten der Flußdichte und der Leistungsdichte

$$\overline{\Phi}(k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \cdot e^{ikx}\, dx, \qquad (6.4)$$

$$\overline{P}(k) = \int_{x'=-\infty}^{+\infty} P(x') \cdot e^{ikx'}\, dx', \qquad (6.5)$$

und Anwendung des „Faltungssatzes“

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} P(x')\, K(|x'-x|)\, e^{ikx}\, dx'\, dx = \overline{P}(k) \cdot \overline{K}(k) \qquad (6.6)$$

folgt aus (6.3)

$$-D\,k^2\,\overline{\Phi}(k) - \Sigma_A^M\,\overline{\Phi}(k) + \frac{\nu}{q \cdot \eta}\left[\eta\,\overline{K}(k) - 1\right]\overline{P}(k) = 0. \qquad (6.7)$$

Die Auflösung nach $\overline{\Phi}(k)$ ergibt:

$$\overline{\Phi}(k) = \frac{\nu}{q \cdot \eta} \cdot \frac{\eta\,\overline{K}(k) - 1}{D\,k^2 + \Sigma_A^M} \cdot \overline{P}(k). \qquad (6.8)$$

Damit ist die Fourier-Transformierte der Neutronenflußdichte durch die Fourier-Transformierte der gewünschten Leistungsdichte und des Bremskerns ausgedrückt.

Die Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion $P(x)$ (s. (6.1)) ist

$$\overline{P}(k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot e^{ikx}\, dx = 2\,C \cdot \frac{\sin k\,X_G}{k}. \qquad (6.9)$$

Die Quelldichte der thermischen Neutronen berechnen wir nach der Zweigruppentheorie. Der zugehörige Bremskern $K(|x-x'|)$ ist Tab. 4.2 zu entnehmen:

$$K(|x-x'|) = \frac{1}{2\,L_1}\, e^{-\frac{|x-x'|}{L_1}}.$$

Dessen Fourier-Transformierte ist nach (6.6)

$$\bar{K}(k) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} K(|x-x'|)\, e^{ik(x-x')}\, dx = \frac{1}{1 + L_1^2 k^2}. \qquad (6.10)$$

Die Neutronenflußdichte $\Phi(x)$ wird mit (6.8–10)

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}(k)\, e^{-ikx}\, dk =$$

$$= \frac{\nu \cdot C}{q \cdot \eta \cdot \Sigma_A^M \cdot \pi} \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta - (1 + k^2 L_1^2)}{(1 + k^2 L_1^2)(1 + k^2 L_2^2)} \cdot \frac{\sin k X_G}{k} \cdot e^{-ikx}\, dk. \qquad (6.11)$$

Die Auswertung des Integrals nach dem Residuensatz ergibt

a) für die Spaltzone [12] ($|x| < X_G$):

$$\Phi(x) = \frac{\nu C}{q \cdot \eta \cdot \Sigma_A^M} \left\{ (\eta - 1) - \frac{\eta}{1 - (L_2/L_1)^2} \cdot e^{-X_G/L_1} \cdot \cosh(x/L_1) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\eta}{1 - (L_1/L_2)^2} - 1 \right] \cdot e^{-X_G/L_2} \cdot \cosh(x/L_2) \right\}. \qquad (6.12a)$$

Daraus folgt über (6.1) die benötigte Spaltstoffverteilung $\overset{235}{N}(x)$.

b) für den Reflektor ($|x| > X_G$):

$$\Phi^R(x) = \frac{\nu \cdot C}{q \cdot \eta \cdot \Sigma_A^M} \left\{ \frac{\eta}{1 - (L_2/L_1)^2} \sinh(X_G/L_1) \cdot e^{-x/L_1} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\eta}{1 - (L_1/L_2)^2} - 1 \right] \sinh(X_G/L_2) \cdot e^{-x/L_2} \right\}. \qquad (6.12b)$$

Die Abb. 6.1 gibt den Flußdichteverlauf der thermischen Neutronen und die Verteilung des Spaltstoffes für einen graphitmoderierten und -reflektierten Reaktor wieder. Der Spaltstoff muß am Spaltzonenrand angereichert werden, damit die Leistungsdichte konstant wird. Die kritische Masse ist bei dieser Verteilung des Spaltstoffes größer als bei gleichförmiger Verteilung, da die am Spaltzonenrand erzeugten Neutronen einen geringeren Einfluß auf die Kettenreaktion haben als die im Zentrum erzeugten.

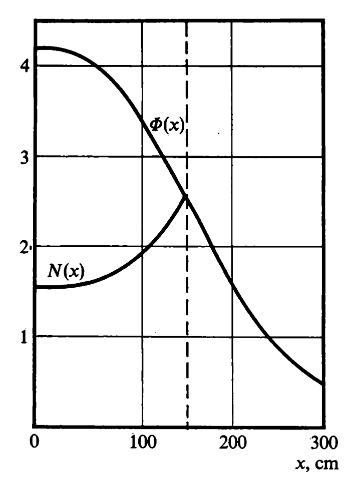


Abb. 6.1: Verteilung der Spaltstoffdichte $N(x)$ und der Flußdichte $\Phi(x)$ für eine konstante Leistungsdichte (willkürliche Einheiten).

Für Fälle, in denen Spaltzone und Reflektor verschiedene Diffusionskonstanten und Bremseigenschaften besitzen, und der Reflektor endlich ist, sind ebenfalls analytische Lösungen in der Literatur angegeben [13]. Findet ein merklicher Teil der Spaltungen im epithermischen bzw. Resonanzgebiet statt, so ist nur noch eine iterative numerische Lösung, z. B. nach der Methode der Quelliteration, möglich [13]. Das iterative Lösungsverfahren beginnt mit einer gleichförmigen Spaltstoffverteilung von $N^{(0)}$ Kernen ^{235}U je cm^3. Für die gleichförmige Brennstoffverteilung werden nach einem Differenzenverfahren (s. Abschn. 7) die Flußdichten $\Phi_g^{(0)}(\boldsymbol{r})$ einer Mehrgruppentheorie bestimmt. Für die Leistungsdichte gilt dann

$$P^{(0)}(\boldsymbol{r}) = q \sum_{g=1}^{G} N^{(0)} \sigma_{\mathrm{f}g} \Phi_g^{(0)}(\boldsymbol{r}). \tag{6.13}$$

Für die erste Iteration wählen wir eine Brennstoffverteilung der Form

$$N^{(1)}(\boldsymbol{r}) = \frac{C}{q \sum_g \sigma_{\mathrm{f}g} \Phi_g^{(0)}(\boldsymbol{r})}, \tag{6.14}$$

wobei im Nenner näherungsweise die Flußdichten $\Phi_g^{(0)}(\boldsymbol{r})$ für konstante Spaltstoffverteilung eingesetzt werden. Mit dieser Brennstoffverteilung werden verbesserte Neutronenflußdichten $\Phi_g^{(1)}(\boldsymbol{r})$ ausgerechnet, und mit diesen wiederum eine verbesserte Brennstoffverteilung

$$N^{(2)}(\boldsymbol{r}) = \frac{C}{q \sum_g \sigma_{fg}\, \Phi_g^{(1)}(\boldsymbol{r})}. \tag{6.15}$$

Nach wenigen Iterationen kann auf diese Weise für komplizierte raum- und energieabhängige Diffusionsprobleme die Spaltstoffverteilung für eine vorgeschriebene Verteilung der Leistungsdichte bestimmt werden.

6.2. Glättung der Leistungsdichte durch ungleichförmige Moderatorverteilung

Die Bedeutung der Leistungsglättung bei konstanter Spaltstoffverteilung allein durch Änderung der Moderatorkonzentration wurde bereits eingangs hervorgehoben. Wir behandeln einfachheitshalber wieder einen ebenen Reaktor ohne Schnellspaltung und Resonanzabsorption nach der Zweigruppendiffusionstheorie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Phi_1(x) - \Sigma_{S\,1\to 2}(x)\, \Phi_1(x) + \nu_2\, \Sigma_{f2}\, \Phi_2(x) = 0, \tag{6.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_2(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Phi_2(x) - \Sigma_{A2}(x)\, \Phi_2(x) + \Sigma_{S\,1\to 2}(x)\, \Phi_1(x) = 0. \tag{6.17}$$

Die konstante Leistungsdichte (6.1) kann bei konstanter Spaltstoffverteilung und fehlender Schnellspaltung nur durch eine konstante Flußdichte der thermischen Neutronen in der Spaltzone erreicht werden:

$$\Phi_2 = \frac{C}{q \cdot \Sigma_{f2}} = \text{const.} \tag{6.18}$$

Die Diffusionsgleichung der thermischen Neutronen reduziert sich daher in der Spaltzone auf

$$\Sigma_{A2}(x) \cdot \Phi_2 = \Sigma_{S\,1\to 2}(x) \cdot \Phi_1(x). \tag{6.19}$$

Wir betrachten jetzt den einfachen Fall, daß die Absorption im Moderator klein gegenüber der Absorption im Brennstoff ist, so

daß näherungsweise Σ_{A2} als ortsunabhängig angenommen werden kann: $\Sigma_{A2} = \Sigma_{A2}^{U} + \Sigma_{A2}^{M} \approx$ const, $f \approx$ const. In diesem Sonderfall wird mit $\Sigma_{A2} \cdot \Phi_2$ auch $\Sigma_{S\,1\to 2}(x) \cdot \Phi_1(x)$ in der Spaltzone räumlich konstant:

$$\Sigma_{S\,1\to 2}(x) \cdot \Phi_1(x) = \Sigma_{A2}\,\Phi_2 = \frac{\nu\,C}{q \cdot \eta \cdot f} = \text{const.} \tag{6.20}$$

Setzen wir (6.20) in die Diffusionsgleichung (6.16) der schnellen Neutronen ein, so folgt

$$\frac{d}{dx} D_1(x) \frac{d}{dx} \Phi_1(x) + (\nu_2\,\Sigma_{f2} - \Sigma_{A2})\,\Phi_2 = 0. \tag{6.21}$$

Die gesuchte räumlich veränderliche Teilchendichte $N^{M}(x)$ des Moderators ist in

$$D_1(x) = \frac{1}{3\,\sigma_{tr\,1} \cdot N^{M}(x)} \tag{6.22}$$

und

$$\Sigma_{S\,1\to 2}(x) = \sigma_{S\,1\to 2} \cdot N^{M}(x). \tag{6.23}$$

enthalten. Aus (6.21) ergibt sich mit (6.20, 22, 23) und $\frac{d}{dx}\frac{1}{N^{M}(x)} = -\frac{1}{N^{M}(x)^2} \cdot \frac{d}{dx} N^{M}(x)$ folgende Differentialgleichung für $N^{M}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{N^{M}(x)^3} \cdot \frac{d}{dx} N^{M}(x) = 3(\eta\,f - 1)\,\sigma_{tr\,1} \cdot \sigma_{S\,1\to 2}. \tag{6.24}$$

Einmalige Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen 0 und x liefert (unter Beachtung von $\frac{d}{dx} N^{M}(x)|_{x=0} = 0$):

$$\frac{1}{N^{M}(x)^3} \cdot \frac{d}{dx} N^{M}(x) = 3(\eta\,f - 1)\,\sigma_{tr\,1} \cdot \sigma_{S\,1\to 2} \cdot x. \tag{6.25}$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt schließlich die gesuchte räumliche Verteilung der Moderatorkonzentration

$$N^{M}(x) = \frac{N^{M}(0)}{\sqrt{1 - (\eta\,f - 1)\left(\frac{x}{L_{1,0}}\right)^2}}, \tag{6.26}$$

wobei

$$L_{1,0}^2 = \frac{D_1(0)}{\Sigma_{S\,1\to 2}(0)} \tag{6.27}$$

ist. Damit ist neben der thermischen Flußdichte auch die schnelle Flußdichte in der Spaltzone festgelegt. Aus (6.20) folgt:

$$\Phi_1(x) = \frac{\nu C}{q f \eta \cdot \Sigma_{S\,1\to 2}(0)} \sqrt{1 - (\eta f - 1)\left(\frac{x}{L_{1,0}}\right)^2}\,. \tag{6.28}$$

Für die Flußdichteverläufe im Reflektor ergibt sich nach Abschn. 4.3.2 bei unendlicher Ausdehnung

$$\Phi_1^R(x) = A_1^R \cdot e^{-\frac{x}{L_1^R}}, \tag{6.29}$$

$$\Phi_2^R(x) = A_1^R \cdot S^R \cdot e^{-\frac{x}{L_1^R}} + A_2^R \cdot e^{-\frac{x}{L_2^R}}. \tag{6.30}$$

Die Lösungen für schnelle und thermische Neutronen in Spaltzone und Reflektor sind durch die Stetigkeitsforderungen für Fluß- und Stromdichte an der Grenze $x = X$ verknüpft. Das sind vier Bedingungen. Durch diese vier Bedingungen werden die Konstanten A_1^R, A_2^R der Reflektorlösungen sowie die Moderatorkonzentrationen $N^M(0)$ im Zentrum der Spaltzone und die kritische Spaltzonendicke oder die kritische Uranmenge festgelegt. Eine Lösung des Problems ist nicht in jedem Falle möglich. Bestimmte Materialkombinationen in Spaltzone und Reflektor scheiden aus [14].

In dem hier betrachteten einfachen Fall lassen sich alle Größen analytisch darstellen. Für komplizierte Beispiele (z. B. wenn die Absorption im Moderator nicht klein gegen die Absorption im Brennstoff ist) sind numerische Lösungen in der Literatur angegeben [14]. Abb. 6.2 zeigt die Moderatorverteilung und die Flußdichteverläufe in einem graphitmoderierten und -reflektierten Plattenreaktor.

6.3. Optimale Materialverteilung

Man kann fragen, wie ein Material (Absorber, Brennstoff, Moderator) im Reaktor verteilt werden muß, damit sein Einfluß auf die Kettenreaktion möglichst groß ist. Goertzel [15] hat z. B. für den Fall eines thermischen Reaktors mit einheitlichen Brems- und

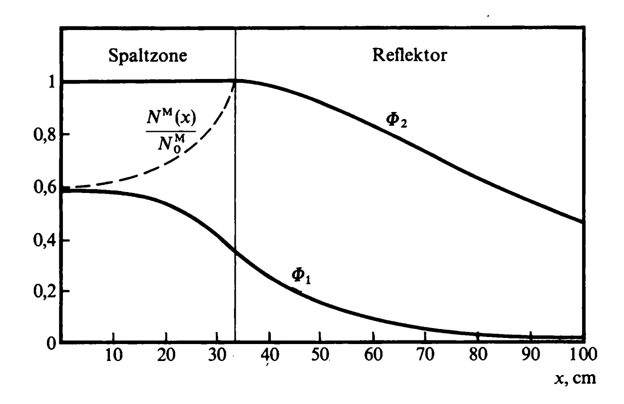


Abb. 6.2: Ungleichförmige Moderatorverteilung $N^M(x)$ zur Erzielung einer konstanten Leistungsdichte bei konstanter Brennstoffverteilung in einem graphitmoderierten und -reflektierten Reaktor. N_0^M ist die Zahl der Kerne je cm³ im Graphit. Φ_1 bzw. Φ_2 sind die Flußdichten der schnellen und thermischen Neutronen.

Transporteigenschaften in Spaltzone und Reflektor die günstigste Spaltstoffverteilung ermittelt, die den Reaktor mit einem Minimum an Uran kritisch macht. Im Gegensatz zu der Brennstoffverteilung bei Reaktoren mit konstanter Leistungsdichte (s. Abb. 6.1) muß für eine minimale kritische Masse bei konstanter thermischer Flußdichte der Brennstoff im Zentrum des Reaktors angereichert werden (s. Abb. 6.3). Wilkins [16] hat auf der Grundlage der Goertzelschen Arbeit das Problem der minimalen Gesamtmasse für

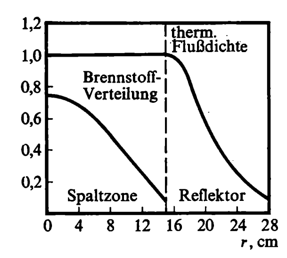


Abb. 6.3: Verteilung des Brennstoffes und der Flußdichte der thermischen Neutronen in einem Reaktor mit minimaler kritischer Masse (nach [15]).

eine Klasse einfacher Reaktoren gelöst. Die wirkungsvollste Verteilung eines Neutronenabsorbers ist bei WEINBERG und WIGNER [4] angegeben. Neuerdings wurden optimale Materialverteilungen unter allgemeineren Bedingungen von ANDERSSON [17] untersucht.

7. Numerische Verfahren zur Berechnung des Vielzonenreaktors

7.1. Das Differenzenverfahren

Das Differenzenverfahren stellt eines der häufigst angewandten Verfahren zur numerischen Lösung der Gruppendiffusionsgleichungen (4.11) dar. Wir wollen es hier unter Beschränkung auf eindimensionale und zeitunabhängige Probleme beschreiben. Eine Erweiterung ist möglich, erfordert aber große Rechenmaschinenkapazität.

7.1.1. Umformung der Gruppendiffusionsgleichungen

In den zeitunabhängigen Gruppendiffusionsgleichungen (4.11) fassen wir in jeder Gruppe die Neutronenabsorptionen und die Streuungen, die aus der Gruppe herausführen, unter einem „Verlustquerschnitt" gemäß

$$\Sigma_{Vg}(r) = \Sigma_{A\,g}(r) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^{G} \Sigma_{S\,g \to g'}(r) \tag{7.1}$$

zusammen. In die Quellen können neben den Spalt- und Streuquellen $Q_{f\,g}(r)$ und $Q_{S\,g}(r)$ auch konstante Quellen $Q_{0\,g}(r)$ eingeschlossen werden:

$$Q_g(r) = Q_{0\,g}(r) + Q_{f\,g}(r) + Q_{S\,g}(r) \tag{7.2}$$

mit (vgl. (4.10))

$$Q_{f\,g}(r) = \lambda\, \chi_g(r) \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}(r)\, \Sigma_{f\,g'}(r)\, \Phi_{g'}(r) \tag{7.3}$$

und

$$Q_{S\,g}(r) = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^{G} \Sigma_{S\,g' \to g}(r) \cdot \Phi_{g'}(r). \tag{7.4}$$

Der Reaktor kann in mehreren Zonen verschiedene Spalt- und Brutmaterialien enthalten. Daher sind die Streu- und Spaltquerschnitte, die Neutronenausbeuten ν_g und die Spaltspektren χ_g als Funktionen des Orts angesetzt. Die Größe λ in (7.3) wird als Eigenwert der numerischen Rechnung eingeführt. Ergibt die Rechnung den Wert $\lambda = 1$, so ist der Reaktor mit der vorgegebenen Materialzusammensetzung und der gewählten Geometrie gerade kritisch. Für $\lambda < 1$ ist der Reaktor überkritisch, für $\lambda > 1$ unterkritisch. $1/\lambda$ hat die Bedeutung der Multiplikationskonstanten: $k = 1/\lambda$.

Mit (7.1–4) wird die Diffusionsgleichung (4.11)

$$\nabla D_g(r) \nabla \Phi_g(r) - \Sigma_{Vg}(r) \Phi_g(r) + Q_g(r) = 0. \qquad (7.5)$$

7.1.2. *Differenzengleichung für innere Punkte*

Zur Aufstellung der Differenzengleichung wird der Reaktor in N Gebiete eingeteilt. Dazu legen wir zunächst entlang der Koordinatenachse in beliebigen Abständen die Gitterpunkte („Flußpunkte“) $r_1, r_2 \ldots r_N$ fest, s. Abb. 7.1; r_1 und r_N sind Randpunkte des Reaktors. Die Materialgrößen seien zwischen den Flußpunkten r_i bis r_{i+1} konstant. Sie dürfen sich in den Flußpunkten selbst sprunghaft ändern. Das bedeutet: die Grenzen zwischen Reaktorgebieten müssen auf einem der Flußpunkte liegen.

In den nächsten Gleichungen sollen folgende Abkürzungen verwendet werden: $V^i = V(r_{i-\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}})$ sei das Volumen des Gebiets zwischen den Punkten $r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$ und $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i+1})$ (vgl. Abb. 7.1). Hierzu werden zwei Teilvolumina betrachtet, nämlich $V^{i-} = V(r_{i-\frac{1}{2}}, r_i)$ und $V^{i+} = V(r_i, r_{i+\frac{1}{2}})$. Es gilt $V^i = V^{i-} + V^{i+}$. $S^{i\pm\frac{1}{2}}$ sei die gemeinsame Oberfläche der Gebiete V^i und $V^{i\pm1}$. $S^{i\pm\frac{1}{2}}$ geht also durch den Punkt $r_{i\pm\frac{1}{2}}$. $\Sigma_g^{i\pm\frac{1}{2}}$, $D_g^{i\pm\frac{1}{2}}, \ldots$ seien die Gruppenkonstanten im Gebiet $V^{i\pm}$.

Wir integrieren die Diffusionsgleichung (7.5) über das Volumen V^i:

$$\int_{V^i} \nabla D_g(r) \nabla \Phi_g(r)\, \mathrm{d}V - \int_{V^i} \Sigma_{Vg}(r) \Phi_g(r)\, \mathrm{d}V + \int_{V^i} Q_g(r)\, \mathrm{d}V = 0. \qquad (7.8)$$

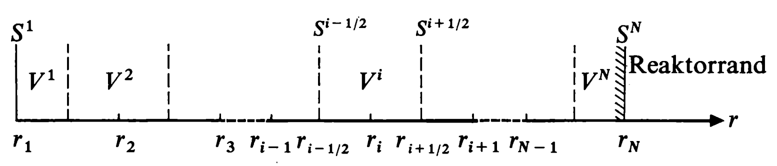


Abb. 7.1: Gebietseinteilung für das Differenzenverfahren.

Auf das Diffusionsglied können wir den Gaußschen Satz anwenden:

$$\int_{V^i} \nabla D_g(r) \nabla \Phi_g(r) \, \mathrm{d}V = \int_{S^{i+\frac{1}{2}}} D_g(r) \nabla \Phi_g(r) \, \boldsymbol{n}^+ \, \mathrm{d}S + \\ + \int_{S^{i-\frac{1}{2}}} D_g(r) \nabla \Phi_g(r) \, \boldsymbol{n}^- \, \mathrm{d}S. \tag{7.9}$$

$\boldsymbol{n}^\pm$ sind die aus V^i hinausweisenden Normalenvektoren der Oberflächen $S^{i\pm\frac{1}{2}}$. Um die Integrale in (7.8, 9) auswerten zu können, müssen wir über den Flußdichteverlauf und seine Ableitung innerhalb des Intervalls V^i Annahmen treffen.

Im Prinzip kann für die Flußdichte in V^i ein beliebiger Funktionsverlauf gewählt werden (z. B. ein Polynom in r), meistens wird sie jedoch im ganzen Intervall konstant gleich $\Phi(r_i)$, dem Wert in der Intervallmitte, gesetzt. Bei Intervallbreiten, die klein gegen die mittlere freie Weglänge sind, ist dies eine gute Näherung. Aus dem zweiten Integral in (7.8) wird damit

$$\int_{V^i} \Sigma_{\mathrm{V}g}(r) \, \Phi_g(r) \, \mathrm{d}V = \Sigma_{\mathrm{V}g}^{i-\frac{1}{2}} V^{i-} + \Sigma_{\mathrm{V}g}^{i+\frac{1}{2}} V^{i+}. \tag{7.10}$$

Entsprechend gilt

$$\int_{V^i} Q_g(r) \, \mathrm{d}V = Q_g^{i-\frac{1}{2}} V^{i-} + Q_g^{i+\frac{1}{2}} V^{i+}. \tag{7.11}$$

Den Differenzenausdruck für die Ableitung erhalten wir auf die folgende Weise. Wir entwickeln die Flußdichte um den Punkt $\frac{1}{2}(r_i + r_{i+1})$ und berechnen mit dieser Entwicklung die Flußdichten an den Punkten r_i und r_{i+1}. Beide Ausdrücke addiert ergeben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \Phi(r) \bigg|_{\frac{1}{2}(r_i + r_{i+1})} = \frac{\Phi(r_{i+1}) - \Phi(r_i)}{r_{i+1} - r_i} - \\ - \frac{(r_{i+1} - r_i)^2}{24} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}r^3} \Phi(r) \bigg|_{\frac{1}{2}(r_i + r_{i+1})} + \dots \approx \frac{\Phi(r_{i+1}) - \Phi(r_i)}{r_{i+1} - r_i}. \tag{7.12}$$

Nach derselben Methode lassen sich auch genauere Formeln herleiten, bei denen auch die Punkte $r_{i+2}, r_{i+3}, \dots$ bzw. $r_{i-1}, r_{i-2}, \dots$ zur Ableitung beitragen. Bei Diffusionsrechnungen mit kleinen Maschenweiten ist die Genauigkeit von (7.12) ausreichend. (7.12) eingesetzt in (7.9) ergibt

$$\int_{V^i} \nabla D_g(r)\, \nabla \Phi_g(r)\, \mathrm{d}V = D_g^{i+\frac{1}{2}}\, S^{i+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_g^{i+1} - \Phi_g^i}{r_{i+1} - r_i} - D_g^{i-\frac{1}{2}}\, S^{i-\frac{1}{2}} \frac{\Phi_g^i - \Phi_g^{i-1}}{r_i - r_{i-1}}. \tag{7.13}$$

Gl. (7.10, 11, 13) setzen wir in (7.9) ein. Wir erhalten folgendes lineare Gleichungssystem für die Flußdichten an den Punkten r_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\alpha_g^i\, \Phi_g(r_{i-1}) + \beta_g^i\, \Phi_g(r_i) + \gamma_g^i\, \Phi_g(r_{i+1}) + \delta_g^i = 0. \tag{7.14}$$

Die Bedeutung der Koeffizienten α_g^i, β_g^i, γ_g^i und δ_g^i ist aus den folgenden Gleichungen zu entnehmen.

$$\alpha_g^i = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i - r_{i-1}} D_g^{i-\frac{1}{2}} \cdot S^{i-\frac{1}{2}} & i \neq 1, \\ 0 & i = 1. \end{cases} \tag{7.15a}$$

$$-\beta_g^i = \begin{cases} \alpha_g^i + \gamma_g^i + \Sigma_{\mathrm{V}g}^{i+\frac{1}{2}} \cdot V^{i+} + \Sigma_{\mathrm{V}g}^{i-\frac{1}{2}} \cdot V^{i-} & i \neq 1, N, \\ \alpha_g^1 + \gamma_g^1 + \Sigma_{\mathrm{V}g}^{1+\frac{1}{2}} \cdot V^1 - \dfrac{a_g^1}{b_g^1} \cdot S^1 & i = 1, \\ \alpha_g^N + \gamma_g^N + \Sigma_{\mathrm{V}g}^{N-\frac{1}{2}} \cdot V^N + \dfrac{a_g^N}{b_g^N} \cdot S^N & i = \mathrm{N}. \end{cases} \tag{7.15b}$$

$$-\gamma_g^i = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i - r_{i+1}} D_g^{i+\frac{1}{2}} \cdot S^{i+\frac{1}{2}} & i \neq \mathrm{N}. \\ 0 & i = \mathrm{N}. \end{cases} \tag{7.15c}$$

$$\delta_g^i = \begin{cases} Q_g^{i+\frac{1}{2}} \cdot V^{i+} + Q_g^{i-\frac{1}{2}} \cdot V^{i-} & i \neq 1, N, \\ Q_g^{1+\frac{1}{2}} \cdot V^1 - \dfrac{c_g^1}{b_g^1} \cdot S^1 & i = 1, \\ Q_g^{N-\frac{1}{2}} \cdot V^N + \dfrac{c_g^N}{b_g^N} \cdot S^N & i = N. \end{cases} \tag{7.15d}$$

7.1.3. Differenzengleichung für Randpunkte

An den Stellen r_1 und r_N gelten Randbedingungen. Dadurch sind diese Punkte ausgezeichnet und erfordern eine gesonderte

Überlegung. Die Randbedingungen können allgemein in der Form

$$a_g^i \, \Phi_g(r_i) + b_g^i \, D_g^i \, \nabla \, \Phi_g(r_i) \, \boldsymbol{n} = c_g^i, \qquad i = 1, N \quad (7.16)$$

vorgegeben werden. Hierbei ist $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der Oberflächennormalen. Z. B. führen die Werte $a_g = 0$, $b_g = 1$, $c_g = 0$ auf die Symmetriebedingung $\nabla \Phi_g(r) \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Für $a_g = \frac{1}{4}$, $b_g = \frac{1}{2}$, $c_g = 0$ folgt aus (7.16) die Beziehung

$$\tfrac{1}{4} \, \Phi_g + \tfrac{1}{2} \, D_g \, \nabla \, \Phi_g \cdot \boldsymbol{n} = \tfrac{1}{4} \, \Phi_g + \tfrac{1}{2} \, D_g \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \Phi_g = 0.$$

Das ist die Randbedingung gegen Vakuum (vgl. (2.26)).

Gl. (7.16) ziehen wir zur Berechnung des Oberflächenintegrals über S^1 in (7.9) für den Fall $i = 1$ heran:

$$\int\limits_{V_1} \nabla \, D_g(r) \;\; \nabla \, \Phi_g(r) \; \mathrm{d}V = D_g^{1+\frac{1}{2}} \, S^{1+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_g(r_2) - \Phi_g(r_1)}{r_2 - r_1} - \\ - \frac{c_g^1}{b_g^1} S^1 + \frac{a_g^1}{b_g^1} \Phi_g(r_1) \, S^1 . \quad (7.17)$$

Bei den Volumintegralen (7.10–11) entfällt für $i = 1$ der erste Summand auf der rechten Seite.

Für den Randpunkt r_N gelten entsprechende Überlegungen. Die Ergebnisse für die Koeffizienten α_g, β_g, γ_g und δ_g sind in Gl. (7.15) enthalten.

7.1.4. Numerische Lösung der Differenzengleichungen

Gl. (7.14) stellt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $N \cdot G$ unbekannten Flußdichtewerten dar. Existieren Fremdquellen $Q_{0\,g}(r) \neq 0$ (s. (7.2)), so ist das Problem inhomogen. Es gibt für jedes λ eine nichttriviale Lösung. Für das homogene Problem $Q_{0\,g}(r) = 0$ gibt es nur für diskrete Eigenwerte λ eine Lösung. Für diese Werte λ wird die Determinante des Gleichungssystems Null. Die Flußdichten sind nur bis auf eine gemeinsame Konstante festgelegt. Diese Unbestimmtheit benutzen wir, um das Volumintegral über die Spaltquelle auf 1 zu normieren.

Eine direkte Lösung des Gleichungssystems (7.14) ist wegen seiner Größe nicht möglich. Hat man z. B. 50 Energiegruppen und 100 Gitterpunkte, so ist das System von 5000. Ordnung. Man ver-

wendet daher ein Iterationsverfahren zur Lösung. Für das homogene Problem läuft es z. B. nach dem folgenden Schema ab:

Man wählt eine einfache Ausgangsnäherung für die Spaltquellen, z. B. $Q_{fg}^{(0)}(r) = \text{const}$ (der hochgestellte Index gibt die Nummer der Iteration an) und bildet gemäß (7.11)

$$Q_f^{(0)} = \int_E \mathrm{d}E \int_V \mathrm{d}V\, Q_f^{(0)}(r, E) = \sum_g \int_V Q_{fg}^{(0)}(r)\, \mathrm{d}V.$$

$Q_{fg}^{(0)}$ wird so festgelegt, daß die Normierungsbedingung $Q_f^{(0)} = 1$ erfüllt ist.

Man wählt einfache Ausgangsnäherungen für λ und die Gruppenflußdichten, z. B. $\lambda^{(0)} = 1$ und $\Phi_g^{(0)}(r) = 0$.

Für diese Näherungswerte wird aus (7.14) eine Flußdichteverteilung $\Phi_g^{(1)*}(r)$ für eine einzelne Gruppe berechnet, wobei zur Berechnung von Q_{Sg}, soweit möglich, die zuletzt berechneten Flüsse und im übrigen die Ausgangswerte benützt werden. Die Rechnung beginnt bei $g = 1$, also der höchsten Energiegruppe. Das zu lösende Gleichungssystem für jede Energiegruppe hat Tridiagonalform. Es wird am einfachsten durch folgenden Algorithmus gelöst (vgl. (7.14)):

$$\Gamma_g^i = -\frac{\gamma_g^i}{\beta_g^i + \alpha_g^i\, \Gamma_g^{i-1}}, \tag{7.18}$$

$$\Omega_g^i = -\frac{\alpha_g^i\, \Omega_g^{i-1} + \delta_g^i}{\beta_g^i + \alpha_g^i\, \Gamma_g^{i-1}}. \tag{7.19}$$

Diese beiden Funktionen werden für $i = 1, 2, 3, \ldots N$ bestimmt. Anschließend wird daraus

$$\Phi_g^{(1)*}(r_i) = \Gamma_g^i\, \Phi_g^{(1)*}(r_{i+1}) + \Omega_g^i \tag{7.20}$$

für $i = N, N-1, \ldots, 2, 1$ berechnet.

Wenn alle Flußdichten berechnet sind, wird

$$Q_f^{(1)*}(r_{i-\frac{1}{2}}) = \lambda^{(0)} \sum_{g'} \nu_{g'}^{i-\frac{1}{2}} \cdot \Sigma_{fg'}^{i-\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{g'}^{(1)*}(r_i), \tag{7.21}$$

$$Q_f^{(1)*}(r_{i+\frac{1}{2}}) = \lambda^{(0)} \sum_{g'} \nu_{g'}^{i+\frac{1}{2}} \cdot \Sigma_{f,g'}^{i+\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{g'}^{(1)*}(r_i) \tag{7.22}$$

und

$$Q_f^{(1)*} = \sum_i \left[Q_f^{(1)*}(r_{i-\frac{1}{2}}) \cdot V^{i-} + Q_f^{(1)*}(r_{i+\frac{1}{2}}) \cdot V^{i+} \right] \tag{7.23}$$

gebildet. Hieraus erhält man den neuen Eigenwert

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} \cdot \frac{Q_f^{(0)}}{Q_f^{(1)*}}. \tag{7.24}$$

Vor Beginn der nächsten Iteration werden die Fluß- und Quelldichten mit dem Faktor $F^{(1)} = Q_f^{(0)}/Q_f^{(1)*}$ normiert.

$$\Phi_g^{(1)}(r_i) = F^{(1)} \cdot \Phi_g^{(1)*}(r_i), \tag{7.25}$$

$$Q_{fg}^{(1)} = F^{(1)} \cdot Q_{fg}^{(1)*} = 1. \tag{7.26}$$

Die Werte (7.24–26) dienen als Ausgangswerte für die nächste Iteration. Falls mehrere aufeinanderfolgende λ-Werte auf genügend viele Stellen übereinstimmen, wird die Iteration abgebrochen.

Wenn nur Abwärtsstreuung vorhanden ist, so vereinfacht sich das Schema. Es kann dann in einem Durchgang zur bekannten Quellenverteilung der Verlauf der Flußdichte berechnet werden.

Eine Erweiterung auf mehrdimensionale Probleme ist auf analoge Weise möglich (die Differenzenformeln für die Ableitungen sind z. B. in [18] zu finden). Jedoch sind hier die Flußdichten einer Energiegruppe nicht mehr simultan berechenbar. Bei der sog. Blockiteration werden die Flußdichten nacheinander entlang einer Gitterlinie zeilen- oder spaltenweise neu berechnet. Für Flußdichten in den Nachbarzeilen bzw. Nachbarspalten werden dabei Werte aus der vorhergehenden Iteration und, soweit berechnet, neue Werte benutzt [19]. Zweidimensionale Multigruppendiffusionsprogramme sind für die Berechnung moderner Leistungsreaktoren unerläßlich. Entsprechende Programme sind bei [20] angegeben.

7.2. Das Variationsverfahren und verwandte Methoden

In zunehmendem Maße gewinnen in der Reaktortheorie auch andere Näherungsverfahren an Bedeutung, die unter der Bezeichnung Flußsyntheseverfahren zusammengefaßt werden. Bei diesem Verfahren können die Lösungen mehrdimensionaler Probleme aus den Lösungen von Problemen, die eine geringere Anzahl von Dimensionen haben, aufgebaut werden. In den meisten Fällen kann gegenüber dem Differenzenverfahren Rechenzeit eingespart werden. Die Programme sind jedoch dem jeweiligen Problem, u. a. der Reaktorform, eng angepaßt und sind demzufolge nicht so vielseitig verwendbar.

7.2.1. Variationsrechnung

Die Variationsrechnung geht davon aus, daß man, anstatt ein System von Differentialgleichungen zu lösen, den Extremwert eines bestimmten zu den Differentialgleichungen gehörenden Funktionals aufsucht. Ein Vorteil der Umformung ist, daß unter bestimmten Voraussetzungen (Selbstadjungiertheit der Differentialgleichungen) über die Qualität von Näherungslösungen, z. B. das Konvergenzverhalten und das Vorzeichen des Fehlers, Aussagen gemacht werden können.

Das Variationsprinzip ist auf verschiedenen Wegen näherungsweise gelöst worden (s. z. B. [21]). Wir wollen uns an einem Beispiel klar machen, wie man beim Kantorowitsch-Verfahren vorgeht [22]. Es sollen Eigenwert und Flußdichteverteilung in einem ebenen Leichtwasserreaktor mit zwei teilweise eingefahrenen Steuerplatten bestimmt werden (s. Abb. 7.2). Der Reaktor sei in y-Richtung unendlich ausgedehnt. Für die Flußdichte im Gebiet i machen wir den Ansatz

$$\Phi_g^i(x, z) = \sum_{k=1}^{3} H_{gk}(x) \cdot Z_{gk}^i(z). \tag{7.27}$$

Die Funktionen $H_{gk}(x)$ sind die Lösungen der Diffusionsgleichungen für drei in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnte Schichten mit den geometrischen Querschnitten der Gebiete 1, 2, 3 in Abb. 7.2.

Die Funktionen $Z_{gk}^i(z)$ sind unbekannt. Sie geben an, wie die drei bekannten Funktionen „gemischt" werden müssen. Dieser Ansatz wird in ein den Gruppendiffusionsgleichungen (7.5)

$$\sum_{g'=1}^{G} M_{gg'}^i \, \Phi_{g'}^i(x, z) = Q_{0g}^i(x, z), \quad 1 \leq g \leq G \tag{7.28}$$

entsprechendes Variationsprinzip [22] eingesetzt und ergibt nach Durchführung der Variation ein System von Differentialgleichungen für die $Z_{gk}^i(z)$.

Diese Differentialgleichungen lassen sich auch ohne Verwendung des Variationsprinzips ableiten. Man setzt den Ansatz (7.27) direkt in die Gruppendiffusionsgleichungen (7.28) ein und multipliziert von links mit einer Gewichtsfunktion $H_{gk}^*(x)$. Die $H_{gk}^*(x)$ sind die Lösungen der zu den eindimensionalen Gruppendiffusionsgleichungen adjungierten Gleichungen ($M_{gg'}$ ist durch $M_{g'g}^*$ ersetzt) für die

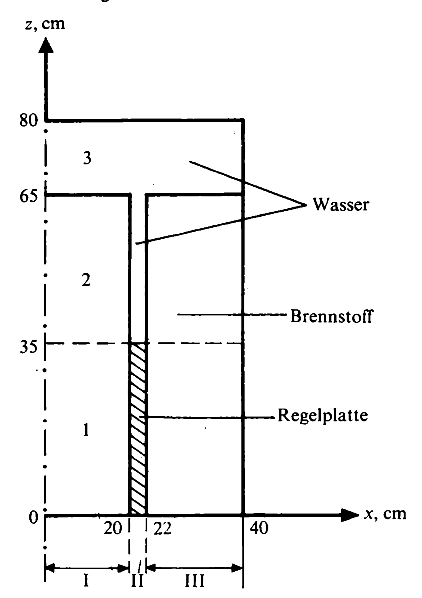


Abb. 7.2: **Plattenreaktor mit halb eingefahrenen Steuerplatten.**

Gebiete 1, 2 und 3. Dann werden die Gleichungen über x integriert*. Man kann die resultierenden, nur von z abhängigen Differentialgleichungen im Gegensatz zu den differentiellen Bilanzgleichungen (7.28) als gewichtete, integrale Bilanzgleichungen interpretieren. Die Verknüpfungen der $Z^i_{gk}(z)$ für verschiedene i ergeben sich, wenn man an jeder Grenzfläche die Ströme der beiden angrenzenden Gebiete mit den Gewichtsfunktionen $H^*_{gk}(x)$ multipliziert und die über den Querschnitt integrierten Werte gleichsetzt. Dieses Differentialgleichungssystem für die $Z^i_{gk}(z)$ muß nun unter Berücksichtigung der bekannten Randbedingungen (2.27, 30) gelöst werden.

Die gute Übereinstimmung mit dem Differenzenverfahren ist aus Tab. 7.1 abzulesen, in der die Eigenwerte der Zweigruppentheorie für das Beispiel aus Abb. 7.2 nach der Differenzen- und der Variationsrechnung zusammengestellt sind. In Abb. 7.3 sind die schnellen und die thermischen Flußdichten entlang der Mitte der Regelplatte ($x = 21$ cm) aufgetragen. Trotzdem an dieser Stelle die

* Wegen der Unstetigkeit von D an den Grenzflächen müssen bei der Integration des Diffusionsglieds besondere Vorsichtsmaßnahmen getroffen werden.

größten Flußverzerrungen auftreten, ist die Übereinstimmung zwischen den beiden Näherungsverfahren gut.

Eine eingehende Beschreibung der Anwendung des Variationsverfahrens in der Reaktortheorie, insbesondere auch die Erweiterung des Kantorowitsch-Verfahrens auf Reaktoren mit komplizierter Geometrie, ist bei SCHÄFFLER [23] zu finden.

7.2.2. Verwandte Methoden

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Methode zur Ableitung der Näherungsgleichungen läßt sich auch dann durchführen, wenn man anstelle der $H^*_{gk}(x)$ andere Gewichtsfunktionen verwendet.

Der Variationsrechnung kommt die Galerkinsche Methode am nächsten. Als Gewichtsfunktion wird hier $H_{gk}(x)$ verwendet. Der Rechenaufwand ist kleiner als bei der Variationsrechnung, da die Bestimmung der $H^*_{gk}(x)$ wegfällt.

Eine weitere Vereinfachung bringt die „region-balance"-Methode. Hier wird der Reaktorquerschnitt unterteilt. Für jeden Teilbereich wird eine Gewichtsfunktion angenommen, die innerhalb des Teilbereichs 1 und außerhalb 0 ist. Man erreicht dadurch, daß in diesen Teilbereichen die integrale Neutronenbilanz erfüllt ist.

Eine besonders einfache Definition der Gewichtsfunktion ist die δ-Funktion $\delta(x-x_i)$. In diesem Fall ist die Neutronenbilanz nur an diskreten Punkten x_i erfüllt, daher der Name „multiple-spot"-Methode.

In Tab. 7.1 sind die Eigenwerte der 3 erwähnten Verfahren mit denen der Differenzen- und Variationsrechnung verglichen. Bei der

Tab. 7.1: Eigenwerte nach verschiedenen Flußsyntheseverfahren (nach [22]).

Methode	Eigenwert
Differenzenverfahren	1,0171
Variationsmethode	1,0152
Galerkin	1,0156
region-balance	1.0153
three-spot	1,0282

„region-balance"-Methode wurden 3 Teilgebiete verwendet (s. Abb. 7.2), bei der „multiple-spot"-Methode 3 Punkte ($x = 9, 21, 30$ cm).

Abb. 7.3 bringt den Vergleich der schnellen bzw. thermischen Flußdichten nach den verschiedenen Verfahren. Die Werte nach

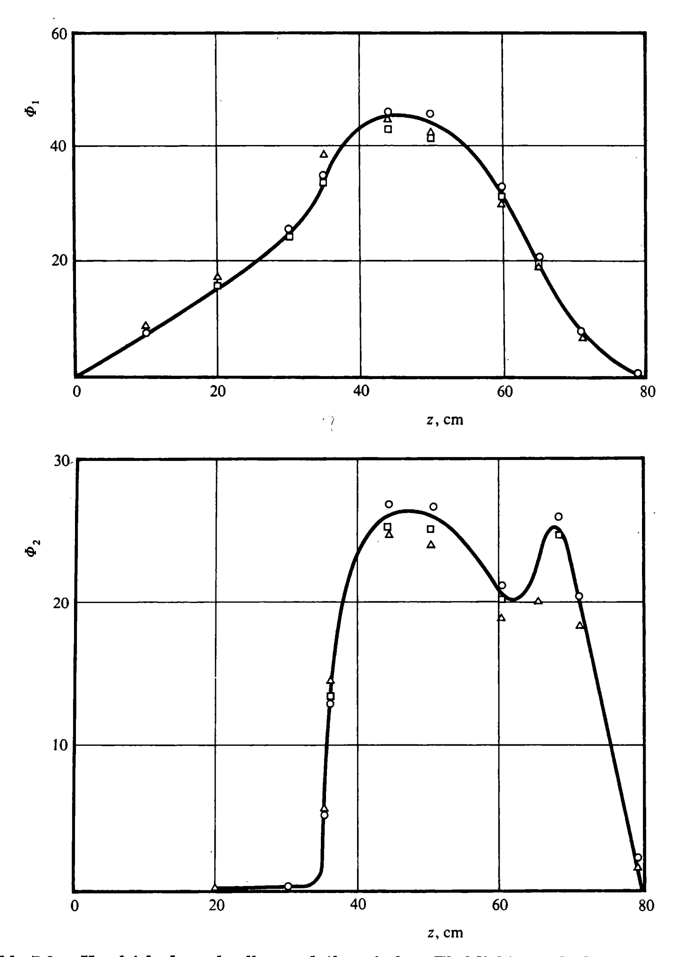


Abb. 7.3: Vergleich der schnellen und thermischen Flußdichte nach der Variationsrechnung (○), der „region-balance"-Methode (□) und der „three-spot"-Methode (△) mit nach der Differenzenrechnung bestimmten Flußdichteverläufen (ausgezogen) (nach [22]). Die Werte nach der Galerkin-Methode fallen innerhalb der Zeichengenauigkeit mit denen der Variationsrechnung zusammen.

der Galerkin-Methode stimmen mit denen der Variationsrechnung innerhalb der Zeichengenauigkeit überein. Die Werte der „region-balance"-Methode sind, verglichen mit dem Differenzenverfahren, ungefähr gleich genau wie die der Variationsrechnung, während bei der „three-spot"-Methode erwartungsgemäß größere Abweichungen, besonders an den Gebietsgrenzen, auftreten,

8. Der heterogene Reaktor

8.1. Gesichtspunkte für die nukleare Auslegung

Wir betrachten als Beispiel einen Leichtwasser-Leistungsreaktor. Das Verhältnis von Moderator- zu Brennstoffvolumen wird so gewählt, daß bei einer Abnahme der Wasserdichte die Multiplikationskonstante abnimmt. Das ist für eine Selbststabilisierung des Reaktors bei Leistungsüberschlägen Voraussetzung. Für Spaltstoffanreicherungen um 3% ^{235}U liegt ein günstiges Verhältnis bei $V^{H_2O}/V^{UO_2} \approx 2$ (s. Abb. 8.1).

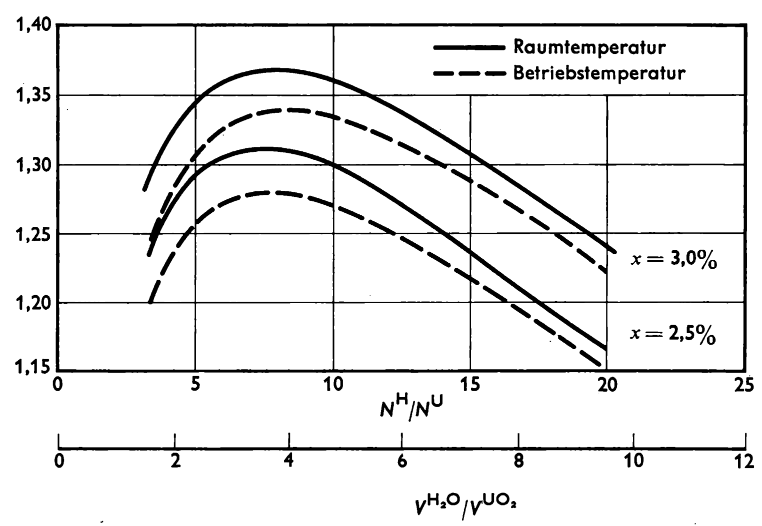


Abb. 8.1: Die Multiplikationskonstante k_∞ für einen schwach angereicherten Leichtwasserreaktor in Abhängigkeit vom Verhältnis V^{H_2O}/V^{UO_2} (nach [25]). x ist der Anreicherungsgrad des ^{235}U in Atom-%.

Bei festgelegtem Verhältnis V^{H_2O}/V^{UO_2} wird der Durchmesser der Brennstoffstäbe nicht nach nuklearen Gesichtspunkten, sondern nach solchen der Wärmetechnik und der Fertigungskosten festgelegt. Von der Wärmetechnik sind zwei Grenzwerte vorgegeben: einmal die Schmelztemperatur des UO_2 von $T_S = 2800\,°C$ im Zentrum des Stabes, zum anderen die maximale Wärmestromdichte (Heizflächenbelastung) q auf der Oberfläche des Brennstoffstabes. Eine zu hohe Wärmestromdichte kann zur Bildung eines Dampffilmes auf der Oberfläche des Brennstoffstabes führen (Filmsieden). Die Wärmeisolierung durch den Dampffilm und die damit verbundene Temperaturerhöhung führt u. U. zum „Durchbrennen" der Hüllrohre. Bei einem Druckwasserreaktor sollte daher eine Wärmestromdichte von $q_{max} = 200\,W/cm^2$ nicht überschritten werden. Nehmen wir eine über den Stabradius gemittelte Leistungsdichte von $P_V(z)\,W/cm^3$ im Brennstoff an, und ist a der Radius des zylindrischen Brennstoffstabes, so muß für die Stableistung je cm Höhe an der Stelle der größten Wärmebelastung (meist im Zentrum der Spaltzone)

$$\pi a^2 P_V \leq 2 \pi a \cdot q_{max}$$

oder

$$\frac{a P_V}{2} \leq q_{max} \tag{8.1}$$

gelten. Als Folge der schlechten Wärmeleitung des UO_2 treten hohe Temperaturen im Zentrum der Brennstoffstäbe auf. Aus der Wärmestromdichte $-\lambda(T)\,dT/dr$ an einer Stelle r im Innern des Stabes und der r-unabhängig angenommenen Leistungsdichte P_V ergibt sich folgende Wärmebilanz:

$$\pi r^2 P_V = -2 \pi r \lambda(T) \frac{dT}{dr}. \tag{8.2}$$

Durch Integration über den ganzen Stab erhält man hieraus für den Grenzfall, daß die Zentraltemperatur gerade die Schmelztemperatur erreicht

$$\frac{P_V a^2}{4} \leq \int_{T_a}^{T_S} \lambda(T)\,dT. \tag{8.3}$$

Bei einer Oberflächentemperatur des Brennstoffs von $T_a = 500\,°C$ und $T_S = 2800\,°C$ liegt das Wärmeleitfähigkeitsintegral (8.3) für UO_2 in der Größe von 50 W/cm [24].

Durch Wahl sehr dünner Stäbe könnte man unter Einhaltung der Grenzbedingungen (8.1, 3) hohe Leistungsdichten im Brennstoff und damit einen geringen Brennstoffeinsatz je kW Leistung erzielen. Mit zunehmender Brennstoffaufteilung steigen jedoch die Fertigungskosten. Hohe Leistungsdichten ergeben in Anbetracht des Abbrands eine kurze Einsatzdauer des Brennstoffs. Ein Minimum für die Gesamtbrennstoffkosten liegt bei Leichtwasserreaktoren um $a = 0{,}5$ cm Stabradius [25].

Aus (8.1) folgt mit $a = 0{,}5$ cm als obere Grenze der zulässigen lokalen Leistungsdichte im Brennstoff $P_{max} = 2\,q_{max}/a = 800\,W/cm^3$. Bei einem Verhältnis von maximaler zu mittlerer Leistungsdichte von $F_P \approx 3$ (F_P heißt Kühlkanalfaktor für die Leistungsdichteverteilung) und $V^{H_2O}/V^{UO_2} \approx 2$, d. h. $(V^{H_2O} + V^{UO_2})/V^{UO_2} \approx 3$ ergibt sich mit einem Sicherheitsfaktor von 1,2 (maximale Überlast $\approx$ 1,2 · Nennlast) als mittlere Leistungsdichte für die Spaltzone $P'_V = 800/3 \cdot 3 \cdot 1{,}2\,W/cm^3 \approx 70\,W/cm^3$. Ein Druckwasserreaktor mit einer Wärmeleistung von $P = 1000$ MW muß danach eine Spaltzone von $V = P/P'_V = 14\,m^3$ besitzen. Wählt man die Höhe der Spaltzone etwa gleich dem Durchmesser, so liegen damit die Abmessungen der Spaltzone und der Brennelemente für eine gewünschte Gesamtleistung P fest.

Um den Reaktor anfahren und über längere Zeit betreiben zu können, muß zu Anfang eine bestimmte Reaktivität $\varrho = (k-1)/k > 0$ eingebaut und durch Steuerstäbe kompensiert werden. Die Größe der erforderlichen Reaktivität ergibt sich aus der Änderung der Multiplikationskonstante beim Anfahren (vgl. Aufgaben zu Abschn. III. 4 und IV. 4) und aus einer Berechnung des Langzeitverhaltens (s. Band II). Aus Abb. 8.1 ist zu ersehen, wie die Reaktivität unter Wahrung der Gitterabmessungen allein durch Erhöhung der Spaltstoffanreicherung vergrößert werden kann.

8.2. Numerische Berechnung der Neutronenverteilung und Reaktivität im heterogenen Reaktor

Die Spaltzone eines Leistungsreaktors enthält naturgemäß eine Vielzahl von Bauelementen wie Brennstoffstäbe und Strukturmaterial. Die Heterogenität wird im allgemeinen dadurch erhöht, daß die Steuerstäbe nur zum Teil eingefahren sind.

Eine Vielgruppenrechnung für den dreidimensionalen heterogenen Reaktor würde zu hohe Rechenzeiten und -kosten erfordern. Man homogenisiert daher einen Teil der Heterogenitäten und reduziert das dreidimensionale Problem durch Einführung plausibler Flußwölbungen B^2 auf zwei- und eindimensionale Diffusionsprobleme.

8.2.1. Homogenisierung der Brennstoffzelle

Die von der Brennstoffzelle (Brennstoffstab mit anteiligem Moderator) herrührende Heterogenität kann näherungsweise nach dem in Abschn. IV. 4.3 für unendlich ausgedehnte Brennstoffgitter beschriebenen Verfahren homogenisiert werden. Das Ergebnis für die Wirkungsquerschnitte ist durch (IV. 4.11) ausgedrückt. Es gilt für eine Gruppe g:

$$\Sigma_g = \frac{\sum_i V^i \Sigma_g^i \Phi_g^i}{\sum_i V^i \Phi_g^i}. \tag{8.4}$$

Im Bereich der schnellen Neutronen ist die Flußdichte im Brennstoff und Moderator annähernd gleich. Daher tritt lediglich der Volumanteil von Brennstoff und Moderator als Gewichtsfaktor bei der Homogenisierung auf. Im Bereich der langsamen Neutronen und der Resonanzneutronen muß dagegen auch die Flußabsenkung im Brennstoffstab berücksichtigt werden.

Die räumlich gemittelten Flußdichten Φ_g^i für die Gebiete $i = 1,2$ der Brennstoffzelle können aus den Vielgruppen-Erststoßgleichungen (IV. 4.2) z. B. mit dem Programm THERMOS [26] oder aber auch durch Handrechnungen aus Formeln wie (IV. 4.9) für jede einzelne Energiegruppe gewonnen werden. Die hierzu notwendigen Vielgruppenquerschnitte (für etwa 50 Energiegruppen im Bereich der langsamen Neutronen) können Wirkungsquerschnittssammlungen entnommen oder nach den in Kap. III und IV beschriebenen Methoden berechnet werden.

Für den mittleren Diffusionskoeffizienten im homogenisierten Brennstoffgitter hat man nach [27] in erster Näherung

$$D_g = \frac{\sum_i V^i \Phi_g^i \bar{\lambda}_{\mathrm{tr}\,g}^i}{3 \sum_i V^i \Phi_g^i} \tag{8.5}$$

mit

$$\bar{\lambda}^{i}_{\mathrm{tr}\,g} = \sum_{k} P^{ik*}_{g} \lambda^{k}_{\mathrm{tr}\,g} \tag{8.6}$$

zu setzen. Dabei ist P^{ik*}_{g} die in Abschn. III. 4.1.2 definierte Erststoßwahrscheinlichkeit für die Gruppe g.

8.2.2. Berechnung von Neutronenspektren und Weniggruppenquerschnitten

Um verläßliche Werte für die Multiplikationskonstante oder Reaktivität des Reaktors zu bekommen, müssen gewöhnlich zweidimensionale Gruppendiffusionsrechnungen für Zylindergeometrie durchgeführt werden. Eine zweidimensionale Vielgruppenrechnung ist aber selbst für den homogenisierten Reaktor noch zu aufwendig. Man muß daher aus den Vielgruppenquerschnitten mit Hilfe eines geeigneten Neutronenspektrums Weniggruppenquerschnitte ermitteln und mit diesen dann die zweidimensionalen Weniggruppendiffusionsgleichungen für den endlichen Reaktor lösen.

Das Neutronenspektrum zur Bestimmung der Weniggruppenquerschnitte aus den Vielgruppenquerschnitten hängt neben der Materialzusammensetzung auch von den Leckverlusten der Neutronen ab (insbesondere bei kleinen Reaktoren). Man bestimmt daher das Neutronenspektrum zur Berechnung der Weniggruppenquerschnitte gewöhnlich aus einer eindimensionalen Vielgruppendiffusionsrechnung z. B. in r-Richtung unter Annahme einer passenden Flußwölbung in z-Richtung

$$\Delta \Phi_g = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Phi_g - B^2_{z\,g}\,\Phi_g . \tag{8.7}$$

Bei großen Reaktoren mit sehr kleiner Flußwölbung genügt gewöhnlich eine „nulldimensionale“ Spektrumsberechnung wie beim unendlich ausgedehnten Medium. Die Leckverluste werden in diesem Fall näherungsweise durch ein Glied $D_g(B^2_{r\,g} + B^2_{z\,g})\,\Phi_g$ als fiktive Absorptionsverluste behandelt. Als Materialkonstanten werden in die Vielgruppendiffusionsgleichungen die Gruppenkonstanten (8.4–6) der homogenisierten Brennstoffzelle eingesetzt.

Bei Wasserstoff ist die Diffusionstheorie wegen der starken Vorwärtsstreuung im allgemeinen nicht ausreichend. Um sie bei Berechnung der Neutronenspektren und Weniggruppenkonstanten für das endliche Medium berücksichtigen zu können, sollte eine

P_1-Approximation der Transportgleichung (s. Kap. VI) zugrunde-gelegt werden.

8.2.3. Die Reaktivität der Spaltzone und einzelner Steuerstäbe

Mit den Weniggruppenkonstanten können nun nach einem Differenzenverfahren (s. Abschn. 7) zweidimensionale Weniggruppenrechnungen, z. B. in (r, z)-Geometrie, zur Bestimmung des Flußdichteverlaufs und der Reaktivität im endlichen Reaktor durchgeführt werden. Die Reaktivität hängt mit dem Eigenwert λ des Differenzenverfahrens wie folgt zusammen

$$\varrho = \frac{k-1}{k} = \frac{1/\lambda - 1}{1/\lambda} = 1 - \lambda. \tag{8.8}$$

Sind für den Reaktor nur wenige Steuerstäbe erforderlich (wie z. B. bei Graphitreaktoren), so können die Stäbe als Gebiete in einer zweidimensionalen Gruppendiffusionsrechnung in (x, y)- oder (r, φ)-Geometrie berücksichtigt werden, wobei eine Flußwölbung in z-Richtung angenommen wird. Die Steuerstäbe werden im Bereich der thermischen Neutronen als „schwarz" über die bekannte Randbedingung (2.27)

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n} = -\frac{\Phi}{d} \tag{8.9}$$

berücksichtigt (die Flächennormale sei stets in den schwarzen Körper hinein gerichtet). Beträgt der Eigenwert für die (x, y)-Rechnung ohne Stäbe λ und für die (x, y)-Rechnung mit Stäben λ', so gilt für den Reaktivitätswert der Stäbe

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{k' - k}{k} = \frac{1/\lambda' - 1/\lambda}{1/\lambda}. \tag{8.10}$$

8.2.4. Spaltzone mit Steuerstabgitter

Bei Druck- und Siedewasserreaktoren, die ein ganzes Gitter aus Steuerstäben oder -kreuzen enthalten, wird gewöhnlich vor der Berechnung des Reaktors als Ganzes die Steuerzelle, der kleinste charakteristische Ausschnitt aus dem Steuerstabgitter (Beispiel s. Abb. 8.2), homogenisiert (zweite Homogenisierung). Zu diesem

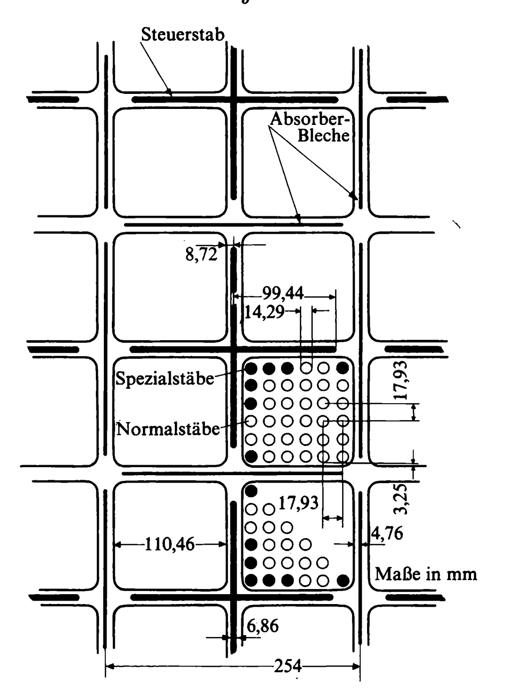


Abb. 8.2: Ausschnitt aus der Spaltzone des Siedewasserreaktors Gundremmingen (nach [28]).

Zweck muß die Absorptionsrate im Steuerstab ermittelt werden. Dies kann näherungsweise mit einer zweidimensionalen Diffusionsrechnung in der Steuerzelle eines unendlich ausgedehnten Gitters aus Steuerstäben geschehen. Eine solche Rechnung sollte mit mehreren Gruppen (mindestens mit einer thermischen, einer epithermischen und einer schnellen) durchgeführt werden, damit der Einfluß der Steuerstäbe auf das Neutronenspektrum und die Reaktionsraten bis zu einem gewissen Grade richtig erfaßt werden können. Als Wirkungsquerschnitte dienen näherungsweise die homogenisierten Weniggruppenkonstanten des Brennstoffgitters. Auf dem Rand der schwarzen Gebiete (Regelstab, -kreuz, ,,Vergiftungsstreifen'', s. Abb. 8.2) wird die Randbedingung (8.9), auf den übrigen Rändern der Steuerzelle näherungsweise die Symmetriebedingung $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}n = 0$ gefordert. Die Absorptionsrate in den Steuerstäben

und Vergiftungsstreifen ergibt sich aus dem Neutronenstrom in den Absorber. Die Homogenisierung der Steuerzelle wird analog zu (8.4–6) durchgeführt, so daß die Reaktionsraten und die Diffusionskonstanten des Steuerstabgitters erhalten bleiben.

Nach der Homogenisierung des Steuerstabgitters kann näherungsweise die Wirkung teilweise eingefahrener Ringe von Steuerstäben mit einem Weniggruppenverfahren in (r, z)-Geometrie berechnet werden, indem der Steuerstabring als homogenes Diffusionsgebiet betrachtet wird. Von Interesse ist dabei einmal der Reaktivitätswert der teilweise eingefahrenen Steuerstäbe, zum anderen die Verzerrung der Fluß- und Leistungsdichte in der Spaltzone infolge der Steuerstäbe. Abb. 8.3 zeigt als Beispiel den Verlauf der Leistungsdichte in einem Druckwasserreaktor bei halbeingefahrenen zentralen Steuerstäben. Der relativ flache Verlauf der Leistungsdichte in radialer Richtung wird durch eine nach außen zunehmende Spaltstoffanreicherung erreicht (Zone 1: 2,5%, Zone 2: 2,88%, Zone 3: 3,5%, Zone 4: 4,33%).

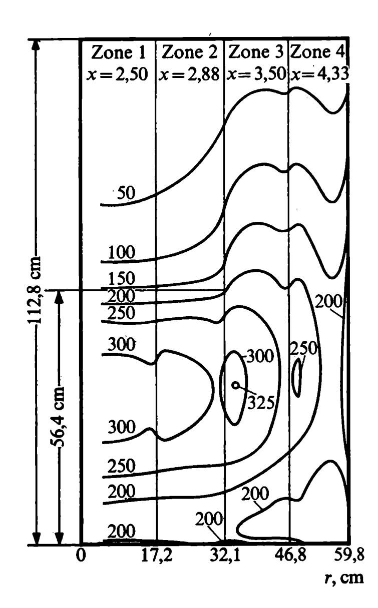


Abb. 8.3: Linien konstanter Leistungsdichte im Druckwasserreaktor für die „Otto Hahn" bei halbeingefahrenen zentralen Steuerstäben. x = Anreicherungsgrad für die verschiedenen Zonen [29].

8.2.5. Leistungsverteilung in Spaltzone und Brennelement

Aus den Flußdichteverläufen und der Spaltstoffverteilung können die Bereiche mit höchster Wärmebelastung, die Heißstellen, ermittelt werden. Die Gesamtleistung des Reaktors ist dadurch begrenzt, daß die Leistungsdichte an den Heißstellen bestimmte, materialabhängige Grenzwerte nicht überschreiten darf (s. Abschn. 8.1).

Ist der Bereich höchster Leistungsdichte in der homogenisierten Spaltzone bekannt, so muß hier auch die Feinstruktur innerhalb des Brennelements untersucht werden, um den höchst belasteten Brennstoffstab und die Höhe der lokalen Abweichung vom Mittelwert im Brennelement herauszufinden.

Wird z. B. ein Steuerkreuz (Abb. 8.2) gezogen, so entsteht zwischen den Brennelementen ein Wasserspalt, in dem sich eine hohe Neutronenflußdichte aufbaut. Die angrenzenden Brennstoffstäbe können dadurch sehr heiß werden. Beim Siedewasserreaktor nach Abb. 8.2 ist daher der Brennstoff in den betreffenden Stäben weniger hoch angereichert.

9. Kritikalitätsdaten

Im folgenden sind kritische Massen von nackten und reflektierten Kugelreaktoren verschiedener Zusammensetzung verglichen, um ein anschauliches Bild vom Einfluß der Brennstoffe, Brutstoffe, Moderatoren und Reflektoren auf die Kettenreaktion zu geben.

Die Abb. 9.1 zeigt die kritische ^{235}U-Masse von unreflektierten Kugeln verschiedener Spaltstoff-Moderator-Verhältnisse für 93-prozentiges ^{235}U und verschiedene Moderatoren (H_2O, D_2O, Be-BeO, Graphit). Die kritische Masse einer Kugel aus hochangereichertem Uran (93%) beträgt etwa 50 kg. Sie stellt einen schnellen Reaktor dar. Zugabe von Moderatoren (Kühlmittel) erhöht die kritische Masse des schnellen Reaktors. Bei Steigerung der Moderation entstehen epithermische und thermische Reaktoren, die wegen der höheren Wirkungsquerschnitte im Bereich der thermischen Neutronen mit einer wesentlich geringeren Uranmenge kritisch werden. Die kleinste kritische Masse (etwa 1 kg) hat der hochangereicherte leichtwassermoderierte thermische Reaktor.

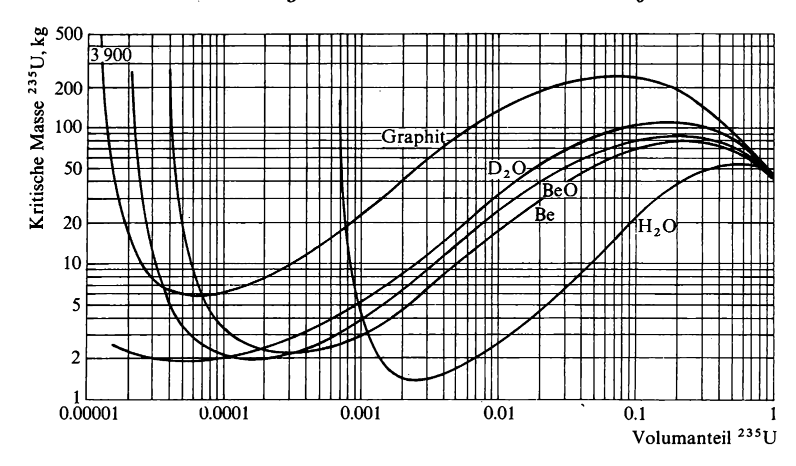


Abb. 9.1: Kritische Masse nackter ^{235}U-Kugeln mit verschiedenen Moderatoren in Abhängigkeit vom Volumanteil des ^{235}U (nach [30]). Der Uranbrennstoff enthält 93 Atomprozente ^{235}U.

In den Abb. 9.2–4 ist für verschiedene Spaltstoffe (^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu) die kritische Masse von nackten und reflektierten Kugelreaktoren mit verschiedenen Mischungen von Spaltstoff und leich-

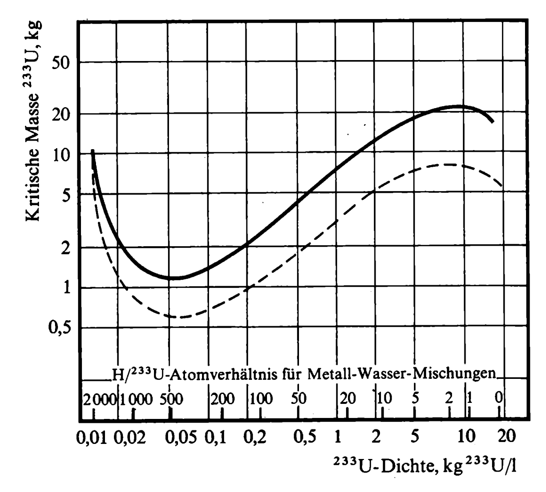


Abb. 9.2: Kritische Masse für nackte (ausgezogen) und wasserreflektierte (gestrichelt) Kugelreaktoren mit einer Spaltzone aus ^{233}U und Wasser in Abhängigkeit vom Verhältnis N^{H}/N^{233} (nach [30]).

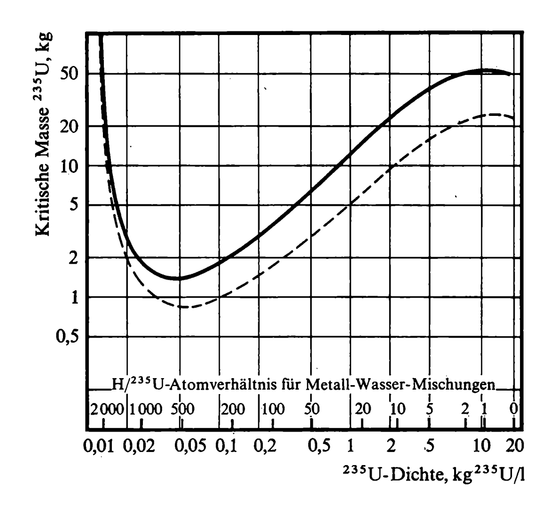


Abb. 9.3: Kritische Masse für nackte (ausgezogen) und wasserreflektierte (gestrichelt) Kugelreaktoren mit einer Spaltzone aus ^{235}U und Wasser in Abhängigkeit vom Verhältnis N^{H}/N^{235} (nach [30]).

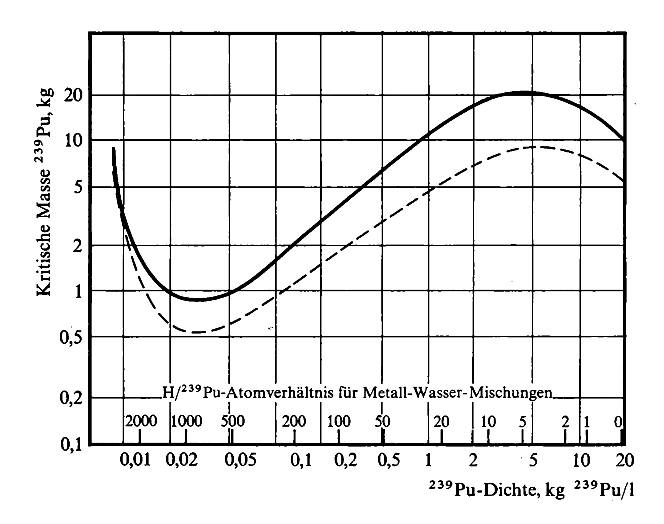


Abb. 9.4: Kritische Masse für nackte (ausgezogen) und wasserreflektierte (gestrichelt) Kugelreaktoren mit einer Spaltzone aus ^{239}Pu und Wasser in Abhängigkeit vom Verhältnis N^{H}/N^{239} (nach [30]).

tem Wasser dargestellt. ^{239}Pu führt sowohl im schnellen wie im thermischen Reaktor zu den kleinsten kritischen Massen. ^{233}U ist dagegen im epithermischen Bereich den beiden anderen Spaltstoffen überlegen.

Den Einfluß des ^{238}U auf die kritische ^{235}U-Masse gibt Abb. 9.5 wieder. Die Gewichtsprozente ^{235}U im U-Brennstoff dienen als Parameter. Aus der Abbildung geht hervor, daß schon geringe Anreicherungen des Spaltstoffs ^{235}U die kritische Masse beträchtlich reduzieren, dagegen höchste Anreicherungen nur wenig Gewinn bringen. Dem entspricht die Verwendung schwach angereicherten Urans in den üblichen thermischen Leichtwasser-Leistungsreaktoren.

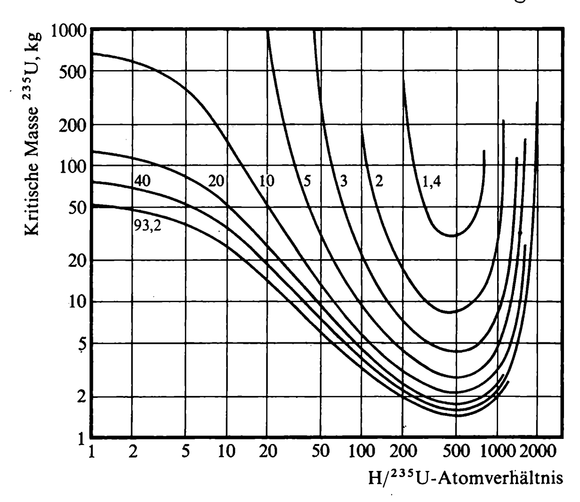


Abb. 9.5: Kritische Masse nackter ^{235}U-^{238}U-H_2O-Kugeln in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis H/^{235}U für verschiedene Anreicherungsgrade (nach [30]). Die Zahlen an den Kurven geben die Atomprozente des ^{235}U im Brennstoff an.

Die Abb. 9.6–7 zeigen schließlich die kritischen Massen schneller Reaktoren mit verschiedenen Mischungen von Spaltstoff und Brutstoff sowie Beimengungen von Strukturmaterial und Kühlmittel. In reinem Uran (Kurve C) muß nach Abb. 9.6 das Isotop ^{235}U auf etwa 7 % angereichert werden, damit eine Kettenreaktion gerade eben möglich ist. 10 % Anreicherung mit Pu sind nach Abb. 9.7 für einen schnellen Brutreaktor bereits für die Praxis diskutabel. Die Kurven A und B beider Abbildungen zeigen, daß Strukturmaterial und Kühlmittel die kritische Masse ganz beträchtlich erhöhen.

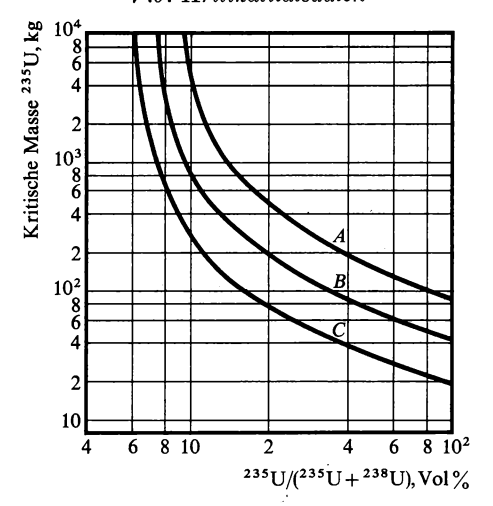


Abb. 9.6: Kritische Masse von schnellen Kugelreaktoren in Abhängigkeit von der Mischung aus Spaltstoff ^{235}U und Brutstoff ^{238}U (nach [31]). Zusammensetzung der Spaltzone: A: 25 Vol.-% U, 50 Vol.-% Na, 25 Vol.-% Stahl;
B: 50 Vol.-% U, 33 Vol.-% Na, 17 Vol.-% Stahl;
C: 100 Vol.% U.
Die Spaltzone ist von einem 50,8 cm dicken Reflektor aus 40 Vol.-% abgereichertem U, 40 Vol.-% Natrium und 20 Vol.-% Stahl umgeben.

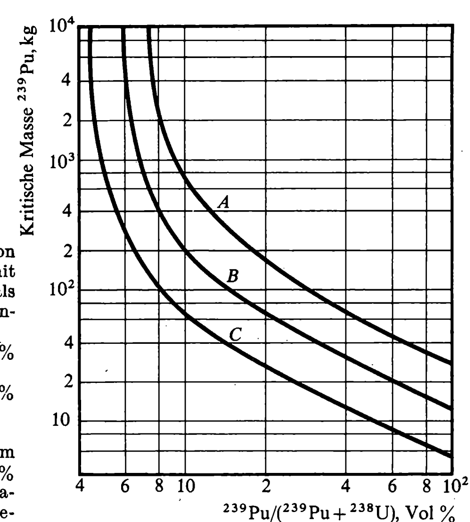


Abb. 9.7: Kritische Masse von schnellen Kugelreaktoren mit ^{239}Pu als Spaltstoff und ^{238}U als Brutstoff (nach [31]). Zusammensetzung der Spaltzone:
A: 25 Vol.-% (Pu + U), 50 Vol.-% Na, 25 Vol.-% Stahl;
B: 50 Vol.-% (Pu + U), 33 Vol.-% Na, 17 Vol.-% Stahl;
C: 100 Vol.-% (Pu + U).
Die Spaltzone ist von einem 50,8 cm dicken Reflektor aus 40 Vol.-% abgereichertem U, 40 Vol.-% Natrium und 20 Vol.-% Stahl umgeben.

Literaturverzeichnis

[1] Reactor physics constants. ANL-5800, Sec. Ed., 1963.
[2] DAVISON, B., and S. A. KUSHNERIUK: Linear extrapolation length for a black sphere and a black cylinder. MT-214 (1946).
[3] GOLDSTEIN, H., J. C. SULLIVAN, R. R. COVEYOU, W. E. KINNEY, and R. R. BATE: Calculation of neutron age in H_2O and other materials. ORNL-2639 (1961).
[4] WEINBERG, A. M., and E. P. WIGNER: The physical theory of neutron chain reactors. The University of Chicago Press, 1958.
[5] LAMARSH, J. R.: Introduction to nuclear reactor theory. Addison-Wesley Publ. Com., 1966.
[6] INÖNÜ, E.: On the definition of the extrapolated surface for bare homogeneous thermal reactors. Proc. Sec. United Nations Int. Conf., Geneva 1958, Vol. 16, p. 701.
[7] NORDHEIM, L. W., and R. SCALETTAR: Theory of pile control rods. MDDC–42 (1946) und Phys. Rev. **70**, 115 (1946).
[8] JAHNKE, E., F. EMDE und F. LÖSCH: Tafeln höherer Funktionen. Teubner Stuttgart, 1960.
[9] MURRAY, R. L., and J. W. NIESTLIE: Reactor control rod theories. Nucleonics **13**, Feb. 18 (1955).
[10] MURRAY, R. L., W. T. PRICE, and S. H. BIRKEN: Control rod theory for asymmetrical arrays and reflected cores. Nucl. Sci. Eng. **8**, 254 (1960).
[11] HURWITZ, H., and G. M. ROE: Absorption of neutrons by black control rods J. Nucl. Energy **2**, 85 (1955).
[12] WINTERBERG, F.: Ungleichförmige Brennstoffverteilung in Reaktoren zur Erzeugung konstanter Leistungsdichte pro Volumeneinheit. Atomkernenergie **2**, 456 (1957).
[13] GLUSHKOV, E. S., E. I. INYUTIN, U. P. KOCHERGIN, I. P. MARKELOV, G. I. MARCHUK, N. N. PONOMAREV-STEPNOY, and V. A. CHUYANOV: Some aspects of power reactor optimization by nonuniform material distribution. Third United Nations Int. Conf., Geneva 1964, Vol. 3, p. 355.
[14] RAVETS, J. M., and J. R. LAMARSH: Flat flux by nonuniform moderation. Nucl. Sci. Eng. **7**, 496 (1960).
[15] GOERTZEL, G.: Minimum critical mass and flat flux. J. Nucl. Energy **2**, 193 (1956).
[16] WILKINS, J. E. jr.: Minimum total mass. Nucl. Sci. Eng. **6**, 229 (1959).
[17] ANDERSSON, C. I. G.: Semianalytical and seminumerical calculations of optimum material distributions. Nukleonik **5**, 185 (1963).
[18] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag Berlin, 1955.
[19] WACHSPRESS, E. L.: Iterative solution of elliptic systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
[20] HASSIT, A.: A computer program to solve the multi-group diffusion equations (CRAM). TRG Report 229 (R), 1962.
SIEGERT, H. J., und K. KUNERT: DIFFU, ein 2-dimensionales Multigruppendiffusionsprogramm. Programmbibliothek des Instituts für Kernenergetik, Universität Stuttgart, 1966.
[21] KANTOROWITSCH, L. W., und W. I. KRYLOW: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1956.
[22] KAPLAN, S.: Some new methods of flux synthesis. Nucl. Sci. Eng. **13**, 22 (1962).
[23] SCHÄFFLER, H.: Ein modifiziertes Kantorowitsch-Verfahren zur diffusionstheoretischen Berechnung von Reaktoren mit komplizierter Geometrie. Nukleonik **6**, 358 (1964).
SCHÄFFLER, H.: Berechnung nichtseparierbarer Reaktorgeometrien mit dem erweiterten Flußsyntheseverfahren. Nukleonik **11**, 91 (1968).
[24] LYONS, M. F., R. L. STRALEY, D. H. COPLIN, B. WIEDENBAUM, and T. J. PASHOS: UO_2 thermal conductivity at elevated temperatures. Trans. ANS **6** (1), 152 (1963).
[25] FREWER, H., G. LEPIE und A. MARTIN: Die Auslegung von Druckwasser-Kernkraftwerken. Brennstoff-Wärme-Kraft **19**, 513 (1967).

[26] HONECK, H. C.: THERMOS, a thermalization transport code for reactor lattice calculations. BNL-5826 (1961).
[27] BENOIST, P.: Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités. CEA-R 2278 (1964).
[28] SCHMALE, H., W. SCHIEBER, L. S. RICHARDSON und W. B. BIGGE: Kernkraftwerk Grundremmingen. Der Reaktor. Atomwirtschaft **10**, 590 (1965).
[29] MEMMERT, G.: Numerisches Verfahren zur nuklearen Auslegung des FDR-Core. In: Kernenergieantriebe für Handelsschiffe. Thiemig München, 1964.
[30] OECD-Symposium on criticality control, Karlsruhe (1961), p. 183.
[31] Reactor Handbook, Sec. Ed., Vol. III Part A, p. 277. Interscience Publishers New York, 1962.

VI. NEUTRONENDIFFUSION NACH DER TRANSPORTTHEORIE

In den vorangehenden Kapiteln wurde als Grundlage für die Neutronenbilanz die Diffusionstheorie benutzt. Die Diffusionstheorie unterstellt ein homogenes oder quasihomogenes Medium mit isotroper Streuung, in dem sich die Flußdichte über Bereiche von 2 bis 3 mittleren freien Weglängen nur wenig ändert. Dies trifft an Grenzflächen, wo starke Flußdichteänderungen auftreten (Reaktorrand, Uranstäbe, Steuerstäbe, Quellen) nicht zu. Die Diffusionstheorie versagt auch bei starker Absorption und anisotroper Streuung, ferner in Hohlräumen, wo eine ungehinderte Neutronenströmung (keine Diffusion) mit der freien Weglänge $\lambda \to \infty$ vorliegt. Das bedeutet, daß man viele Probleme mit einer verbesserten Theorie präziser beschreiben muß. Diese verbesserte Theorie ist die Transporttheorie.

Einzelne Ergebnisse der Transporttheorie werden der elementaren Diffusionstheorie üblicherweise aufgepfropft. Dahin gehören die Transportweglänge $\lambda_{\mathrm{tr}} = 1/\left(\Sigma_{\mathrm{A}} + \Sigma_{\mathrm{n}}(1 - \overline{\cos\Psi})\right)$ sowie die korrigierte Extrapolationsstrecke $d = 0{,}71\ \lambda_{\mathrm{tr}}$.

Die Notwendigkeit, z. B. Randeffekte zu beschreiben, bringt mit sich, daß man zur Formulierung der Neutronenverteilung nicht nur die räumlichen Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und die Energie E, sondern auch die Bewegungsrichtung $\boldsymbol{\Omega}$ als unabhängige Variable heranziehen muß. Mit $\boldsymbol{\Omega}$ können wir unterscheiden, ob sich ein Neutron etwa nach einer Streuung an einer bestimmten Stelle im Reaktor auf eine Grenzfläche zu bewegt oder nicht. — Man stellt also die Neutronenverteilung nicht mehr im Ortsraum (unter Hinzunahme der Energie als Parameter), sondern in dem aus der statistischen Mechanik geläufigen Phasenraum dar.

1. Aufstellung der Transportgleichung

1.1. Die Boltzmann-Gleichung für Neutronen

Eine Bilanzgleichung im Phasenraum formulierte Boltzmann im Rahmen der kinetischen Gastheorie für die Teilchendichte der

Moleküle. BOLTZMANN zog dabei folgende Möglichkeiten in Betracht: Ausströmen der Moleküle über die Grenzen des räumlichen Volumelements, Einfluß eines äußeren Kraftfeldes und Stöße von Molekülen untereinander. In der Neutronenbilanz eines Reaktors spielen äußere Kräfte im Gegensatz zu den von BOLTZMANN betrachteten Gasen keine Rolle. Auch der Stoß Neutron-Neutron kann als sehr selten vernachlässigt werden (vgl. Aufg. II. 1.8). Andererseits sind die Schicksale der Neutronen beim Stoß gegen Kerne des Spaltstoffs, Moderators, Strukturmaterials und Kühlmittels sehr mannigfaltig. Elastische und unelastische Streuung lassen die Neutronenzahl ungeändert, während Spaltung und Absorptionsvorgänge zur Änderung der Teilchenzahl führen, die im ursprünglichen Ansatz von BOLTZMANN nicht erfaßt wurde.

Die grundlegende Größe der Transporttheorie ist die von der Neutronenflugrichtung $\boldsymbol{\Omega}$ abhängige Flußdichte

$$\Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V = v\, n(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V, \quad (1.1)$$

wobei unter $n(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}\, t)\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V$ die Dichte jener Neutronen im Volumelement $\mathrm{d}V$ beim Ort $\boldsymbol{r}$ und zur Zeit t zu verstehen ist, deren Richtungen im Kegel $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$ um $\boldsymbol{\Omega}$ und deren Energien in $\mathrm{d}E$ bei E liegen. v ist der Betrag der Geschwindigkeit des Neutrons.

Die winkelabhängige Flußdichte erweitern wir durch die Definition der Vektorflußdichte

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t). \quad (1.2)$$

Durch Integration von (1.1–2) über $\boldsymbol{\Omega}$ kommt man zu den aus der Diffusionstheorie geläufigen integralen Größen

$$\text{Flußdichte:} \quad \Phi(\boldsymbol{r}, E, t) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}, \quad (1.3)$$

$$\text{Stromdichte:} \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E, t) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}. \quad (1.4)$$

Sofern die Richtungsabhängigkeit in $\Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ von der Isotropie wesentlich abweicht, verlaufen die gemäß (1.3–4) gebildeten Größen anders als die nach der Diffusionstheorie berechneten.

Wir bezeichnen das Volumelement des Phasenraumes mit $\mathrm{d}q = \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V$; die Bilanz für dieses Element ist

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t}\, \mathrm{d}q = \text{Zuwachs} - \text{Verluste}. \quad (1.5)$$

Im folgenden werden wir zeitliche Veränderungen nicht betrachten, so daß $\partial \Phi / \partial t = 0$ ist.

Wir berechnen zuerst die Neutronenverluste. Gemäß der Theorie der Vektorfelder ist der Verlust durch Ausströmen aus dem räumlichen Volumelement durch

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}q = \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}q \tag{1.6}$$

darzustellen. Ferner geht jedes Neutron, das einen Stoß macht (Streuung in andere Raumwinkelelemente und Energieintervalle oder Absorption), aus dem Strahl $(E, \boldsymbol{\Omega})$ verloren. Die Zahl dieser Neutronen in $\mathrm{d}q$ ist

$$\Sigma_{\mathrm{T}}\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}q = \Sigma_{\mathrm{T}}\, v\, n(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}q\,. \tag{1.7}$$

Wir betrachten nun die Gewinne. Die Streuung in $\mathrm{d}V$ bringt für das Intervall $\mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$ bei E und $\boldsymbol{\Omega}$ Gewinne aus allen Intervallen $\mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'$ bei E' und $\boldsymbol{\Omega}'$, wobei die Gewinne zu den zugehörigen Übergangsquerschnitten proportional sind:

$$\mathrm{d}q \int\limits_{E'=0}^{\infty} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \Sigma_{\mathrm{S}}(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}'. \tag{1.8}$$

Bei der Spaltung wird gewöhnlich eine gleichmäßige Verteilung der Spaltneutronen auf alle Raumrichtungen angenommen. Das Energiespektrum $\chi(E)$ der Spaltneutronen ist weitgehend von der Energie E' der die Spaltung auslösenden Neutronen unabhängig. Die Richtungsverteilung der Spaltneutronen ist annähernd isotrop. Daher entfällt auf das Raumwinkelelement $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$ der Anteil $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/4\,\pi$. Die Spaltungen, ausgelöst durch Neutronen aller Energien E' und Richtungen $\boldsymbol{\Omega}'$, liefern für die Bilanz im Phasenraumelement $\mathrm{d}q$ den Beitrag

$$\frac{\mathrm{d}q}{4\,\pi}\, \chi(E) \int\limits_{E'=0}^{\infty} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \Sigma_{\mathrm{f}}(E')\, \nu(E')\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}'. \tag{1.9}$$

Für die Bilanz (1.5) erhält man somit im stationären Zustand

$$\begin{aligned} &- \boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} \Phi - \Sigma_{\mathrm{T}}\, \Phi + \int\limits_{E'} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \Sigma_{\mathrm{S}}(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}' + \\ &+ \frac{1}{4\,\pi}\, \chi(E) \int\limits_{E'} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \Sigma_{\mathrm{f}}(E')\, \nu(E')\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}' = 0\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Die Transportgleichung (1.10) gilt im Gegensatz zur Diffusionsgleichung (V. 3.8) auch noch für $\Sigma_T \to 0$, d. h. in dem Sonderfall der reinen Neutronenströmung in einem Hohlraum. Hier reduziert sich die Transportgleichung (1.10) auf

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi = 0. \tag{1.11}$$

Auf Grenzflächen hat man die Stetigkeit des Stromes $\boldsymbol{\Omega} \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ durch das jeweilige Flächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}S$, d. h. die Stetigkeit der Normalkomponente $\Omega_n \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ zu fordern [1] $\Omega_n = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n}$:

$$\Omega_n \cdot \Phi^{I}(\boldsymbol{R}_G, E, \boldsymbol{\Omega}) = \Omega_n \cdot \Phi^{II}(\boldsymbol{R}_G, E, \boldsymbol{\Omega}). \tag{1.12}$$

Auf dem äußeren Rand (gegen Vakuum) muß somit

$$\Omega_n \cdot \Phi(\boldsymbol{R}_R, E, \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{für} \quad \Omega_n < 0 \tag{1.13}$$

gelten, weil aus dem Vakuum keine Neutronen in den Reaktor zurückgestreut werden.

1.2. Integrale Formulierung der Neutronentransportgleichung

Führen wir für die Quellterme in (1.10) die Abkürzung

$$Q(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int\limits_{E'} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \Sigma_S(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}' + \frac{1}{4\pi} \chi(E) \int\limits_{E'} \int\limits_{\boldsymbol{\Omega}'} \nu(E')\, \Sigma_f(E')\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}')\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}' \tag{1.14}$$

ein, so gilt für die Boltzmann-Gleichung

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = Q(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}). \tag{1.15}$$

Diese Gleichung kann formal integriert werden [2]. Zu diesem Zweck führen wir längs der Flugbahn eines Neutrons eine Koordinate R mit dem Nullpunkt bei $\boldsymbol{r}_0$ ein. Für irgendeinen Punkt

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega} \tag{1.16}$$

der Flugbahn lautet dann die Transportgleichung (1.15)

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_T(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) = Q(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}). \tag{1.17}$$

Nun gilt für die Richtungsableitung an diesem Punkt

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R} \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}). \tag{1.18}$$

Aus (1.17–18) ergibt sich also

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R} \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E) \cdot \Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) = Q(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}). \tag{1.19}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\Phi(\boldsymbol{r}_0 - R\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int\limits_{R'=R}^{\infty} Q(\boldsymbol{r}_0 - R'\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{R''=R}^{R'} \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_0 - R''\,\boldsymbol{\Omega}, E)\,\mathrm{d}R''} \mathrm{d}R'. \tag{1.20}$$

Im Grenzfall $R \to 0$ folgt aus (1.20) mit (1.16)

$$\Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int\limits_{R'=0}^{\infty} Q(\boldsymbol{r} - R'\,\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{R''=0}^{R'} \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r} - R''\,\boldsymbol{\Omega}, E)\,\mathrm{d}R''} \mathrm{d}R'. \tag{1.21}$$

Dies ist die der Boltzmann-Gleichung äquivalente integrale Transportgleichung. Ihre physikalische Interpretation ist evident (vgl. Aufg. 1.2). Sie ist für manche Diffusionsprobleme (z. B. in stark heterogenen Medien) besser geeignet als die Gl. (1.10). Das in Kap. III und IV zur Berechnung des Brennstoffgitters verwendete Erststoßverfahren kann aus (1.21) abgeleitet werden (vgl. Abschn. 3.3).

1.3. Gruppentransportgleichungen

Ähnlich wie in der Gruppendiffusionstheorie (Abschn. V. 4) kann man durch Unterteilung des Neutronenenergiebereichs in Intervalle ΔE_g und Integration der Transportgleichung über diese Intervalle aus der energieabhängigen Integrodifferentialgleichung ein System von gekoppelten, energieunabhängigen Differentialgleichungen ableiten. Im stationären Fall folgt aus (1.10) für die g-te Gruppe im Energieintervall ΔE_g

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\Omega}\cdot\operatorname{grad}\Phi_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}) - \Sigma_{Tg}\cdot\Phi_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}) &+ \\
+\sum_{g'}\int_{\boldsymbol{\Omega}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'\,\Sigma_{S,\,g'\to g}(\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega})\cdot\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}') &+ \\
+\frac{1}{4\,\pi}\,\chi_g\sum_{g'}\nu_{g'}\,\Sigma_{fg'}\int_{\boldsymbol{\Omega}'}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}'\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}') &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

wobei entsprechend Abschn. V. 4 folgende Definitionen gelten:

$$
\Phi_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\Delta E_g}\Phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}E,
\tag{1.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{S,\,g'\to g}(\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega})\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}') &= \\
= \int_{\Delta E_{g'}}\mathrm{d}E'\,\Phi(\boldsymbol{r},E',\boldsymbol{\Omega}')\int_{\Delta E_g}\mathrm{d}E\,\Sigma_S(E',\boldsymbol{\Omega}'\to E,\boldsymbol{\Omega}).
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Die Gruppentransportgleichung (1.22) kann analog zu (1.21) und deren Herleitung auch in der Form

$$
\Phi_g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\Omega}) = \int_{R'=0}^{\infty} Q_g(\boldsymbol{r}-R'\,\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega})\cdot \mathrm{e}^{-\int_{R''=0}^{R'}\Sigma_{Tg}(\boldsymbol{r}-R''\,\boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}R''}\,\mathrm{d}R'
\tag{1.25}
$$

geschrieben werden. Die Gruppenkonstanten der integralen Gruppentransportgleichung (1.25) sind von der Art der Mittelwertsbildung abhängig. Führt man die Integration über das Energieintervall ΔE_g an der integralen Transportgleichung (1.21) statt an (1.10) aus, so erhält man eine von (1.25) verschiedene Gleichung. Im Grenzfall sehr vieler (schmaler) Energiegruppen verschwinden jedoch diese Unterschiede.

Aufgaben

1.1. Man berechne den Differentialoperator der Transportgleichung $\boldsymbol{\Omega}\cdot\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega})$ für ein kugelsymmetrisches und ein zylindersymmetrisches Diffusionsproblem.

1.2. Man stelle die integrale Neutronentransportgleichung (1.21) für ein homogenes Medium anhand physikalischer Überlegungen als Neutronenbilanzgleichung auf.

1.3. In einem homogenen Medium mit dem Wirkungsquerschnitt Σ_T befinde sich am Ort $\boldsymbol{r}_Q$ eine Einheitspunktquelle. Man zeige, daß die Flußdichte der Neutronen, die noch keinen Stoß erlitten haben, am Ort $\boldsymbol{r}$

$$
K_T(\boldsymbol{r}_Q,\boldsymbol{r},E) = \frac{\mathrm{e}^{-\Sigma_T(E)\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q|}}{4\pi\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_Q|^2}
\tag{1.26}
$$

beträgt. Man bezeichnet $K_T(\boldsymbol{r}_Q,\boldsymbol{r},E)$ als Transportkern. Man vergleiche ihn mit dem Diffusionskern, s. Tab. V. 2.2.

2. Elementare Näherungen der Transporttheorie

2.1. Die P_1*-Approximation der Transportgleichung*

Die Lösung der Transportgleichung (1.10) ist schon in relativ einfachen Fällen mit großem Rechenaufwand verbunden. Daher wird man in der Regel von Näherungen der Transportgleichung ausgehen. Es ist naheliegend, Vereinfachungen im Sinne der Diffusionstheorie vorzunehmen. Die Diffusionsgleichung beschreibt die Neutronenbilanz mit den über die Richtungsverteilung integrierten Größen „Flußdichte" gemäß (1.3) und „Stromdichte" gemäß (1.4). Sie setzt voraus, daß nur kleine Ströme auftreten ($j \ll \Phi$) und daß die Streuung im Laborsystem isotrop erfolgt. Ersteres heißt nach (1.4), daß die zugrundeliegende, richtungsabhängige Flußdichte nur schwach anisotrop ist.

Auf dieser Basis liefert die Diffusionstheorie bekanntlich für viele Probleme brauchbare Resultate. Daher suchen wir für Fälle mit schwacher Richtungsanisotropie eine Vereinfachung der Transportgleichung in der Weise, daß wir die von der Richtung abhängigen Größen, d. h. die Flußdichte und den Übergangsquerschnitt, in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln und nach der Kugelfunktion mit Index 1 abbrechen (P_1-Approximation).

2.1.1. Aufstellung der P_1*-Gleichungen für ebene Geometrie*

Der Übergang von der Transportgleichung zur P_1-Approximation kann relativ einfach vollzogen werden, wenn die Dichteverteilung nur von einer Ortskoordinate abhängt, wie z. B. in ebener Geometrie bei einer unendlich ausgedehnten Platte. Gibt man irgendeine Richtung $\boldsymbol{\Omega}$ vor, so ist diese relativ zur z-Achse (Einheitsvektor $\boldsymbol{i}_z$) durch den Winkel ϑ ($\cos\vartheta = \mu$) gekennzeichnet (s. Abb. 2.1). Aus Symmetriegründen treten alle Neutronenflugrichtungen auf einem Kegel um $\boldsymbol{i}_z$ mit dem Öffnungswinkel ϑ (Polarwinkel zur z-Achse) gleich häufig auf. Die Neutronenflußdichte $\Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega})$ hängt in diesem Falle nicht mehr vom Azimutwinkel φ ab. An die Stelle von $\Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega})$ kann daher die Flußdichte $\Phi(z, E, \mu)$ treten, wobei die Beziehung gilt

$$\Phi(z, E, \mu) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega})\, d\varphi = 2\pi\, \Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega}). \qquad (2.1)$$

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir die Transportgleichung (1.10) konsequent vereinfachen. Aus Abb. 2.1 geht hervor, daß

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi(z, E, \mu)}{2\pi} = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi(z, E, \mu)}{2\pi}. \tag{2.2}$$

Die Integration von (1.10) über φ führt unter Berücksichtigung von (2.1–2) zu der Beziehung

$$\mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, E, \mu) + \Sigma_{\mathrm{T}} \Phi(z, E, \mu) = S(z, E, \mu) + F(z, E, \mu). \tag{2.3}$$

Darin ist der Streubeitrag mit

$$S(z, E, \mu) = \int_0^\infty \mathrm{d}E' \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \Sigma_{\mathrm{S}}(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega}) \, \Phi(z, E', \boldsymbol{\Omega}') \tag{2.4}$$

und die Spaltquelle mit

$$F(z, E, \mu) = \tfrac{1}{2} \chi(E) \int_0^\infty \mathrm{d}E' \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu' \, \nu(E') \, \Sigma_{\mathrm{f}}(E') \, \Phi(z, E', \mu') \tag{2.5}$$

bezeichnet worden. Die Integrationen über φ und φ' in (2.4) können nicht ohne weiteres ausgeführt werden, weil φ und φ' in dem Übergangsquerschnitt Σ_{S} enthalten sind.

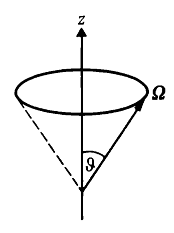


Abb. 2.1: Zur Ableitung der P_1-Gleichungen in ebener Geometrie.

Um die Winkelabhängigkeit abzuspalten, entwickeln wir die Flußdichte $\Phi\ (z,\ E,\ \mu)$ nach Kugelfunktionen $P_l(\mu)$ und brechen nach der Kugelfunktion mit Index 1 ab:

$$\Phi(z, E, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\,l+1}{2}\, \Phi_l(z, E)\, P_l(\mu)$$
$$\approx \tfrac{1}{2}\, \Phi_0(z, E)\, P_0(\mu) + \tfrac{3}{2}\, \Phi_1(z, E)\, P_1(\mu). \tag{2.6}$$

In üblicher Weise bekommt man daraus die Entwicklungskoeffizienten Φ_l durch Multiplikation von (2.6) mit P_l und Integration über den Periodizitätsbereich der Kugelfunktionen. Aufgrund deren Orthogonalität und Normierung

$$\int_{\mu=-1}^{+1} P_l(\mu)\, P_{l'}(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2\,l+1} \cdot \delta_{ll'} \tag{2.7}$$

gilt

$$\Phi_l(z, E) = \int_{-1}^{+1} \Phi(z, E, \mu) \cdot P_l(\mu)\, d\mu. \tag{2.8}$$

Die Entwicklungskoeffizienten Φ_l bezeichnet man als „Momente" der Kugelfunktionsentwicklung der Neutronenflußdichte.

Da $P_0(\mu) = 1$, ist das erste Glied der Entwicklung (2.6) richtungsunabhängig. Φ_0 stellt die skalare Neutronenflußdichte (1.3) dar:

$$\begin{aligned}\Phi(z, E) \triangleq \Phi_0(z, E) &= \int_{\mu=-1}^{+1} \Phi(z, E, \mu)\, d\mu \\ &= \int_{\boldsymbol{\Omega}} \Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega})\, d\boldsymbol{\Omega}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Der Entwicklungskoeffizient $\Phi_1(z, E)$ des zweiten Gliedes hat die Bedeutung des Betrages der Nettostromdichte in z-Richtung. Mit (1.4) und $P_1\ (\mu) = \mu$ ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}j_z(z, E) = \boldsymbol{i}_z \cdot \boldsymbol{j}(z, E) &= \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{i}_z \cdot \boldsymbol{\Omega}\, \Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega})\, d\,\boldsymbol{\Omega} \\ &= \int_{\mu=-1}^{+1} \mu\, \Phi(z, E, \mu)\, d\mu = \Phi_1(z, E).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Also lautet (2.6):

$$\Phi(z, E, \mu) = \tfrac{1}{2}\,\Phi(z, E) + \tfrac{3}{2}\,\mu\, j_z(z, E) \tag{2.11}$$

oder gleichwertig

$$\Phi(z, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\,\Phi(z, E) + \frac{3}{4\pi}\,\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{j}(z, E). \tag{2.12}$$

(Man beachte dabei, daß in ebener Geometrie $\boldsymbol{j}(z, E)$ aus Symmetriegründen in z-Richtung zeigt, $|\boldsymbol{j}| = j_z$).
Wir setzen (2.11) in (2.3) ein und integrieren über μ. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation (2.7) folgt dann

$$\frac{\partial}{\partial z}\, j_z(z, E) + \Sigma_{\mathrm{T}}\, \Phi(z, E) = \int\limits_{\mu=-1}^{+1} (S + F)\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.13}$$

Multiplizieren wir (2.3) zuvor mit μ und integrieren dann, so folgt:

$$\frac{1}{3}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Phi(z, E) + \Sigma_{\mathrm{T}}\, j_z(z, E) = \int\limits_{\mu=-1}^{+1} \mu (S + F)\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.14}$$

Dies sind zwei gekoppelte Integrodifferentialgleichungen für die beiden ersten Momente Φ und j_z, zu deren Analyse zunächst die Streu- und Spaltintegrale auf der rechten Seite auszuwerten sind.

2.1.2. Auswertung der Spalt- und Streuintegrale

Das Spaltintegral F geht in die Rechnung über seine beiden ersten Momente ein:

$$F_0(z, E) = \int\limits_{-1}^{+1} F(z, E, \mu)\,\mathrm{d}\mu = \chi(E) \int\limits_{0}^{\infty} \nu(E')\,\Sigma_{\mathrm{f}}(E')\,\Phi(z, E')\,\mathrm{d}E'. \tag{2.15}$$

$$F_1(z, E) = \int\limits_{-1}^{+1} F(z, E, \mu)\;\mu\,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{2.16}$$

Bei Berechnung der Streuintegrale ist zu beachten, daß der Übergangsquerschnitt lediglich vom Winkel ψ zwischen den Richtungen $\boldsymbol{\Omega}'$ und $\boldsymbol{\Omega}$ abhängt. Es gilt analog zu (2.1)

$$\Sigma_{\mathrm{S}}(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\,\Sigma_{\mathrm{S}}(E' \to E, \cos\psi), \tag{2.17}$$

$$\cos\psi = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'. \tag{2.18}$$

Da wir die Winkelabhängigkeit in der Neutronenflußdichte Φ im Rahmen unserer P_1-Approximation nur in erster Näherung berücksichtigen, ist die entsprechende Näherung auch für Σ_S angebracht. Wir entwickeln $\Sigma_S\,(E' \to E, \cos\psi)$ analog zu (2.6) nach Kugelfunktionen vom Argument $\cos\psi$ und brechen nach dem zweiten Glied ab:

$$\begin{aligned}\Sigma_S(E' \to E, \cos\psi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\,l+1}{2}\,\Sigma_{Sl}(E' \to E) \cdot P_l(\cos\psi) \\ &\approx \tfrac{1}{2}\,\Sigma_{S0}(E' \to E) + \tfrac{3}{2}\,\Sigma_{S1}(E' \to E) \cdot \cos\psi\,.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Entwicklungskoeffizienten Σ_{Sl} heißen analog zu den Φ_l „Momente" der Kugelfunktionsentwicklung des Streuquerschnitts. Sie sind in bekannter Weise zu bestimmen durch:

$$\Sigma_{Sl}(E' \to E) = \int_{-1}^{+1} \Sigma_S(E' \to E, \cos\psi)\, P_l(\cos\psi)\, d\cos\psi\,. \tag{2.20}$$

Σ_{S0} stellt das Integral über alle möglichen Flugrichtungen nach dem Stoß dar. Es ist identisch mit dem in Kap. III, IV und V verwendeten Übergangsquerschnitt $\Sigma_S(E' \to E)$:

$$\Sigma_S(E' \to E) \equiv \Sigma_{S0}(E' \to E) = \int_{-1}^{+1} \Sigma_S(E' \to E, \cos\psi)\, d\cos\psi\,. \tag{2.21}$$

Die Form der $\Sigma_{Sl}(E' \to E)$ hängt vom jeweiligen Streumodell ab, durch das die Übergangsquerschnitte $\Sigma_S\,(E' \to E, \cos\psi)$ approximiert werden. Im Gasmodell mit elastischer, im Schwerpunktsystem isotroper Streuung erhalten wir für $\Sigma_{S0}\,(E' \to E) = \Sigma_{n0}\,(E' \to E)$ mit (IV. 3.10) gerade den Wigner-Wilkins-Kern (IV. 2.10). Lassen wir dort die Moderatortemperatur $T \to 0$ gehen, so folgt hieraus für den Stoß des Neutrons mit ruhenden Kernen der Übergangsquerschnitt (III. 2.5) für den Bremsbereich. $\Sigma_{n1}(E' \to E)$ wird in Aufg. 2.1 berechnet.

Hat man die Momente des Übergangsquerschnitts mit Hilfe eines passenden Streumodells berechnet, so ist (2.19) in (2.4) und dieses in (2.13–14) einzusetzen. Dies erfordert die Umrechnung von $\cos\psi = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'$ auf $\cos\vartheta = \mu$ und $\cos\vartheta' = \mu'$. Mittels des räumlichen Kosinussatzes können wir $\cos\psi$ durch die Koordinaten der Einheitsvektoren $\boldsymbol{\Omega}'$ und $\boldsymbol{\Omega}$ ausdrücken (s. Abb. 2.2):

$$\cos\psi = \mu \cdot \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \cdot \sqrt{1-\mu'^2} \cdot \cos(\varphi - \varphi')\,. \tag{2.22}$$

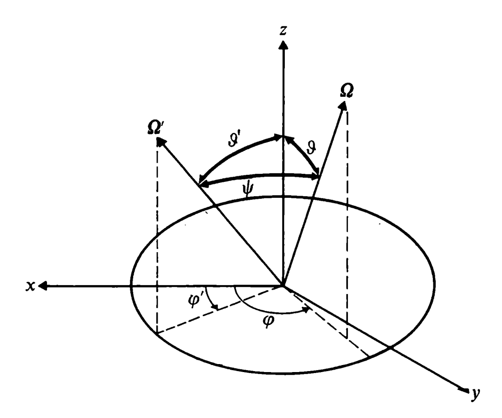


Abb. 2.2: Winkelkoordinaten zur Beschreibung des Streuprozesses.

Mit (2.17–22) kann das Streuintegral (2.4) ausgeführt werden:

$$S(z, E, \mu) =$$
$$= \int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E' \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_{\mu'=-1}^{+1} \mathrm{d}\mu' \, \Phi(z, E', \boldsymbol{\Omega}') \left\{ \frac{1}{4\pi} \Sigma_{S0}(E' \to E) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4\pi} \Sigma_{S1}(E' \to E) \left[\mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \right] \right\}. \tag{2.23}$$

Die Integration über φ bringt das Glied mit dem Faktor $\cos(\varphi - \varphi')$ zum Verschwinden. Danach ist über φ' zu integrieren, was nach (2.1) auf $\Phi(z, E', \mu')$ führt. Hierfür ist dann die Entwicklung (2.11) einzusetzen. Schließlich erhält man nach Integration über μ'

$$S(z, E, \mu) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E' \, \Sigma_{S0}(E' \to E) \, \Phi(z, E') + \tag{2.24}$$
$$+ \tfrac{3}{2} \mu \int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E' \Sigma_{S1}(E' \to E) \, j_z(z, E').$$

Für die in (2.13–14) auftretenden Integrale $\int_{-1}^{+1} S \, \mathrm{d}\mu$ und $\int_{-1}^{+1} \mu \cdot S \, \mathrm{d}\mu$

gilt damit

$$S_0(z, E) =$$
$$= \int_{\mu=-1}^{+1} S(z, E, \mu)\, \mathrm{d}\mu = \int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{S0}(E' \to E)\, \Phi(z, E'), \qquad (2.25)$$

$$S_1(z, E) =$$
$$= \int_{\mu=-1}^{+1} S(z, E, \mu)\, \mu\, \mathrm{d}\mu = \int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{S1}(E' \to E)\, j_z(z, E'). \qquad (2.26)$$

2.1.3. Die P_1*-Gleichungen und ihre Anschlußbedingungen*

Setzen wir die Spalt- und Streuintegrale in (2.13–14) ein, so folgt für die Gleichungen der P_1-Approximation in ebener Geometrie:

$$\frac{\partial}{\partial z} j_z(z, E) + \Sigma_T \Phi(z, E) = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_{S0}(E' \to E)\, \Phi(z, E')\, \mathrm{d}E' + \\ + \chi(E) \int_{E'=0}^{\infty} \nu(E')\, \Sigma_f(E')\, \Phi(z, E')\, \mathrm{d}E', \qquad (2.27)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, E) + \Sigma_T j_z(z, E) = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_{S1}(E' \to E)\, j_z(z, E')\, \mathrm{d}E'. \qquad (2.28)$$

Σ_{S0} und Σ_{S1} sind nach (2.20–21) unter Verwendung passender Streumodelle zu berechnen.

Als Anschlußbedingungen auf der Grenze zwischen zwei Medien I und II wird in der Transporttheorie gemäß Gl. (1.12) Stetigkeit der Normalkomponente der richtungsabhängigen Stromdichte gefordert. Das bedeutet in Anbetracht der kontinuierlich veränderlichen Richtung unendlich viele Bedingungen. Bei jeder Näherungslösung mit abbrechender Entwicklung hat man nur eine begrenzte Zahl von freien Konstanten für die Anpassung der Flußdichten auf der Grenzfläche zur Verfügung. Insbesondere die P_1-Approximation führt nach Elimination von j_z aus (2.27) mittels (2.28) auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung in z für $\Phi(z, E)$. Die Flußdichte in einem homogenen Teilbereich des Reaktors enthält somit 2 Integrationskonstanten (abhängig von E). Denen muß die Zahl der Anschlußbedingungen entsprechen.

Zur Formulierung der beiden Anschlußbedingungen der P_1-Approximation setzen wir die Entwicklung (2.11) in (1.12) ein und integrieren über μ einmal direkt, zum anderen nach Multiplikation mit μ. Das ergibt unter Beachtung von $\Omega_n = \mu = P_1(\mu)$ und der Orthogonalitätsrelationen:

$$j_z^{\mathrm{I}}(Z_{\mathrm{G}}, E) = j_z^{\mathrm{II}}(Z_{\mathrm{G}}, E), \qquad (2.29)$$
$$\Phi_0^{\mathrm{I}}(Z_{\mathrm{G}}, E) = \Phi_0^{\mathrm{II}}(Z_{\mathrm{G}}, E).$$

Die P_1-Approximation hat also die gleichen Anschlußbedingungen wie die Diffusionstheorie (V. 2.24–25): Stetigkeit der Normalkomponente der Stromdichte und Stetigkeit der Flußdichte.

Auf dem äußeren Rand Z_R (gegen Vakuum) fordert man in der P_1-Approximation an Stelle der Bedingung (1.13) – Verschwinden von $\mu\,\Phi(Z_R, E, \mu)$ für alle Flugrichtungen mit $\mu < 0$ – die integrale Bedingung für den Halbraum

$$\int_{-1}^{0} \mu \cdot \Phi(Z_R, E, \mu)\,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad (2.30)$$

da nur eine Integrationskonstante zu bestimmen ist. Hieraus folgt mit (2.11)

$$\Phi_0(Z_R, E) - 2\,j_z(Z_R, E) = 0. \qquad (2.30\mathrm{a})$$

(2.30a) stimmt mit der Randbedingung der Diffusionstheorie (V. 2.26), überein. Auf einer Symmetrieebene, z. B. im Zentrum eines homogenen Reaktors, muß die Nettostromdichte $j_z(Z_S, E)$ verschwinden:

$$j_z(Z_S, E) = 0 \qquad (2.30\mathrm{b})$$

2.1.4. P$_1$*-Approximation für beliebige Geometrie*

Heben wir die Beschränkung auf ebene Geometrie auf, so tritt an die Stelle von (2.12) der folgende allgemeine Lösungsansatz der P_1-Approximation

$$\Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\,\Phi(\boldsymbol{r}, E) + \frac{3}{4\pi}\,\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E). \qquad (2.31)$$

Dabei hat der Stromdichtevektor $\boldsymbol{j}$ eine beliebige Richtung. Die Richtungsabhängigkeit der Flußdichte wird in der P_1-Approximation gemäß (2.31) durch ein kugelsymmetrisches Glied und

einen Korrekturterm ($|\boldsymbol{j}| \ll \Phi$ nach Voraussetzung) beschrieben, der zum Kosinus des Winkels zwischen Flugrichtung und Stromrichtung proportional ist. Für den Übergangsquerschnitt gilt analog zu (2.19):

$$\Sigma_S(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{S0}(E' \to E) + \frac{3}{4\pi} \Sigma_{S1}(E' \to E)\,(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'). \tag{2.32}$$

Wir setzen die Ansätze (2.31–32) in die Transportgleichung (1.10) ein und integrieren einmal direkt, das andere Mal nach Multiplikation mit $\boldsymbol{\Omega}$ über alle Flugrichtungen. Dabei treten folgende Integrale auf:

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Omega}\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E), \tag{2.33}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\Omega}\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{3} \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E), \tag{2.34}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \int_{\boldsymbol{\Omega}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}' \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Sigma_S(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') = \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{S0}(E' \to E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E'), \tag{2.35}$$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \int_{\boldsymbol{\Omega}'} \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}' \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \boldsymbol{\Omega}\, \Sigma_S(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') = \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{S1}(E' \to E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E'). \tag{2.36}$$

Mit (2.33–36) haben dann die Bilanzgleichungen der P_1-Approximation analog zu (2.27–28) für beliebige Geometrie die Form:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) + \Sigma_T(E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E) = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_{S0}(E' \to E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E')\, \mathrm{d}E' + \chi(E) \int_{E'=0}^{\infty} \nu(E')\, \Sigma_f(E')\, \Phi(\boldsymbol{r}, E')\, \mathrm{d}E'. \tag{2.37}$$

$$\tfrac{1}{3} \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E) + \Sigma_T(E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_{S1}(E' \to E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E')\, \mathrm{d}E'. \tag{2.38}$$

2.1.5 P_1*-Gruppengleichungen*

Durch Integration der energieabhängigen Integrodifferentialgleichungen der P_1-Approximation (2.37–38) über die Energieintervalle ΔE_g ($g = 1, 2, 3, \ldots$) entsteht ein System von gekoppelten, energieunabhängigen Differentialgleichungen, das im allgemeinen leichter als die energieabhängige Gleichung zu lösen ist:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}_g(\boldsymbol{r}) + \Sigma_{Tg}\, \Phi_g(\boldsymbol{r}) = \sum_{g'} \Sigma_{S0\, g' \to g}\, \Phi_{g'}(\boldsymbol{r}) + \\ + \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'}\, \Sigma_{f\, g'}\, \Phi_{g'}(\boldsymbol{r}), \tag{2.39}$$

$$\tfrac{1}{3} \operatorname{grad} \Phi_g(\boldsymbol{r}) + \Sigma^j_{T\,g}\, \boldsymbol{j}_g(\boldsymbol{r}) = \sum_{g'} \Sigma^j_{S1\, g' \to g}\, \boldsymbol{j}_{g'}(\boldsymbol{r}). \tag{2.40}$$

Die Gruppengrößen sind analog zu (1.23–24) und zu Abschn. V. 4 definiert. Im Unterschied zu (2.39) und der Diffusionstheorie (s. Abschn. V. 4.1) werden die Wirkungsquerschnitte Σ^j_{Tg} und $\Sigma^j_{S1\, g' \to g}$ in Gl. (2.40) mit den Komponenten der Stromdichte und nicht mit der Flußdichte gemittelt. Bei hinreichend kleinen Energiegruppen ist dieser Unterschied bedeutungslos, da in diesem Fall Fluß- und Stromdichte innerhalb ΔE_g näherungsweise als konstant angenommen werden können. Eine numerische Lösung des Gleichungssystems (2.39–40) für homogene Mischungen mit anisotroper elastischer und unelastischer Streuung kann z. B. mit dem Rechenprogramm GAM für schnelle Neutronen und mit dem Programm GATHER für thermische Neutronen gewonnen werden [3,11].

Die P_1-Gruppengleichungen sind für Diffusionsprobleme mit anisotroper Streuung genauer als die Gruppendiffusionsgleichungen. Das Bremslängenquadrat

$$\tau(E) = \tfrac{1}{6} \int r^2\, \Phi(\boldsymbol{r}, E)\, \mathrm{d}E \Big/ \int \Phi(\boldsymbol{r}, E)\, \mathrm{d}V$$

(vgl. Tab. V. 3.3) wird durch die P_1-Approximation selbst für die anisotrope Streuung in Wasserstoff exakt wiedergegeben [3]. $\Phi(\boldsymbol{r}, E)$ ist die Flußdichte der auf E abgebremsten Neutronen, die von einer Punktquelle bei $\boldsymbol{r} = 0$ herrühren.

Abb. 2.3 zeigt das Bremslängenquadrat $\tau(1{,}44\,\text{eV})$ für verschiedene Metall-Wasser-Mischungen unter Berücksichtigung der unelastischen Streuung am Metall. In reinem Wasser beträgt das Bremslängenquadrat für Spaltneutronen bis herab zur Indium-Resonanz bei 1,44 eV nach der P_1-Approximation 26 cm². Die Alterstheorie liefert dagegen lediglich 18 cm².

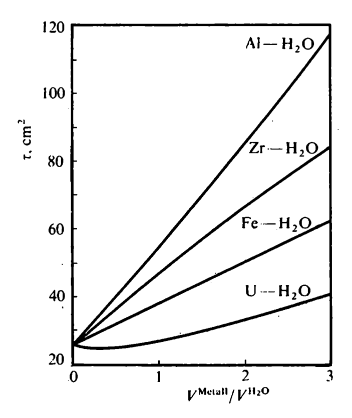


Abb. 2.3: Das Bremslängenquadrat für verschiedene Metall-Wasser-Mischungen in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis (nach [3]).

2.2. Die elementare Diffusionsnäherung

Wenn wir für die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ das Ficksche Gesetz

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = -D(E) \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E) \tag{2.41}$$

annehmen, erhalten wir aus Gl. (2.37) der energieabhängigen P_1-Approximation die elementare Diffusionsgleichung (V.3.5). Gl. (2.38) zeigt jedoch, daß das Ficksche Gesetz in seiner ursprünglichen Form mit $D = 1/3\ \Sigma_T$ nur gilt, wenn die Neutronenstreuung im Laborsystem isotrop ist ($\Sigma_{S1} = 0$).

Die Bedingung der isotropen Streuung im Laborsystem ist streng genommen in keinem Falle erfüllt. Sie gilt näherungsweise für die Streuung mittelschneller und langsamer Neutronen an schweren Kernen, wo $\Sigma_{S1} \ll \Sigma_{S0}$ ist. Das Stoßintegral in (2.38) ist in diesem Falle ein Korrekturterm:

$$\int_{E'=0}^{\infty} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{S1}(E' \to E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E') \ll \Sigma_S\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)\,. \tag{2.42}$$

Die Größe dieses Korrekturterms wollen wir für den Fall der elastischen Streuung an ruhenden Kernen näher bestimmen. Wir führen zunächst formal das erste Moment des differentiellen Streuquerschnitts auf den integralen Streuquerschnitt zurück:

$$\Sigma_{n1}(E' \to E) = \Sigma_n(E') \cdot w_1(E' \to E)\,. \tag{2.43}$$

Man beachte, daß w_1 ebenso wie w in (III. 1.24) die Dimension einer reziproken Energie hat. Sodann nehmen wir an, daß sich das Produkt $E' \Sigma_n(E') \boldsymbol{j}(E')$ analog zu $E \Sigma_n(E) \Phi(E)$ in Abschn. III. 2.2 in dem für schwere Kerne kleinen Stoßintervall nur langsam mit der Energie ändert, so daß wir im Stoßintegral im Sinne einer abgebrochenen Taylor-Entwicklung

$$E' \Sigma_n(E') \boldsymbol{j}(E') \approx E \Sigma_n(E) \boldsymbol{j}(E) + \cdots \tag{2.44}$$

setzen können. Damit wird das Integral in (2.38)

$$\int_{E'} \Sigma_{n1}(E' \to E) \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E')\, \mathrm{d}E' \approx \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) \cdot \Sigma_n(E) \cdot \overline{\cos\psi}, \tag{2.45}$$

wobei

$$\begin{aligned} \overline{\cos\psi} &= \int_{E'=E}^{E/\alpha} \frac{E}{E'} w_1(E' \to E)\, \mathrm{d}E'. \\ &= \int_{\cos\Psi=-1}^{+1} w(\cos\Psi) \cos\psi\, \mathrm{d}\cos\Psi \end{aligned} \tag{2.46}$$

(vgl. (III. 1.35) und Lösung der Aufg. VI. 2.3). Formal erhält man das gleiche Ergebnis, wenn man unter dem Integral in (2.45)

$$\Sigma_{n1}(E' \to E) = \Sigma_{n1}(E') \delta(E' - E) \tag{2.43a}$$

setzt, mit $\Sigma_{n1}(E') = \Sigma_n(E') \overline{\cos\psi}$, (vgl. (2.52), (III. 1.31)) Mit der Näherung (2.45) nimmt Gl. (2.38) die Form des Fickschen Gesetzes (2.41) und Gl. (2.37) die der Diffusionsgleichung an, wobei die Diffusionskonstante

$$D(E) = \frac{1}{3\, \Sigma_{tr}(E)} \tag{2.47}$$

und der Transportquerschnitt

$$\Sigma_{tr}(E) = \Sigma_T(E) - \Sigma_n(E) \cdot \overline{\cos\psi} \tag{2.48}$$

sind. Diese Größen haben wir bereits im Abschn. V. 1.2 mit einer elementaren Betrachtung in die Diffusionstheorie eingeführt und bisher benutzt. Gl. (2.37) zeigt, daß in der Diffusionsnäherung nur der isotrope Anteil der Streuquelle (2.19) auftritt.

Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, daß beim Übergang zu den Gruppengleichungen entweder Σ_{tr} analog zur P_1-Gleichung (2.40) mit den Komponenten j_k der Stromdichte oder

$D = 1/(3\Sigma_{tr})$ analog zur Gruppendiffusionsgleichung in Abschn. V.4.1 mit der Flußdichte gemittelt werden muß. Unter der in Abschn. V.4.1 gemachten Annahme, daß die Orts- und Energieabhängigkeit im Intervall ΔE_g separierbar ist, führen die beiden Mittelungen zum selben Ergebnis:

$$\Sigma_{\mathrm{tr}\,g}^{jk} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \Sigma_{\mathrm{tr}}(E) \cdot j_k(\boldsymbol{r}, E)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} j_k(\boldsymbol{r}, E)\,\mathrm{d}E} = \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \Sigma_{\mathrm{tr}}(E) \frac{1}{3\,\Sigma_{\mathrm{tr}}(E)} \nabla_k \Phi(\boldsymbol{r})\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E}{\int\limits_{\Delta E_g} \frac{1}{3\,\Sigma_{\mathrm{tr}}(E)} \nabla_k \Phi(\boldsymbol{r})\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E}$$

$$= \frac{\int\limits_{\Delta E_g} \Phi(E)\,\mathrm{d}E}{3 \int\limits_{\Delta E_g} D(E)\,\Phi(E)\,\mathrm{d}E} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Sigma_{\mathrm{tr}}}\right)_g^{\Phi}}. \tag{2.49}$$

Aufgaben

2.1. a) Man zeige anhand der Stoßgesetze (Abschn. III.1), daß der zweifachdifferentielle Wirkungsquerschnitt für im Schwerpunktsystem isotrope elastische Streuung an ruhenden Kernen in der Form

$$\Sigma_{\mathrm{n}}(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}(E')}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\cos\Psi}{\mathrm{d}\cos\psi}\, \delta\left[E - E' + E' \frac{1-\alpha}{2}(1 - \cos\Psi)\right] \tag{2.50}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}(E')}{(1-\alpha)\,E'}\, \delta\left[\cos\psi - \left(\frac{A+1}{2}\sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{A-1}{2}\sqrt{\frac{E'}{E}}\right)\right]$$

geschrieben werden kann. b) Man leite diesen Wirkungsquerschnitt auch aus (IV.3.10) durch Grenzübergang für $T \to 0$ ab. Dabei beachte man, daß der Grenzwert

$$\lim_{c \to 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{c\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{c}} = \delta(x' - x),$$

ist, wobei $\delta(x' - x)$ die Deltafunktion ist (vgl. Fußnote auf S. 133).

2.2. Man weise nach, daß das 1. und 2. Moment des in Aufg. 2.1 abgeleiteten zweifachdifferentiellen Wirkungsquerschnitts nach (2.19–20) die Form

$$\Sigma_{\mathrm{n}0}(E' \to E) = \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}(E')}{(1-\alpha)\,E'}, \tag{2.51}$$

$$\Sigma_{\mathrm{n}1}(E' \to E) = \frac{\Sigma_{\mathrm{n}}(E')}{2\,(1-\alpha)\,E'}\left[(A+1)\sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1)\sqrt{\frac{E'}{E}}\right], \tag{2.52}$$

$$\text{für } \alpha E' \leq E \leq E',$$

haben.

2.3. Man zeige durch Ausführung der Integration in (2.46) mit $w_1(E' \to E)$ nach (2.52), daß sich für elastische, im Schwerpunktsystem isotrope Streuung an ruhenden Kernen die bekannte Formel $\overline{\cos\psi} = 2/(3A)$ (vgl. (III.1.35)) ergibt.

2.4. Man leite aus der integralen Transportgleichung (1.21) die P_1-Gleichungen ab, indem einmal direkt und einmal nach Multiplikation mit $\boldsymbol{\Omega}$ über alle Flugrichtungen integriert wird. Man weise nach, daß die Gleichung für $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)$ der P_1-Gleichung (2.37) äquivalent ist.

3. Höhere Näherungen der Transporttheorie

Wir beschreiben im folgenden einige bewährte Methoden zur Lösung der Transportgleichung. Dabei beschränken wir uns einfachheitshalber auf Probleme mit ebener Geometrie.

3.1. Entwicklung nach Kugelfunktionen

3.1.1. Die P_L-Approximation

Aufstellung der Differentialgleichungen. Wir separieren wie bei der P_1-Approximation die Winkelabhängigkeit der Flußdichte und des zweifachdifferentiellen Wirkungsquerschnitts durch Entwicklung nach Kugelfunktionen. Die Entwicklung wird bis zu Gliedern mit der Ordnung L ausgeführt:

$$\Phi(z, E, \mu) = \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z, E)\, P_l(\mu), \tag{3.1}$$

$$\Sigma_S(E' \to E, \cos\psi) = \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Sigma_{Sl}(E' \to E)\, P_l(\cos\psi). \tag{3.2}$$

Φ_l und Σ_{Sl} sind durch (2.8) und (2.20) bestimmt. Die Kugelfunktionen in (3.2) mit dem Kosinus des Streuwinkels als Argument können nach dem Additionstheorem für Kugelfunktionen durch die Koordinaten (μ, φ) und (μ', φ') von $\boldsymbol{\Omega}$ und $\boldsymbol{\Omega}'$ ausgedrückt werden (s. Abb. 2.2):

$$\begin{aligned} P_l(\cos\psi) &= P_l(\mu)\cdot P_l(\mu') + \\ &+ 2\sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)\cdot P_l^m(\mu')\cdot\cos\big(m(\varphi-\varphi')\big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

$P_l^m(\mu)$ sind die zugeordneten Kugelfunktionen. Bei Integration über $\cos\big(m(\varphi - \varphi')\big)$ von $\varphi = 0$ bis 2π im Streuintegral (2.4) fallen die Terme mit den zugeordneten Kugelfunktionen heraus. Für das Streuintegral gilt dann unter Beachtung der Orthogonalitätsrelation (2.7) und der Definitionsgleichung (2.8) für die Momente $\Phi_l(z, E')$

$$S(z, E, \mu) =$$
$$= \int_{E'} \mathrm{d}E' \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu' \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Sigma_{\mathrm{s}l}(E' \to E)\, P_l(\mu)\, P_l(\mu')\, \Phi(z, E', \mu')$$
$$= \int_{E'} \mathrm{d}E' \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Sigma_{\mathrm{s}l}(E' \to E)\, \Phi_l(z, E')\, P_l(\mu). \tag{3.4}$$

Bei der isotropen Spaltquelle (2.5) reduziert sich die Summe auf ein Glied:

$$F(z, E, \mu) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\chi(E) \int_{E'} \mathrm{d}E' \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu'\, \nu(E')\, \Sigma_{\mathrm{f}}(E') \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z, E')\, P_l(\mu')$$
$$= \tfrac{1}{2}\chi(E) \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \nu(E')\, \Sigma_{\mathrm{f}}(E')\, \Phi_0(z, E'). \tag{3.5}$$

Das Strömungsglied hat beim ebenen Problem nach (2.2) und (3.1) die Form

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(z, E, \mu) = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, E, \mu)$$
$$= \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \cdot \mu \cdot P_l(\mu) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Phi_l(z, E). \tag{3.6}$$

Das Produkt $\mu \cdot P_l(\mu)$ kann dabei durch eine Linearkombination von Kugelfunktionen dargestellt werden:

$$\mu \cdot P_l(\mu) = \frac{l}{2l+1} P_{l-1} + \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}. \tag{3.7}$$

Setzen wir (3.1–7) in die Boltzmann-Gleichung (2.3) ein, multiplizieren mit $P_n(\mu)$ und integrieren über μ von -1 bis $+1$, so erhalten wir mit

$$\sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \left[\frac{l}{2l+1} \int_{-1}^{+1} P_n \cdot P_{l-1} \, d\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{l+1}{2l+1} \int_{-1}^{+1} P_n \, P_{l+1} \, d\mu \right] \frac{\partial}{\partial z} \Phi_l(z, E) \tag{3.8}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{n+1}(z, E) + \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{n-1}(z, E)$$

das folgende Gleichungssystem für die Flußmomente der Kugelfunktionsentwicklung:

$$\frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{n+1}(z, E) + \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{n-1}(z, E) + \Sigma_T \, \Phi_n(z, E) =$$

$$= \int_{E'} dE' \, \Sigma_{Sn}(E' \to E) \, \Phi_n(z, E') + \chi(E) \int_{E'} dE' \, \nu(E') \, \Sigma_f(E') \, \Phi_0(z, E') \cdot \delta_{n0}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, L. \tag{3.9}$$

Die Gl. (2.27–28) der P_1-Approximation sind hierin als Spezialfall enthalten. Durch Elimination der höheren Momente aus den Gleichungen 1. Ordnung (3.9) kann man eine Differentialgleichung höherer Ordnung für $\Phi_0(z, E)$ herleiten. Diese Differentialgleichung ist bei der P_1- und P_2-Approximation von 2. Ordnung, bei der P_3- und P_4-Approximation von 4. Ordnung usw. Dementsprechend beträgt die Zahl der Integrationskonstanten in $\Phi_0(z,E)$ 2, 4, .. für jedes E.

Anschluß- und Randbedingungen. Als Anschlußbedingungen auf der Grenze zwischen zwei Medien I und II verlangen wir in Verallgemeinerung von (2.29) die Stetigkeit der Momente von $\mu \, \Phi(Z_G, E, \mu)$. Wir setzen die Entwicklung (3.1) in die Anschlußbedingung (1.12) ein, multiplizieren mit $P_n(\mu)$ und integrieren über μ. Unter Beachtung von (3.7) und der Orthogonalitätsbedingung (2.7) erhalten wir die folgenden Anschlußbedingungen

$$n \cdot \Phi_{n-1}^{I} + (n+1) \, \Phi_{n+1}^{I} = n \cdot \Phi_{n-1}^{II} + (n+1) \, \Phi_{n+1}^{II} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, L. \tag{3.10}$$

Ist L ungerade, so reduziert sich (3.10) auf

$$\Phi_n^{\mathrm{I}}(Z_{\mathrm{G}}, E) = \Phi_n^{\mathrm{II}}(Z_{\mathrm{G}}, E) \quad n = 0, 1, \ldots, L; \quad L \text{ ungerade.} \tag{3.11}$$

Die Zahl der Anschlußbedingungen ist in diesem Fall ebenso groß wie die Zahl der freien Konstanten, nämlich $L + 1$ (vgl. die oben genannten Spezialfälle und [2]). Beim ebenen Problem mit geradzahligem L ist die Zahl der Anschlußbedingungen (3.10) gleichfalls $L + 1$, die Zahl der freien Konstanten dagegen nur L. In diesem Fall ergibt jeweils die letzte der Anschlußbedingungen (3.10) mit $n = L$ keine neue Aussage (wie man sich für bestimmte Zahlenwerte von L klarmachen kann), so daß nur L wesentlich verschiedene Bedingungen auftreten.

Auf dem äußeren Rand Z_{R} (gegen Vakuum) gehen wir von der Randbedingung (1.13) aus, die das Verschwinden von $\mu \cdot \Phi(Z_{\mathrm{R}}, E, \mu)$ für alle in das Medium weisenden Flugrichtungen, d. h. für $\mu < 0$, fordert. In der P_L-Approximation verlangen wir entsprechend das Verschwinden aller Momente einer Entwicklung von $\mu \cdot \Phi(Z_{\mathrm{R}}, E, \mu)$ im Halbraum $\mu < 0$. Als Orthogonalsystem für die Entwicklung im Halbraum $\mu < 0$ stehen die geradzahligen oder die ungeradzahligen Kugelfunktionen zur Verfügung. Verwenden wir die geradzahligen Kugelfunktionen, so lauten die Randbedingungen [20]

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{P}_n(\mu) \; \mu \, \Phi(Z_{\mathrm{R}}, E, \mu) \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad n = 0, 2, 4, \ldots \tag{3.12}$$

In diesem Fall ist die Randbedingung (2.30) als Spezialfall für $n = 0$ in (3.12) enthalten. Auf dem linken und rechten Rand sind zusammen gerade soviele Bedingungen wie auf der Grenze zweier Medien zugelassen [2]. (3.12) stellt also für den rechten Rand die richtige Zahl von Randbedingungen dar.

Mit (3.7) geht (3.12) in die Marshakschen Randbedingungen

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{P}_n(\mu) \, \Phi(Z_{\mathrm{R}}, E, \mu) \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{3.13}$$

über, die in der Literatur meist benutzt werden. Bei mehrdimensionalen Problemen liefern die verallgemeinerten Marshakschen Randbedingungen überzählige Bedingungen, während eine Verallgemeinerung von (3.12) zu keinen Widersprüchen führt. Weitere widerspruchsfreie Randbedingungen sind in [1,4] diskutiert.

Eine häufig benützte Randbedingung ist die Forderung

$$\Phi(Z_S, E, \mu) = \Phi(Z_S, E, -\mu). \tag{3.14}$$

Sie wird an solchen Stellen Z_S verwendet, bei denen die Materialverteilung des zu berechnenden Problems auf Symmetrie in der winkelabhängigen Flußdichte schließen läßt, z. B. in der Mitte eines homogenen Einzonenreaktors. Wir setzen den Ansatz (3.1) unter Berücksichtigung der Beziehung

$$P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu) \tag{3.15}$$

in (3.14) ein und erhalten

$$\sum_{n=0}^{L} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(Z_S, E) P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{L} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(Z_S, E) (-1)^n P_n(\mu). \tag{3.16}$$

Man erkennt, daß diese Gleichung nur dann erfüllbar ist, wenn die ungeraden Flußmomente verschwinden. Aus der Symmetrieforderung (3.14) folgen also die Bedingungen

$$\Phi_n(Z_S, E) = 0, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.17}$$

Die Symmetrieforderung (3.17) im Zentrum des Reaktors liefert also gerade soviele Gleichungen wie der äußere Rand und kann daher zusammen mit (3.12) zur Festlegung der Lösung im homogenen Reaktor dienen.

Eine Lösung der orts- und energieabhängigen Momentegleichungen (3.9) mit den Anschluß- und Randbedingungen (3.10–12) kann im allgemeinen nur mit numerischen Methoden gewonnen werden. Zu diesem Zweck geht man nach dem Vorbild von (2.39–40) zu Gruppengleichungen über und löst diese nach einem Differenzenverfahren [5]. Im eindimensionalen, monoenergetischen Fall läßt sich das System auch analytisch lösen [6].

3.1.2. Die Doppel-P_L-Approximation

Aufstellung der Differentialgleichungen. Die Vakuumrandbedingung (1.13) kann in der P_L-Approximation auch bei Näherungen hoher Ordnung nur unvollkommen erfüllt werden. Dies zeigt Abb. 3.1 durch die Gegenüberstellung zweier Näherungslösungen und

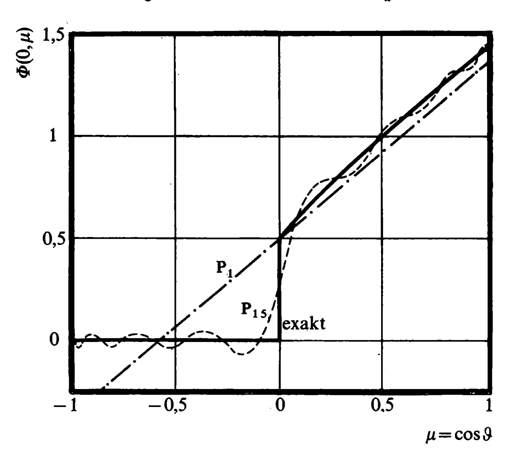


Abb. 3.1: Winkelverteilung der Neutronenflußdichte auf der Grenze $Z_R = 0$ eines nichtabsorbierenden, isotrop streuenden Mediums gegen Vakuum für verschiedene Näherungen (nach [7]).

der exakten Richtungsverteilung auf der Oberfläche $Z_R = 0$ eines unendlich ausgedehnten, nichtabsorbierenden Halbraums mit isotroper Streuung und Quellen im Unendlichen (Milne-Problem). $\Phi(0, \mu)$ sollte im Halbraum $\mu < 0$ exakt verschwinden. Da die Winkelabhängigkeit in der P_L-Approximation durch Überlagerung von Kugelfunktionen $P_l(\mu)$ beschrieben wird, die nur für einzelne μ-Werte, nicht aber für den ganzen Halbraum verschwinden können, ergibt sich als Lösung eine um die exakte Lösung oszillierende Funktion. Dabei treten physikalisch unsinnige, negative Flußdichten auf. Um eine gute Annäherung an die exakte Lösung zu bekommen, muß eine P_L-Approximation sehr hoher Ordnung gewählt werden.

Um derartige Beispiele mit geringerem Rechenaufwand rechnen zu können, hat Yvon [8] vorgeschlagen, die winkelabhängige Flußdichte in den beiden Halbräumen mit $\mu > 0$ und $\mu < 0$ getrennt nach Kugelfunktionen zu entwickeln.

$$\Phi(z, E, \mu) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{L} (2\,l + 1)\, f_l^+(z, E)\, P_l(2\,\mu - 1) \text{ für } 0 < \mu \le +1, \\ \sum_{l=0}^{L} (2\,l + 1)\, f_l^-(z, E)\, P_l(2\,\mu + 1) \text{ für } -1 \le \mu < 0; \end{cases} \tag{3.18}$$

$$f_l^+(z, E) = \int_0^{+1} P_l(2\,\mu - 1)\,\Phi(z, E, \mu)\,\mathrm{d}\mu,$$
$$f_l^-(z, E) = \int_{-1}^{0} \mathrm{P}_l(2\,\mu + 1)\,\Phi(z, E, \mu)\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.19}$$

Die Funktionen $\mathrm{P}_l(2\,\mu - 1)$ und $\mathrm{P}_l(2\,\mu + 1)$ sind die in den Halbräumen mit $\mu > 0$ bzw. $\mu < 0$ orthogonalen Kugelfunktionen mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{+1} \mathrm{P}_l(2\,\mu - 1)\,\mathrm{P}_{l'}(2\,\mu - 1)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\,l + 1}\,\delta_{ll'},$$
$$\int_{-1}^{0} \mathrm{P}_l(2\,\mu + 1)\,\mathrm{P}_{l'}(2\,\mu + 1)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\,l + 1}\,\delta_{ll'}. \tag{3.20}$$

Mit diesem Ansatz können winkelabhängige Flußdichten, die bei $\mu = 0$ unstetig sind, exakt dargestellt werden. Die Sprungstelle bei $\mu = 0$ in (3.18) ist außerdem gut geeignet, um eine starke Winkelabhängigkeit der Flußdichte im Bereich um $\mu = 0$, wie sie z. B. in der Umgebung der gemeinsamen Grenzfläche zweier Medien mit großen Unterschieden in den Wirkungsquerschnitten auftritt, zu approximieren. Bei Schichten, die nur wenige mittlere freie Weglängen dick sind, ist demnach beim Ansatz (3.18) eine bessere Konvergenz zu erwarten als bei der Kugelfunktionsentwicklung (3.1). Andererseits wirkt sich die Unstetigkeit in (3.18) bei dicken Schichten, in denen die Grenzschicht nur eine unwesentliche Störung bewirkt, sicher ungünstig aus. Daher ist in solchen Gebieten die P_L-Approximation vorteilhafter als die Doppel-P_L-Approximation.

Die Gleichungen für die Momente im Ansatz (3.18) erhalten wir nach derselben Methode wie bei der P_L-Approximation. Wir setzen den Ansatz (3.18) in die Boltzmann-Gleichung (2.3) ein, multiplizieren mit $\mathrm{P}_n(2\,\mu - 1)$ und integrieren über μ von 0 bis $+\,1$. Unter Verwendung der aus (3.7) folgenden Beziehung

$$2\,\mu \cdot \mathrm{P}_l(2\,\mu \pm 1) = \frac{l}{2\,l + 1}\,\mathrm{P}_{l-1}(2\,\mu \pm 1) \mp \mathrm{P}_l(2\,\mu \pm 1) + \frac{l + 1}{2\,l + 1}\,\mathrm{P}_{l+1}(2\,\mu \pm 1) \tag{3.21}$$

und der Orthogonalitätsrelation (3.20) erhalten wir

$$\frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{\partial}{\partial z}f_{n+1}^{+}(z,E)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}f_{n}^{+}(z,E)+$$
$$+\frac{n}{2(2n+1)}\frac{\partial}{\partial z}f_{n-1}^{+}(z,E)+\Sigma_{\mathrm{T}}f_{n}^{+}(z,E)$$
$$=\int_{E'}\mathrm{d}E'\sum_{l=0}^{L'}\frac{2l+1}{2}\Sigma_{\mathrm{S}l}(E'\to E)\,\Phi_l(z,E')\int_{\mu=0}^{+1}\mathrm{P}_l(\mu)\mathrm{P}_n(2\mu-1)\,\mathrm{d}\mu+ \tag{3.22a}$$
$$+\tfrac{1}{2}\chi(E)\int_{E'}\mathrm{d}E'\,\nu(E')\,\Sigma_{\mathrm{f}}(E')\,\Phi_0(z,E')\int_{\mu=0}^{+1}\mathrm{P}_n(2\mu-1)\,\mathrm{d}\mu,$$
$$n=0,1,2,\ldots,L.$$

Eine entsprechende Gleichung für die $f_n^{-}(z,E)$ entsteht durch Multiplikation mit $\mathrm{P}_n(2\mu+1)$ und Integration über μ von -1 bis 0:

$$\frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{\partial}{\partial z}f_{n+1}^{-}(z,E)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}f_{n}^{-}(z,E)+$$
$$+\frac{n}{2(2n+1)}\frac{\partial}{\partial z}f_{n-1}^{-}(z,E)+\Sigma_{\mathrm{T}}f_{n}^{-}(z,E)$$
$$=\int_{E'}\mathrm{d}E'\sum_{l=0}^{L'}\frac{2l+1}{2}\Sigma_{\mathrm{S}l}(E'\to E)\,\Phi_l(z,E')\int_{\mu=-1}^{0}\mathrm{P}_l(\mu)\mathrm{P}_n(2\mu+1)\,\mathrm{d}\mu+ \tag{3.22b}$$
$$+\frac{1}{2}\chi(E)\int_{E'}\mathrm{d}E'\,\nu(E')\,\Sigma_{\mathrm{f}}(E')\,\Phi_0(z,E')\int_{\mu=-1}^{0}\mathrm{P}_n(2\mu+1)\,\mathrm{d}\mu,$$
$$n=0,1,2,\ldots,L.$$

Der Approximationsgrad L' des Streukerns kann hier im Gegensatz zur P_L-Approximation größer als der Approximationsgrad L der Flußdichte sein.

Die Integrale

$$\int_{\mu=0}^{+1}\mathrm{P}_l(\mu)\cdot\mathrm{P}_n(2\mu-1)\,\mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mu=-1}^{0}\mathrm{P}_l(\mu)\cdot\mathrm{P}_n(2\mu+1)\,\mathrm{d}\mu$$

in (3.22) lassen sich allgemein nicht auf einfache Weise auswerten. Da die $P_n(2\mu \pm 1)$ jedoch immer durch eine Linearkombination von gewöhnlichen Kugelfunktionen dargestellt werden können, lassen sich die Integrale auf die bekannte Form $\int_{\mu=0}^{+1} P_l(\mu) \cdot P_{l'}(\mu)\, d\mu$ zurückführen [9].

Den Zusammenhang zwischen den Momenten der P_L-Approximation, die auf den rechten Seiten von (3.22) stehen, und den Momenten der Doppel-P_L-Approximation erhalten wir durch Einsetzen des Ansatzes (3.18) in (2.8):

$$\begin{aligned}\Phi_n(z, E) = \int_{-1}^{0} \sum_{l=0}^{L} (2l+1)\, f_l^-(z, E)\, P_l(2\mu+1)\, P_n(\mu)\, d\mu\, + \\ + \int_{0}^{+1} \sum_{l=0}^{L} (2l+1)\, f_l^+(z, E)\, P_l(2\mu-1)\, P_n(\mu)\, d\mu.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die P_L-Momente aus (3.22) eliminieren.

Anschluß- und Randbedingungen. Als Anschlußbedingungen verlangen wir analog zu (3.11) die Stetigkeit der Momente auf einer Grenze Z_G

$$f_n^{\pm\,\mathrm{I}}(Z_G, E) = f_n^{\pm\,\mathrm{II}}(Z_G, E), \quad n = 0, 1, \ldots, L. \tag{3.24}$$

Das sind beim ebenen Problem $2(L+1)$ Beziehungen bei $2(L+1)$ freien Konstanten.

Die Randbedingung an der Grenze gegen Vakuum war, wie schon erwähnt, der Anlaß für die Verwendung einer Doppelentwicklung in der Neutronentransporttheorie. Sie läßt sich dementsprechend einfach formulieren. Aus der Bedingung $\mu\, \Phi(Z_R, E, \mu) = 0$ für $\mu < 0$ folgt

$$f_n^-(Z_R, E) = 0 \qquad n = 0, 1, \ldots, L. \tag{3.25}$$

Im Gegensatz zur P_L-Approximation können diese $L+1$ Bedingungen die Verhältnisse an einer Vakuumgrenze exakt wiedergeben.

Die Symmetriebedingung (3.14) ergibt mit dem Ansatz (3.18) für $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{L} (2n+1)\, f_n^+(Z_S, E)\, P_n(2\mu-1) = \\ = \sum_{n=0}^{L} (2n+1)\, f_n^-(Z_S, E)\, P_n(-2\mu+1).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Unter Berücksichtigung von (3.15) folgen daraus die $L + 1$ Beziehungen

$$f_n^+(Z_S, E) = (-1)^n f_n^-(Z_S, E) \quad n = 0, 1, \ldots, L. \qquad (3.27)$$

Die (3.26) entsprechende Gleichung für $\mu < 0$ führt ebenfalls zum Ergebnis (3.27).

Mit der Transformation (3.23) lassen sich die Momentegleichungen (3.22) so umformen, daß sie nur noch die Momente der P_L-Approximation enthalten. Das resultierende Differentialgleichungssystem für den Approximationsgrad L hat in ebener und sphärischer Geometrie dieselbe Form wie das System der P_{2L+1}-Approximation. Den einzigen Unterschied bilden konstante Koeffizienten (vgl. [10]). Dadurch können alle P_L-Programme für ebene und sphärische Geometrie nach einfachen Änderungen auch zur Lösung der entsprechenden Doppel-P_L-Gleichungen verwendet werden.

3.1.3. Die B_L*-Approximation*

Zur Berechnung der Neutronenspektren und Gruppenkonstanten in unendlich ausgedehnten oder in endlichen homogenen Medien wird vielfach die B_L-Approximation verwendet [11]. Sie konvergiert rascher als die P_L-Approximation für gleiches L. Wir gelangen zu ihr durch folgende Überlegung:

Bei homogenen Medien kann die Boltzmann-Gleichung (2.3) durch eine Fourier-Transformation vereinfacht werden. Wir multiplizieren Gl. (2.3) mit $\exp(-\mathrm{i}\, B z)$ und integrieren über alle z. Für die Fourier-Transformierte der Flußdichte Φ

$$\bar{\Phi}(B, E, \mu) = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} B z}\, \Phi(z, E, \mu)\, \mathrm{d}z, \qquad (3.28)$$

$$\Phi(z, E, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{B=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i} B z}\, \bar{\Phi}(B, E, \mu)\, \mathrm{d}B \qquad (3.29)$$

gilt dann die folgende Gleichung:

$$(\Sigma_T + \mathrm{i} B \mu)\, \bar{\Phi}(B, E, \mu) = \bar{S}(B, E, \mu) + \bar{F}(B, E, \mu). \qquad (3.30)$$

In dieser Gleichung entwickeln wir die winkelabhängigen Terme nach Kugelfunktionen (analog zu (3.1–5)):

$$\bar{\Phi}(B, E, \mu) = \sum_l \frac{2l+1}{2} \bar{\Phi}_l(B, E) \cdot \mathrm{P}_l(\mu), \tag{3.31}$$

$$\bar{S}(B, E, \mu) = \int_{E'} \mathrm{d}E' \sum_l \frac{2l+1}{2} \Sigma_{\mathrm{S}l}(E' \to E) \cdot \bar{\Phi}_l(B, E') \cdot \mathrm{P}_l(\mu), \tag{3.32}$$

$$\bar{F}(B, E, \mu) = \tfrac{1}{2} \chi(E) \int_{E'} \mathrm{d}E' \cdot \nu(E') \cdot \Sigma_{\mathrm{f}}(E') \cdot \bar{\Phi}_0(B, E'). \tag{3.33}$$

Würden wir die so entstehende Boltzmann-Gleichung mit $\mathrm{P}_n(\mu)$ multiplizieren und über μ integrieren, so erhielten wir die Fourier-Transformierte der P_L-Momentegleichung (3.9). Zur Ableitung der B_L-Approximation wird Gl. (3.30) vor der Integration durch den Faktor $(1 + \mathrm{i}\, B\, \mu/\Sigma_{\mathrm{T}})$ dividiert. Wir erhalten damit aus (3.30) folgende Bestimmungsgleichungen für die Fourier-Transformierten der Flußmomente

$$\Sigma_{\mathrm{T}} \bar{\Phi}_n(B, E) = \sum_l (2l+1) A_{nl} \int_{E'} \Sigma_{\mathrm{S}l}(E' \to E)\, \bar{\Phi}_l(B, E')\, \mathrm{d}E' +$$
$$+ A_{00}\, \chi(E) \int_{E'} \nu(E')\, \Sigma_{\mathrm{f}}(E')\, \bar{\Phi}_0(B, E')\, \mathrm{d}E', \tag{3.34}$$

mit

$$A_{nl} = \tfrac{1}{2} \int_{\mu=-1}^{+1} \frac{\mathrm{P}_n(\mu) \cdot \mathrm{P}_l(\mu)}{1 + \mathrm{i} B \mu/\Sigma_{\mathrm{T}}} \mathrm{d}\mu, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

In der B_L-Approximation bricht man die Reihenentwicklung des Streukerns nach der Kugelfunktion mit $l = L$ ab,

$$\Sigma_{\mathrm{S}l}(E' \to E) = 0 \quad \text{für} \quad l > L, \tag{3.36}$$

nicht dagegen die Entwicklung der Flußdichte. n läuft von 0 bis ∞. Hierin unterscheidet sich die B_L-Approximation von der P_L-Approximation.

3.2. S_N-*Verfahren*

Das S_N-Verfahren von Carlson zielt von vornherein auf eine rein numerische Integration mit Hilfe schneller Digitalmaschinen. Die Energieabhängigkeit wird im Rahmen der Vielgruppennäherung berücksichtigt. Für das ebene Problem lauten die Gruppentransportgleichungen ($g = 1, 2, \ldots, G$):

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \Phi_g(z, \mu) + \Sigma_{\mathrm{T}g} \Phi_g(z, \mu) = Q_g(z, \mu) \tag{3.37}$$

mit Q_g nach (1.14).

Über den Integrationsbereich der beiden Variablen z und μ wird zunächst ein Maschennetz gelegt. Der Bereich $-1 \leq \mu \leq +1$ der Winkelkoordinate $\mu = \cos \vartheta$ wird durch die Punkte $\mu_m = -1 + 2m/N$ $(m = 0, 1, \ldots, N)$ in N Intervalle $\Delta \mu_m = \mu_m - \mu_{m-1} = 2/N$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ eingeteilt (S_N-Approximation). Für den Bereich der Ortskoordinate $-Z_{\mathrm{R}} \leq z \leq Z_{\mathrm{R}}$ lassen wir eine beliebige Unterteilung durch die Punkte z_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, R)$ in die Intervalle $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ zu. Materialgrenzen sollen mit Intervallgrenzen zusammenfallen.

Wir integrieren nun die Transportgleichung über eine Maschenzelle (s. Abb. 3.2). Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$\int\limits_{z = z_{i-1}}^{z_i} \mathrm{d}z \int\limits_{\mu = \mu_{m-1}}^{\mu_m} \mathrm{d}\mu \, \Phi_g(z, \mu) = \Phi_g(\bar{z}_i, \bar{\mu}_m) \, \Delta \mu_m \, \Delta z_i, \tag{3.38}$$

$$\int\limits_{z = z_{i-1}}^{z_i} \mathrm{d}z \, \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{\mu = \mu_{m-1}}^{\mu_m} \mathrm{d}\mu \, \mu \, \Phi_g(z, \mu) = \mu_m^* \left[\Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m) - \Phi_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right] \Delta \mu_m . \tag{3.39}$$

$\bar{z}_i$, $\bar{\mu}_m$ und μ_m^* sind dabei bestimmte Werte im Innern der Maschenzelle. CARLSON setzt näherungsweise

$$\Phi_g(\bar{z}_i, \bar{\mu}_m) = \tfrac{1}{2}\left[\Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m) + \Phi_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right], \tag{3.40}$$

$$\mu_m^* = \bar{\mu}_m . \tag{3.41}$$

Abb. 3.2: Maschenzelle für das S_N-Verfahren in ebener Geometrie.

Bei Summation über alle Indizes m (alle Richtungen) müssen sich Flußdichte und Stromdichte wie folgt darstellen lassen:

$$\Phi_g(z_i) = \sum_{m=1}^{N} \Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m)\, \Delta\mu_m, \tag{3.42}$$

$$j_{zg}(z_i) = \sum_{m=1}^{N} \bar{\mu}_m\, \Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m)\, \Delta\mu_m. \tag{3.43}$$

CARLSON wählt die $\bar{\mu}_m$ so, daß in der Diffusionsnäherung, wo die Flußdichte die Form

$$\Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m) = \tfrac{1}{2}\, \Phi_g(z_i) + \tfrac{3}{2}\, j_{zg}(z_i) \cdot \bar{\mu}_m \tag{3.44}$$

hat, Gl. (3.43) mit (3.44) exakt erfüllt ist. Dies führt zu den Bedingungen

$$\sum_{m=1}^{N} \bar{\mu}_m \frac{\Delta\mu_m}{2} = 0, \tag{3.45}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \bar{\mu}_m^2 \frac{\Delta\mu_m}{2} = \tfrac{1}{3}. \tag{3.46}$$

Diese werden durch den Ansatz

$$\bar{\mu}_m = \tfrac{1}{2}(\mu_m + \mu_{m-1}) + \varepsilon \tag{3.47}$$

mit

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{4}{3\,N^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \operatorname{sign}(\mu_m + \mu_{m-1}) \tag{3.48}$$

befriedigt. Die Quelldichte kann analog zu (1.14) durch die Flußdichte ausgedrückt werden. Beschränken wir uns auf eine lineare Anisotropie im Streuquerschnitt analog zu (2.19), so folgt

$$\begin{aligned} Q_g(\bar{z}_i, \bar{\mu}_m) = {} & \tfrac{1}{2}\, \chi_g \sum_{g'} \nu_{g'}\, \Sigma_{f\,g'}\, \Phi_{g'}(\bar{z}_i) + \\ & + \tfrac{1}{2} \sum_{g'} \Sigma_{S0\; g' \to g}\, \Phi_{0\,g'}(\bar{z}_i) + \\ & + \tfrac{3}{2} \sum_{g'} \Sigma_{S1\; g' \to g}\, j_{z\,g'}(\bar{z}_i)\, \bar{\mu}_m \end{aligned} \tag{3.49}$$

mit $\Phi_{g'}(\bar{z}_i)$ und $j_{z\,g'}(\bar{z}_i)$ nach (3.42–43). Ferner gilt analog zu (3.40)

$$Q_g(\bar{z}_i, \bar{\mu}_m) = \tfrac{1}{2}\left[Q_g(z_i, \bar{\mu}_m) + Q_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right]. \tag{3.50}$$

Damit kann die Bilanzgleichung für die Maschenzelle wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_m\left[\Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m) - \Phi_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right] + \\ + \frac{\Delta z_i}{2}\,\Sigma_{\mathrm{T}\,g}\left[\Phi_g(z_i, \bar{\mu}_m) + \Phi_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right] + \\ + \frac{\Delta z_i}{2}\left[Q_g(z_i, \bar{\mu}_m) + Q_g(z_{i-1}, \bar{\mu}_m)\right] = 0.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Lassen wir m, i und g alle im Reaktor oder im Gitterausschnitt möglichen Werte durchlaufen

$$m = 1, 2, \ldots, N,$$
$$i = 1, 2, \ldots, R,$$
$$g = 1, 2, \ldots, G,$$

so erhalten wir ein großes Gleichungssystem, das nur durch Iteration gelöst werden kann [12]. Auf der Grenze Z_{G} zweier Medien sind dabei die $\bar{\mu}_m\,\Phi_g(Z_{\mathrm{G}}, \bar{\mu}_m)$ für alle $\bar{\mu}_m$ (ausgenommen $\bar{\mu}_m = 0$, das aber nach obiger Annahme gar nicht auftritt) als stetig anzunehmen:

$$\Phi_g^{\mathrm{I}}(Z_{\mathrm{G}}, \bar{\mu}_m) = \Phi_g^{\mathrm{II}}(Z_{\mathrm{G}}, \bar{\mu}_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.52}$$

Auf dem Rand gegen Vakuum ist

$$\Phi_g(Z_{\mathrm{R}}, \bar{\mu}_m) = 0 \quad \text{für } \bar{\mu}_m < 0 \tag{3.53}$$

zu fordern.

Bei kugel- und zylindersymmetrischen Problemen sowie bei mehrdimensionalen S_N-Rechnungen sind weitergehende Überlegungen bei der Aufstellung der Bilanzgleichung notwendig, s. dazu [12–13].

3.3. *Die Erststoßmethode*

In stark heterogenen Medien konvergieren S_N- und P_L-Approximationen im allgemeinen langsam. Um die Flußdichte bzw. Stoßratendichte in den einzelnen Gebieten mit genügender Ge-

nauigkeit erfassen zu können, müssen Approximationen mit hoher Ordnung herangezogen werden. In solchen Fällen erhält man oftmals bei gleichem Rechenaufwand höhere Genauigkeit, wenn man das Erststoßverfahren anwendet.

Zur Herleitung dieses Verfahrens gehen wir von der integralen Transportgleichung (1.21) aus. Die Zahl der Stöße im Gebiet k der heterogenen Anordnung, herrührend von Neutronen im Intervall $\mathrm{d}E$ um E, erhalten wir aus (1.21) durch Multiplikation mit Σ_T und Integration über das Volumen V^k und alle Flugrichtungen $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\int_{V^k}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \Sigma_\mathrm{T}(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E =$$

$$= \int_{V^k}\int_{\boldsymbol{\Omega}}\int_{R'} Q(\boldsymbol{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{R''=0}^{R'} \Sigma_\mathrm{T}(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, \mathrm{d}R''} \cdot$$

$$\cdot\, \Sigma_\mathrm{T}(\boldsymbol{r}, E)\, \mathrm{d}R'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}E. \tag{3.54}$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Größen ein:

$$\Phi^k(E) = \frac{1}{V^k}\int_{V^k}\int_{\boldsymbol{\Omega}} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V \tag{3.55}$$

ist die mittlere Flußdichte im Gebiet k;

$$P^{ik}(E) = \frac{1}{V^i\, Q^i(E)}\int_{V^k}\int_{V^i} Q(\boldsymbol{r}', E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{e}^{-\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R}}\, \Sigma_\mathrm{T}(\boldsymbol{r}, E)\, \frac{\mathrm{d}V'}{R'^2}\, \mathrm{d}V \tag{3.56}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein im Gebiet i freigesetztes oder gestreutes Neutron seinen nächsten Stoß im Gebiet k macht (vgl. Abschn. III. 4.1.2); ferner ist

$$\mathrm{d}V' = R'^2\, \mathrm{d}R'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}, \tag{3.57}$$

$$\widetilde{\Sigma_\mathrm{T} R} = \int\limits_{R''=0}^{R'} \Sigma_\mathrm{T}(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, \mathrm{d}R'', \tag{3.58}$$

$$Q^i(E) = \frac{1}{V^i}\int_{V^i}\int_{\boldsymbol{\Omega}} Q(\boldsymbol{r}_i, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\, \mathrm{d}V_i. \tag{3.59}$$

Damit erhält (3.54) die folgende Form:

$$V^k \, \Sigma_T{}^k(E) \, \Phi^k(E) = \sum_i V^i \, Q^i(E) \, P^{ik}(E). \tag{3.60}$$

Zur Berechnung der Erststoßwahrscheinlichkeit kann in vielen Fällen näherungsweise eine räumlich konstante isotrope Quelldichte angenommen werden. In diesem Falle gilt (vgl. (III. 4.4))

$$P^{ik}(E) = \frac{1}{V^i} \int\limits_{V^k} \int\limits_{V^i} \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E) \, \frac{e^{-\widetilde{\Sigma_T R}}}{4 \pi R^2} \, dV' \, dV. \tag{3.61}$$

Diese Größen hängen nur noch von der räumlichen Struktur und den Wirkungsquerschnitten der heterogenen Anordnung ab. Sind die P^{ik} berechnet, so können die Flußmittelwerte in den verschiedenen Gebieten aus dem algebraischen Gleichungssystem (3.60) bestimmt werden. Bei hinreichend feiner Gebietseinteilung liefert das Erststoßverfahren eine exakte Lösung der Transportgleichung.

Bei anisotroper Streuung müssen zusätzliche Gleichungen für die höheren Momente der Quell- und Flußdichte berücksichtigt werden. Wir zeigen die Verhältnisse am Beispiel des ebenen Problems. Setzen wir in die integrale Transportgleichung die Kugelfunktionsentwicklungen für die Flußdichte (3.1) und den differentiellen Wirkungsquerschnitt (3.2) ein und multiplizieren vor der Integration über μ mit der Kugelfunktion $P_n(\mu)$, so folgt anstelle von (3.60)

$$V^k \, \Sigma_T^k(E) \, \Phi_n^k(E) = \sum_i \sum_l V^i \, Q_l^i(E) \, P_{ln}^{ik}(E) \tag{3.62}$$

mit

$$P_{ln}^{ik}(E) = \frac{(2l+1)}{V^i} \int\limits_{V^k} \int\limits_{V^i} \Sigma_T(z, E) \, P_l(\mu) \, P_n(\mu) \, \frac{e^{-\widetilde{\Sigma_T R}}}{4 \pi R^2} \, dV' \, dV. \tag{3.63}$$

Von der Erststoßmethode in der Form (3.60) wurde in den Kap. III und IV Gebrauch gemacht. Bezüglich der Berechnung der Erststoßwahrscheinlichkeiten und weiterer Anwendungen sei auf die Literatur verwiesen, z. B. [14–15].

3.4. Monte-Carlo-Methode

Bei dreidimensionalen energie- und richtungsabhängigen Transportproblemen werden die oben beschriebenen Lösungsverfahren

für die heute zur Verfügung stehenden Rechenmaschinen gewöhnlich zu aufwendig. Man bedient sich in diesen Fällen vielfach statistischer Methoden zur Lösung des Transportproblems.

Bei der Monte-Carlo-Methode werden die Einzelschicksale einer großen Zahl von Neutronen zwischen Emission bei der Spaltung und Absorption verfolgt, indem die jeweilige Flugrichtung, die Flugstrecke bis zum nächsten Stoß, die Art des Stoßprozesses usw. mit Hilfe von Zufallszahlen festgelegt werden, wobei die physikalischen Verteilungsgesetze zu berücksichtigen sind. Durch die Aneinanderreihung der Prozesse und Überlagerung der Einzelschicksale gewinnt man eine statistische Stichprobe, die eine Aussage über die mittlere Verteilung der Neutronen bezüglich Ort, Energie und Flugrichtung erlaubt. Werden z. B. von einer Spaltquelle Neutronen isotrop emittiert, so gelangen sie mit der Wahrscheinlichkeit $\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\mu/4\,\pi = \mathrm{d}\mu/2$ in das Element $\mathrm{d}\mu$ um μ. Damit dieses physikalische Gesetz bei der Betrachtung sehr vieler Neutronen erfüllt ist, muß man im Einzelfall die Zufallszahl z aus deren Gleichverteilung im Intervall $0 \leq z \leq 1$ ziehen und damit μ gemäß $\mu = 2\,z - 1$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\mu/2$, bestimmen. Danach wird die Flugstrecke r bis zum ersten Stoß durch Ziehen einer weiteren Zufallszahl z bestimmt. Der Zusammenhang zwischen z und r ist $z = 1 - \exp(-\Sigma_{\mathrm{T}}\, r)$, $\mathrm{d}z = \exp(-\Sigma_{\mathrm{T}}\, r) \cdot \Sigma_{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}r$. Die Entscheidung, ob der erste Stoß eine Streuung oder eine Absorption ergibt, muß nach Maßgabe der makroskopischen Wirkungsquerschnitte an der betreffenden Stelle mit Hilfe einer dritten Zufallszahl getroffen werden: $z < \Sigma_{\mathrm{A}}/\Sigma_{\mathrm{T}}$ wird als Absorption gezählt, $z \geq \Sigma_{\mathrm{A}}/\Sigma_{\mathrm{T}}$ als Streuung. Liegt eine Streuung vor, so wird eine neue Flugrichtung und die entsprechende Neutronenenergie ermittelt, usw. Auf diese Weise können die Zickzackwege der Neutronen bis zur Absorption oder bis zum Verlust durch Ausströmen verfolgt werden. Um statistisch verläßliche Ergebnisse zu bekommen, muß eine hinreichend große Zahl von Einzelschicksalen durchgerechnet werden. Durch besondere Techniken, wie z. B. Einführung geeigneter Gewichte, Anwendung von „Splitting" und Russischem Roulette [16–17] versucht man, die gleiche Genauigkeit aus einer geringeren Zahl von Einzelschicksalen zu erhalten.

Ein flexibles Rechenprogramm auf der Grundlage der Monte-Carlo-Methode ist in neuerer Zeit vom Oak Ridge National Laboratory herausgebracht worden [18]. Beispiele für die Anwendung der

Monte-Carlo-Rechnung auf bestimmte Reaktorprobleme sind z. B. bei RIEF und KSCHWENDT [19] angegeben.

Aufgaben

3.1. Man leite die Momentegleichungen der P_L-Approximation in sphärischer Geometrie ab.

3.2. Man stelle die Gleichungen der monoenergetischen Doppel-P_0-Approximation für linear anisotrope Streuung ($L' = 1$) auf, transformiere die $f_n^{\pm}$ in Momente der P_L-Approximation und vergleiche die resultierenden Gleichungen mit den P_1-Gleichungen. Welcher Ausdruck entspricht nach der Doppel-P_0-Approximation der Diffusionskonstante?

Literaturverzeichnis

[1] RUMJANCEV, G. J.: Randbedingungen bei der Kugelfunktionsmethode. Kernenergie 4, 501 (1961).

[2] DAVISON, B.: Neutron Transport Theory. The Clarendon Press Oxford, 1957.

[3] JOANOU, G. D., and J. S. DUDEK: GAM-I: A consistent P_1 multigroup code for the calculation of fast neutron spectra and multigroup constants. GA-1850 (1961).

[4] DEDE, K. M., and Z. T. BÖDY: Vacuum boundary conditions for multidimensional spherical harmonics method. Nukleonik 8, 388 (1966).

[5] SIEGERT, H. J.: PLE, Programm zur Lösung der Multigruppen-P_L-Gleichungen in ebener Geometrie. Inst. f. Kernenergetik, Stuttgart, 1966.

[6] MARK, C.: The spherical harmonics Method. CRT-338 (1957).

[7] WEINBERG, A. M., and E. P. WIGNER: The physical theory of neutron chain reactors. The University of Chicago Press, 1958.

[8] YVON, J.: La diffusion macroscopique des neutrons, une méthode d'approximation. J. Nucl. Energy 4, 305 (1957).

[9] RYSHIK, I. M., und I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1957.

[10] GELBARD, E., J. DAVIS, and J. PEARSON: Iterative solution to the P_L and double P_L Equations, Nucl. Sci. Eng. 5, 36 (1959).

[11] JOANOU, G. D., and J. S. DUDEK: GAM-II: A B_3-code for the calculation of fast neutron spectra and associated multigroup constants. GA-4265 (1963).
JOANOU, G. D., C. V. SMITH, and H. A. VIEWEG: GATHER-II. An IBM-7090 program for the computation of thermal neutron spectra and associated multigroup cross sections. GA-4132 (1963).

[12] CARLSON, B. G.: Numerical formulation and solution of neutron transport problems. LA-2996 (1964).

[13] LEE, C. E.: The discrete S_N-approximation to transport theory. LA-2595 (1962).

[14] CARLVIK, I.: A method for calculating collision probabilities in general cylindrical geometry and applications to flux distributions and Dancoff factors. Proc. Third Int. Conf., Geneva 1964, Vol. 2, p. 225.

[15] MÄRKL, H.: New aspects in the application of collision probabilities in reactor theory. Proc. Third Int. Conf., Geneva 1964, Vol. 2, p. 207.

[16] MEYER, H. A. (Edit.): Symposium on Monte Carlo methods, New York. John Wiley London, 1954.

[17] GOERTZEL, G., and M. H. KALOS: Monte Carlo methods in transport problems. Progress in Nuclear Energy, Series I, Vol. II, p. 315. Pergamon Press New York, 1958.

[18] IRVING, D. C., R. M. TREERTONE jr., and F. B. K. KAM: O5R, a general purpose Monte Carlo neutron transport code. ORNL-3622 (1965).

[19] RIEF, H., and H. KSCHWENDT: Reactor analysis by Monte Carlo. Nucl. Sci. Eng. **30**, 395 (1967).

[20] EMENDÖRFER, D.: Randbedingungen für den Neutronenfluß im endlichen Zylinder nach der P_L-Approximation der Transportgleichung. Nukleonik 5, 74 (1963).

Lösungen der Aufgaben

I. 1.1. $E_\gamma = E_B = 2{,}2$ MeV.

I. 1.2. $E_{ges} = 1{,}29$ MeV, $E_{\beta^-, max} = E_{ges} - m_e c^2 = 0{,}78$ MeV.

I. 1.3. Ausgehend vom Grundzustand des ^{236}U ergeben sich für die Energie der Kernbruchstücke und der Kernstrahlung zusammen 198 MeV. Hinzu kommen 6,4 MeV Anregungsenergie, die bei der Anlagerung eines langsamen Neutrons an ^{235}U frei werden (s. Tab. I. 2.1).

I. 1.4. $E^{236}_{\text{Anreg.}} = E^{236}_B - E^{235}_B = 6{,}5$ MeV, $E^{239}_{\text{Anreg.}} = E^{239}_B - E^{238}_B = 5{,}0$ MeV. Der Unterschied zwischen den beiden Anregungsenergien wird überwiegend durch die Paarenergie hervorgerufen.

I. 1.5. $t = 6{,}0 \cdot 10^9$ a für $N^{238}(0)/N^{235}(0) = 1$.

I. 1.6. Unter Vernachlässigung der kurzlebigen Zwischenglieder gilt im Gleichgewicht: $N^{234}/N^{238} = \tau^{234}_{1/2}/\tau^{238}_{1/2} = 5{,}6 \cdot 10^{-5}$.

I. 2.1. Mit $\cos\vartheta = x$ und $\int\limits_{-1}^{+1} P_k \cdot P_l \, dx = 2\,\delta_{kl}/(2k+1)$ folgt für das Volumen des deformierten Kerns

$$V = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{x=-1}^{+1} \int\limits_{R=0}^{R(x)} R^2(x)\, dx\, d\varphi\, dR \approx V_{\text{Kugel}} \left(1 + 3\,\alpha_0 + \frac{3}{5}\,\alpha_2^2\right).$$

Wegen der Inkompressibilität der Kernmaterie muß $V = V_{\text{Kugel}}$ gelten, also $\alpha_0 = -\alpha_2^2/5$. Für die Oberfläche des deformierten Kerns folgt

$$O = 2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} R \sin\vartheta \sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta$$

$$= 2\pi \int\limits_{x=-1}^{+1} R(x) \sqrt{R^2(x) + (1 - x^2)\left(\frac{dR}{dx}\right)^2}\, dx \approx O_{\text{Kugel}} \left(1 + \frac{2}{5}\,\alpha_2^2\right).$$

Ferner gilt für den mittleren reziproken Radius

$$\overline{1/R} = 2\pi \int\limits_{x=-1}^{+1} \int\limits_{R=0}^{R(x)} \left(\frac{1}{R}\right) R^2\, dx\, dR/V \approx (\overline{1/R})_{\text{Kugel}} \left(1 - \frac{1}{5}\,\alpha_2^2\right).$$

Damit nimmt die Oberflächen- und Coulombenergie die angegebene Form an.

I. 3.1. Die Strahlungsleistung beträgt nach 1 h 10 MW, nach 1 d 4,3 MW und nach 100 d 0,43 MW.

I. 3.2. Für $T \ll t - T = \tau$ folgt mit $t^{-0,2} = (\tau + T)^{-0,2} \approx \tau^{-0,2}(1 - 0{,}2\; T/\tau)$ aus (I. 3.15) $A_\beta \approx 4{,}4\; P\; 0{,}2\; T\; \tau^{-1,2}$ Curie.

I. 3.3. 210 g ^{90}Sr.

I. 3.4. Aus (I. 3.18a,b) folgt durch Differenzieren $E_h = 0{,}655$ MeV bzw. $E_h = 0{,}645$ MeV.

I. 3.5. Rund 1 kg.

I. 3.6. $V_{\text{Spaltgas}} = 31\ \text{cm}^3$.

I. 4.1. 235 kg.

I. 4.2. $BR = \eta_s^{239}\, \varepsilon^{238}\, W_s - 1$.

I. 4.3. Beim Abbrand eines Spaltstoffkerns werden BR Brutstoffkerne umgewandelt. Beim Abbrand der BR aus Brutstoff gebildeten Spaltstoffkerne werden $(BR)^2$ Brutstoffkerne umgewandelt usw. Somit
$BR + (BR)^2 + \cdots = \mathrm{BR}/(1 - BR)$ für $BR < 1$.
Für $BR = 0{,}8$ ist diese Größe 4, für $BR = 0{,}9$ 9. Insgesamt können je ursprünglich eingesetzten Spaltstoffkern $1 + BR/(1 - BR)$ Brennstoffkerne gespalten werden. Die aus Natururan gewinnbare Kernenergie erhöht sich also infolge des Bruteffekts um den Faktor $1/(1 - BR)$. Für $BR = 0{,}8$ ist dieser Faktor 5, für $BR = 0{,}9$ 10.

II. 1.1. $\lambda_T^{H_2O} = 0{,}28$ cm, $\lambda_T^C = 2{,}6$ cm, $\lambda_T^U = 1{,}3$ cm, $\lambda_T^{235U} = 0{,}03$ cm.
Für Uranoxyd mit 3% ^{235}U gilt $\lambda_T^{UO_2} = 1{,}1$ cm. Der Durchmesser des Brennstoffstabes (1,34 cm) liegt in der Größe von $\lambda_T^{UO_2}$, die Dicke der Wasserschicht in der Zelle (0,5 cm) in der Größe von $2\,\lambda_T^{H_2O}$.

II. 1.2. Mit $N^H = 5 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}, $A = 2$ und $\sigma_T^H = 35$ b für die Energie $E = kT_0$ (s. Tab. II. 1.2) folgt aus (II. 1.36) $\lambda^{Neutr.} = 4{,}6$ m. Entsprechend ergibt sich für die Stöße zwischen Wasserstoffmolekülen mit $N^{H_2} = 2{,}5 \cdot 10^{19}$ Moleküle je cm^3, $\sigma^{H_2} = \pi \cdot (2\,R)^2$, $R^{H_2} = 1{,}36 \cdot 10^{-8}$ cm und $A = 1$ $\lambda^{H_2} = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm.

II. 1.3. Die Zahl der Stöße bis zur Absorption beträgt λ_A/λ_T. D_2O: 15000, Graphit: 1400, H_2O: 150, Natururan: 2.

II. 1.4. $e^{-\Sigma_T x} = 0{,}1$ für Cd und $x = d = 0{,}2$ mm.

II. 1.5. Setzt man (II.1. 38) in (II. 1.34) ein, so folgt (II. 1.39) mit dem Integral
$\int e^{-(\sqrt{x}+b)^2}\,dx = e^{-(\sqrt{x}+b)^2} - b\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\sqrt{x}+b\right)$, Φ nach (II. 1.37).

II. 1.6. Die zeitliche Änderung der aktivierten Goldatome je cm^3 ist
$dN^{198}/dt = \Sigma_\gamma^{197}\,\Phi - \lambda^{198}\,N^{198}$.
Daraus ergibt sich die Zahl der β-Zerfälle je s:
$\lambda^{198}\,N^{198}\,V^{Folie} = \Sigma_\gamma^{197}\,V^{Folie}\,\Phi\,(1 - \exp(-\lambda^{198}\,t))$.
Hieraus folgt $\Phi = 1{,}8 \cdot 10^6$ cm^{-2} s^{-1}.

II. 1.7. $\bar{\Phi}_{th} \approx 10^{13}$ cm^{-2} s^{-1}, $\bar{\Phi}_s \approx 6 \cdot 10^{15}$ cm^{-2} s^{-1}.

II. 1.8. Die mittlere Neutronendichte im thermischen Reaktor beträgt (s. Aufg. II. 1.7) $n \approx 5 \cdot 10^7$ cm^{-3}, die mittlere Atomkerndichte dagegen $N \approx 5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3} (s. Tab. II. 1.2). Da die Wirkungsquerschnitte für die Neutron-Neutron- und Neutron-Kern-Wechselwirkung etwa gleich sind, folgt $\sigma\,n\,\Phi \approx 10^{-15}\,\sigma\,N\,\Phi$.

II. 1.9. Die Zahl der im Überschuß erzeugten Spaltstoffkerne $\Delta Z^{Pu}(t) = Z^{Pu}(t) - Z^{Pu}(0)$ ändert sich gemäß $d\,\Delta Z^{Pu}(t)/dt = (BR - 1)\,\sigma_A^{Pu}\,Z^{Pu}(t)\,\bar{\Phi}$. Durch regelmäßigen Wechsel der Brennelemente wird die Spaltstoffmenge im Reaktor näherungsweise konstant gehalten: $d\,\Delta Z^{Pu} \approx (BR - 1)\,\sigma_A^{Pu}\,Z^{Pu}(0)\,\bar{\Phi}$. Somit gilt $\Delta Z^{Pu}(t) = (BR - 1)\,\sigma_A^{Pu}\,Z^{Pu}(0)\,\bar{\Phi}\,t$. Die Verdopplungszeit t_D bestimmt sich aus der Beziehung $\Delta Z(t_D) = Z(0)$:
$t_D = 1/(BR - 1)\,\sigma_A^{Pu}\,\bar{\Phi} = 9$ a.

II. 1.10. $f\,\eta = \nu\,\Sigma_f/\Sigma_A = 1{,}62$.

II. 1.11. $f = \Sigma_A^{UO_2}\,V^{UO_2}\,\Phi^{UO_2}\Big/\left(\Sigma_A^{UO_2}\,V^{UO_2}\,\Phi^{UO_2} + \Sigma_A^{H_2O}\,V^{H_2O}\,\Phi^{H_2O}\right) = 0{,}88$.
Borkonzentration: $N^B = 2{,}4 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}, d. h. 0,25 g H_3BO_3/l H_2O.

II. 2.1. Anteile der 3 Resonanzlinien bei $-0{,}95$, 0,29 und 1,13 eV zu σ_f bei einigen Neutronenenergien E:

E_r, eV	E, eV			
	0,025	0,15	0,2	0,5
— 0,95	550	180	140	60
+ 0,29	15	20	30	5
+ 1,13	3	1	1	2
	568	201	171	67

Im Bereich 0,025 eV $\leq E \leq$ 0,5 eV liefert das „gebundene" Niveau bei $E_r = -$ 0,95 eV den Hauptbeitrag zum Wirkungsquerschnitt. Die Abweichungen der Summe von dem Wert der Tab. II. 1.2, σ_t (0,025) = 577 b, ist auf Ungenauigkeiten in den Resonanzparametern und auf nicht erfaßte Beiträge höherer Resonanzen zurückzuführen. Die entsprechenden Werte für σ_γ ergeben sich aus $\sigma_t \, \Gamma_\gamma/\Gamma_t$.

II. 2.2. Der Wert des Integrals $\int_0^{+\infty} \sigma(E, T)\, dE$ ist nach (II. 2.31) für alle Temperaturen gleich.

III. 1.1. Der Schwerpunkt des Systems Neutron-Proton muß im Laborsystem ruhen. Dies ist der Fall, wenn die Geschwindigkeiten von Proton und Neutron gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben.

III. 1.2. $\frac{\Delta E_{max}}{E} = \frac{4}{A} \frac{1}{(1 + 1/A)^2} \approx \frac{4}{A}\left(1 - \frac{2}{A}\right)$ für $A \gg 1$. Fehler $< 2\%$ für $A > 12$.

III. 1.3. Man bilde $\xi = 1 - 2\frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{1 + 1/A}{1 - 1/A}$ und breche die Potenzreihe für den Logarithmus nach dem zweiten Glied ab. Für $A \gg 1$ folgt daraus (III. 1.45).

III. 1.4. $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_t = n\, \lambda_t$ bei konstantem σ_n. Mit Stoßzahl n nach Tab. III. 1.2 folgt s = 300 cm. Bei Berücksichtigung der Energieabhängigkeit von σ_n gemäß Abb. II. 3.12 ergibt sich s = 320 cm.

III. 1.5. Für die Winkelverteilung im Laborsystem gilt in Abhängigkeit vom Kosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem

$$w(\cos\psi) = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{1}{A^2} + \frac{2}{A}\cos\Psi\right)^{3/2}}{1 + \frac{1}{A}\cos\Psi}.$$

Für $A = 1$ folgt daraus mit (III. 1.30) $w(\cos\psi) = 2\cos\psi$ im Bereich $0 \leq \cos\psi \leq +1$. Für $A \gg 1$ gilt näherungsweise $w(\cos\psi) \approx \frac{1}{2}$ im Bereich $-1 \leq \cos\psi \leq +1$.

III. 1.6. $\bar{\xi} = \sum_m \Sigma_n^m \xi^m \Big/ \sum_m \Sigma_n^m$.

III. 1.7. $\xi^{H_2O} = 0{,}92$, $n^{H_2O} = 20$, $\xi^{D_2O} = 0{,}509$, $n^{D_2O} = 36$, $\xi^{BeO} = 0{,}174$, $n^{BeO} = 105$. Sowohl die Streuresonanz des O als auch der Abfall von σ_n^H (E) erhöhen die Zahl der Stöße.

III. 1.8. $E' = E\left(1 - \frac{2A}{(1+A)^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1+A}{A}\frac{Q}{E}}\cos\Psi\right)\right) - \frac{A}{A+1}Q$

gültig im Bereich $E \geq Q\,(1 + A)/A$ = Neutronenschwellenergie für die unelastische Streuung. Der Faktor $(1 + A)/A$ ist bedingt durch die Aufnahme von Translationsenergie durch den Zielkern, vgl. Abschn. II. 2.2.1. Für $Q \to 0$ ergibt sich die Formel (III. 1.10) für elastische Streuung.

III. 2.1. Nach (III. 2.36) ist das Verhältnis der Flußdichten im Bremsbereich bei vernachlässigter Absorption $\Phi^{H_2O} : \Phi^{D_2O} : \Phi^{C} = 1:7{,}5:22$.

III. 2.2. Aus (III. 2.37) folgt $\int_{E_{th}}^{E_Q} \Sigma_A(E)\, \Phi(E)\, dE / Q_0 = 1 - \exp(-2\,\Sigma_A(E_{th}) / \xi\, \Sigma_n)$.

H_2O: $3{,}3 \cdot 10^{-2}$, D_2O: $3{,}7 \cdot 10^{-4}$, C: $1{,}2 \cdot 10^{-2}$.

III. 2.3. Man bestätigt durch Einsetzen, daß $F(u) = \text{const}$ (III. 2.24) für $u > u_Q - \ln \alpha^m$ befriedigt. Die Größe der Konstante ist durch Anschluß an die Stelle $u = u_Q$ festzulegen. Das geschieht leicht mit Hilfe der Bremsdichte. Da $q(u) = Q_0$ für $u = u_Q$ nach (III. 2.64), folgt aus (III. 2.69) sofort (III. 2.27).

III. 2.4. Mit den temperaturabhängigen Wirkungsquerschnitten nach (II. 2.25, 27) zuzüglich des Potentialquerschnitts ergeben sich aus (III. 2.42, 45) die gesuchten Flußdichten. Setzt man die ungestörten Flußdichten gleich 1, so gilt:

$\Sigma_{n,pot} / N^{238}$	Φ_{NR}	Φ_{IM}	Φ_{exakt}
30 b	0,0040	0,0028	0,0028
3000 b	0,29	0,30	0,30

III. 2.5. Die Stoßratendichte bei der Geschwindigkeit v ist $Q/\xi\, E(v)$. Damit ist die

$$\text{Bremszeit } t = \frac{2\lambda}{\xi} \int_{v_{th}}^{v_s} \frac{dv}{v^2} = \frac{2\lambda}{\xi}\left[\frac{1}{v_{th}} - \frac{1}{v_s}\right] \approx \frac{2\lambda}{\xi\, v_{th}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{s}.$$

III. 3.1. Mit (III. 2.14) und (III. 2.69) folgt aus (III. 3.3)

$$p(0 \to u) = 1 - \int_0^u du' \,\frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')} \exp\left(-\int_0^{u'} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')}\, du''\right).$$

Nach Einführung der Variablen $w(u') = \int_0^{u'} \frac{\Sigma_A(u'')}{\Sigma_T(u'')}\, du''$

ergibt sich

$$p(0 \to u) = 1 - \int_{w=0}^{w(u)} e^{-w}\, dw = \exp\left(-\int_0^u \frac{\Sigma_A(u')}{\Sigma_T(u')}\, du'\right).$$

III. 3.2. Das gesamte Resonanzintegral kann aus Abb. III. 3.1, das Resonanzintegral der 1. Spitze aus (III. 3.28) bzw. (III. 3.25) ermittelt werden. Bei $N^C/N^U = 30$ entfallen 40% der Resonanzabsorption auf die 1. Resonanzspitze, bei $N^C/N^U = 3000$ 50%.

III. 3.3. Mit (III. 3.13) ergibt sich $p(300°\,\text{K}) = 0{,}823$, $p(1273°\,\text{K}) = 0{,}803$.

III. 3.4. $p = 0{,}953$.

III. 3.5. Aus der Definition (I. 4.7) der Brutrate folgt
$BR = \Sigma^{232}_{\gamma\,th} / \Sigma^{233}_{A\,th} + \eta^{233}(1 - p^{232}) = 0{,}57$ für $N^C/N^{Th} = 500$. $BR = 0{,}92$ für $N^C/N^{Th} = 200$.

III. 4.1. Mit $C = 0{,}17$ (Tab. III. 4.1) und $I = 19{,}5$b ergibt sich aus (III. 3.13) $p = 0{,}85$, mit $C = 0$ folgt $p = 0{,}84$.

III. 4.2. $C = 0{,}24$, $I = 21{,}2$b, $p = 0{,}79$ bzw. 0,77 bei C = 0.

III. 4.3. $C = 0{,}30$, $I = 20{,}6$b, $p = 0{,}76$ bzw. 0,73 bei C = 0.

III. 4.4. 20% H_2O, 80% D_2O: $p = 0{,}64$ bzw. 0,58 bei C = 0.
98% H_2O, 2% D_2O: $p = 0{,}85$ bzw. 0,84 bei C = 0.

III. 5.1. Mit $\Phi^M = \Phi^B$ in (III. 5.1) kommt man auf (III. 5.7) mit $P^{00} = \Sigma^B_{Ts}/(\Sigma^B_{Ts} + \Sigma^M_{Ts})$.

III. 5.2. Aus (III. 5.7) ergibt sich mit P^{00*} anstelle von P^{00}
bei $T = 300\,°K$: $\varepsilon = 1{,}029$ (UO_2), $\varepsilon = 1{,}056$ (U-Metall),
bei $T = 1100\,°K$: $\varepsilon = 1{,}035$ (UO_2), $\varepsilon = 1{,}067$ (U-Metall).

IV. 1.1. $\bar{E} = \frac{3}{2}\,kT, \quad E_h = \frac{1}{2}\,kT.$

IV. 1.2. $n(v)\,dv = 4\,\pi \left(\frac{m}{2\,\pi\,kT}\right)^{3/2} n_{th}\, v^2\, e^{-\frac{m\,v^2}{2\,kT}}\, dv.$

IV. 1.3. Man bilde die mittlere bzw. häufigste Geschwindigkeit mit $n(v)\,dv$ nach Aufg. IV. 1.2 und vergleiche die entsprechenden Energien mit der Lösung von Aufg. IV. 1.1.

IV. 1.4. Mit (III. 2.27a) ist $n_s \approx \int_{E_{th}}^{E_0} \frac{1}{v}\,\Phi(E)\,dE$ zu berechnen. Σ_T nehme man als konstant an. Für die Quellstärke gilt $Q_0 \approx k_\infty\, \Sigma_{A\,th}\, v_{th}\, n_{th}$. Daraus ergibt sich $\frac{n_s}{n_{th}} \approx \frac{2\,k_\infty\,\Sigma_{A\,th}}{\xi\,\Sigma_n} \approx 0{,}1.$

IV. 1.5.

	$N^H/N^{Sp} = 600$		$N^H/N^{Sp} = 1200$	
	$T = 293\,°K$	$T = 573\,°K$	$T = 293\,°K$	$T = 573\,°K$
η^{235}	2,07	2,06	2.07	2,06
f^{235}	0,77	0,76	0,63	0,62
$f^{235}\ \eta^{235}$	1,59	1,56	1,30	1,27
η^{239}	2,07	1,93	2,07	1,93
f^{239}	0,85	0,89	0,73	0,81
$f^{239}\ \eta^{239}$	1,75	1,72	1,52	1,56

Der Gang dieser Größen ist aus Abb. II. 3.2–3 zu verstehen.

IV. 1.6. Mit $q(E_G) = \Sigma_{A\,th}\,\Phi_{th}$ und $Q_0 = \nu_{th}\,\Sigma_{f\,th}\,\Phi_{th} = f\,\eta\,\Sigma_{A\,th}\,\Phi_{th}$ folgt aus $q(E_G) = \varepsilon\,p\,Q_0$ die Bedingung $\varepsilon\,p\,f\,\eta = 1$.

IV. 2.1. Aus dem Impulssatz $m(1 + A)\,\boldsymbol{v}_s = m\,\boldsymbol{v} + A\,m\,\boldsymbol{v}_A$ folgt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\boldsymbol{v}_S = \frac{1}{1+A}(\boldsymbol{v} + A\,\boldsymbol{v}_A)$, also $v_S^2 = \frac{1}{(1+A)^2}(v^2 + A^2 v_A^2 + 2\,A\,v\,v_A\,\mu_A)$ oder (IV. 2.3). Die Neutronengeschwindigkeit im Schwerpunktsystem, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S = \frac{A}{1+A}\,\boldsymbol{v}_{rel}$, hat vor und nach dem Stoß den gleichen Betrag $V = V'$. Ferner $v_S = v_S'$. Damit gilt für die Neutronengeschwindigkeit im Laborsystem nach dem Stoß $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{v}_S$, $v'^2 = V'^2 + v_S^2 + 2\,V'\,v_S'\cos\Psi = \left(\frac{A}{1+A}\right)^2 v_{rel}^2 + v_S^2 + 2\,\frac{A}{1+A}\,v_{rel}\,v_S\cos\Psi$, oder (IV. 2.1). (IV 2.2) nach (II. 1.22–24).

IV. 2. 2.
$$q(E) = \int_{E''=0}^{E}\int_{E'=E}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E'')\,\Phi(E')\,dE'\,dE'' - \int_{E''=E}^{\infty}\int_{E'=0}^{E} \Sigma_n(E' \to E'')\,\Phi(E')\,dE'\,dE''.$$

Daraus
$$\frac{dq(E)}{dE} = \int_{E'=0}^{\infty} \Sigma_n(E' \to E)\,\Phi(E')\,dE' - \Sigma_n(E)\,\Phi(E)$$

Mit (IV. 1.9) folgt (IV. 2.36). — Für eine Maxwellverteilung gilt das detaillierte Gleichgewicht (IV. 2.14). Damit wird $q(E) = 0$.

V. 2.3. Integration der Gl. (IV. 2.21a) führt auf

$$y^2 e^{-y} \frac{d}{dy} \psi(y) = \int_0^y \frac{\Sigma_A(y')}{\xi \Sigma_n} y' e^{-y'} \psi(y') dy'.$$

Abermalige Integration ergibt mit $\psi(0) = 1$ die Beziehung (IV. 2.37).

IV. 2.4. Mit $\Sigma_A(y') = \frac{1}{\sqrt{y'}} \Sigma_A(kT)$ und $\psi(y') \approx 1$ folgt aus (IV. 2.37)

$$\psi(y) \approx 1 + \frac{\Sigma_A(kT)}{\xi \Sigma_n} \int_{z=0}^{y} dz\, z^{-2} e^{+z} \int_{y'=0}^{z} dy' \sqrt{y'}\, e^{-y'}$$

und damit gemäß $\Phi(y) = \Phi_M(y)\,\psi(y)$ die Gl. (IV. 2.28).

IV. 4.1. Mit $P^{00} = 0{,}348$ und $C = 0{,}042$ (Tab. III. 4.1–2) ergibt sich $P^{10*} = 0{,}079$, $\Phi^1/\Phi^2 = 1{,}250$ und $f = 0{,}902$.

IV. 4.2. $P^{00} = 0{,}292$, $C = 0{,}103$, $P^{10*} = 0{,}106$, $\Phi^1/\Phi^0 = 1{,}15$, $f = 0{,}921$.

IV. 4.3. $P^{00} = 0{,}292$, $C = 0{,}153$, $P^{10*} = 0{,}129$, $\Phi^1/\Phi^0 = 1{,}15$, $f = 0{,}936$.

V. 2.1. Aus (V. 2.18,21) ergibt sich

r, cm	10	50	100
Φ, cm^{-2} s^{-1}	735	75	16

V. 2.2. Mit Zylinderkoordinaten (z senkrecht zur Ebene, ϱ in der Ebene, $r^2 = z^2 + \varrho^2$, Quelldichte von Q Neutronen je cm² und s) ist die aufintegrierte Flußdichte

$$\Phi(z) = \frac{Q}{4\pi D} \int_0^\infty \frac{e^{-r/L}}{r} 2\pi \varrho\, d\varrho = \frac{Q L}{2 D} e^{-z/L}.$$

V. 2.3. D_2O-Schicht: $\Phi^I(x) = A_1 e^{x/L} + A_2 e^{-x/L}$ als Lösung von (V. 2.13),

$A_{1,2} = \frac{Q L}{4 D N} e^{\mp X_G/L} \left(\frac{D L^C}{D^C L} \mp 1\right)$ (das Minuszeichen gilt für A_1), mit

$N = \cosh \frac{X_G}{L} + \frac{D L^C}{D^C L} \sinh \frac{X_G}{L}$ aus Rand- und Anschlußbedingungen.

C-Schicht: $\Phi^{II}(x) = A_1^C e^{-x/L^C}$, $A_1^C = \frac{Q L^C}{2 D^C N} e^{X_G/L^C}$.

V. 2.4. Die allgemeine Lösung von (V. 2.13) mit $Q = 0$ für das vorliegende Problem lautet

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m \pi x}{2(a+d)} \cos \frac{n \pi y}{2(b+d)} e^{-\gamma_{mn} \cdot z}$$

mit $\gamma_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{2(a+d)}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2(b+d)}\right)^2 + \frac{1}{L^2}$. Die A_{mn} sind durch die Flächenquelle bestimmt. Mit wachsendem z wird der Einfluß der Summanden für $m, n > 1$ wegen der Exponentialfunktion schnell kleiner. In einigem Abstand von der Quelle gilt dann entlang der z-Achse: $\Phi(0, 0, z) = A_{11} \exp(-\gamma_{11} z)$. Aus der Messung des Flußdichteverlaufs entlang der z-Achse läßt sich L bestimmen, da a und b bekannt sind.

V. 2.5. $j\left(\frac{X_R}{2}\right) \Big/ \Phi\left(\frac{X_R}{2}\right) = DB \cdot \frac{\sin BX_R/2}{\cos BX_R/2} \approx DB.$

V. 2.6. $P = q\,\Sigma_f \int\limits_{\text{Reaktor}} \Phi(r)\; 4\,\pi\, r^2\, \mathrm{d}r = \frac{4}{\pi}\, q\, \Sigma_f\, R_R^3\, \Phi(0).$

q ist die pro Spaltung freigesetzte Energie (I. 3.27).

V. 2.7. $W_{th} = \frac{\int \Sigma_A\, \Phi\, \mathrm{d}V}{\int \Sigma_A\, \Phi\, \mathrm{d}V - \int D\,\Delta\Phi\, \mathrm{d}V} = \frac{1}{1 + L^2 B^2}.$

V. 2.8.

Mischung	R_R, cm	W_s	Spaltstoffmasse, kg
100% ^{235}U	8,11	0,453	41,7
70% ^{235}U + 30% Na	11,13	0,453	107,9
100% ^{239}Pu	6,84	0,383	21,2
70% ^{239}Pu + 30% Na	9,39	0,383	54,8

V. 2.9. $R_R = 20{,}5$ cm, $m^{235} = 1{,}9$ kg.

V. 2.10. $DB \cdot \tan BX_G = \frac{D^R}{L^R} \cdot \coth\left(\frac{1}{L^R}(T + d^R)\right).$

V. 2.11. Mit der Kritikalitätsbedingung $B(X_R + d) = \pi/2$ für den nackten Reaktor gilt $DB \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\,\delta\right) = DB \cdot \cot B\,\delta = \frac{D^R}{L^R} \coth\left(\frac{1}{L^R}(T + d^R)\right)$. Für $B\,\delta \ll 1$ gilt $\delta \approx L^R\, \frac{D}{D^R} \cdot \tanh\left(\frac{1}{L^R}(T + d^R)\right).$

V. 2.12. $X_R = 98{,}6$ cm, $\delta = 52{,}6$ cm. $\overline{\Phi}/\hat{\Phi}$ ist beim nackten Reaktor 0,65, beim reflektierten 0,91.

V. 2.13. $R_G = 6{,}02$ cm, $m^{235} = 17{,}1$ kg.

V. 2.14. Man setze $\Phi(r, z) = \Phi(r) \cdot Z(z)$, $\Phi^R(r, z) = \Phi^R(r) \cdot Z^R(z)$.

$Z(z) = A_1 \cos B_z z$, $Z^R(z) = A_1^R \cos \varkappa_z z$, $B_z = \varkappa_z = \pi/(H + 2d)$.

$\Phi(r) = A_2\, \mathrm{J}_0(B_r r)$, $\Phi^R(r) = A_2^R\, \mathrm{I}_0(\varkappa_r r) + A_3^R\, \mathrm{K}_0(\varkappa_r r)$,

$B_r^2 + B_z^2 = B^2$, $\varkappa_r^2 - \varkappa_z^2 = 1/(L^R)^2$.

$$\frac{D\, B_r}{D^R\, \varkappa_r} \cdot \frac{\mathrm{J}_1(B_r R_G)}{\mathrm{J}_0(B_r R_G)} =$$
$$= -\frac{\mathrm{K}_0(\varkappa_r(R_G + T + d)) \cdot \mathrm{I}_1(\varkappa_r R_G) + \mathrm{I}_0(\varkappa_r(R_G + T + d)) \cdot \mathrm{K}_1(\varkappa_r R_G)}{\mathrm{K}_0(\varkappa_r(R_G + T + d)) \cdot \mathrm{I}_0(\varkappa_r R_G) - \mathrm{I}_0(\varkappa_r(R_G + T + d)) \cdot \mathrm{K}_0(\varkappa_r R_G)}.$$

V. 2.15. Die kritischen Daten des Reaktors sind $B = 0{,}219$ cm^{-1} bzw. $R_R = 14{,}4$ cm. Zur Bestimmung des Leistungsniveaus ist nun die Wärmetransportgleichung zu lösen:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, T(r) = -\frac{Q(r)}{\lambda}$$

mit der Wärmequellendichte $Q(r) = q\,\Sigma_f\, \Phi(r) = q\,\Sigma_f\, \Phi_0 \sin Br/Br$.

Die allgemeine Lösung lautet

$$T(r) = \frac{A_1}{r} + A_2 + \frac{q\,\Sigma_f}{\lambda\, B^2}\, \Phi_0\, \frac{\sin B\,r}{Br}.$$

A_1 verschwindet, da $T(0)$ endlich sein muß. A_2 und Φ_0 berechnen sich aus den Randbedingungen $T(0) = 2700$ °K und $-\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, T(r)/_{R_R} = \sigma\, \varepsilon\, T^4(R_R)$. Die dabei auftretende Gleichung 4. Grades für A_2 läßt sich numerisch lösen. Sie hat nur eine positive Wurzel (Déscartessche Regel). Die gesuchten Größen sind $A_2 = T(R_R) = 1491$ °K, $\Phi_0 = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm^{-2} s^{-1}, $P_{th} = 66$ kW.

V. 3.1. Mit dem angegebenen Produktansatz und der Voraussetzung d unabhängig von E lassen sich die beiden Variablen trennen (für die Spaltquellen gilt $Q(\boldsymbol{r}, E) = R(\boldsymbol{r}) \cdot Q(E)$). Die Separationskonstante B^2 ist die geometrische Flußwölbung des Reaktors ($B \to 0$ für $\boldsymbol{r} \to \infty$). Die Bremsgleichung lautet demnach

$$- D(E)\, B^2\, \Phi(E) - \Sigma_{\mathrm{T}}(E)\, \Phi(E) + Q(E) + \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Phi(E')\, \Sigma_{\mathrm{S}}(E' \to E) = 0.$$

Das Glied $D\, B^2\, \Phi$ wirkt bei $B^2 > 0$ in derselben Richtung wie das Absorptionsglied, härtet also das Spektrum.

V. 3.3. Die Summation der Beiträge von allen auf der z-Achse ($z = |\boldsymbol{r}'|$) angeordneten Punktquellen ergibt die Bremsdichte im Abstand ϱ von der z-Achse

$$q(\varrho, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4\,\pi\,\tau)^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2/4\,\tau}\, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{(4\,\pi\,\tau)^{3/2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\,(z^2 + \varrho^2)/4\,\tau}\, \mathrm{d}z = \frac{2}{(4\,\pi\,\tau)^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\,\varrho^2/4\,\tau} \cdot \frac{\sqrt{4\,\pi\,\tau}}{2}.$$

V. 3.4. Ableitung von Gl. (III. 2.67) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = \sum_m \frac{1}{1 - \alpha^m} \left\{ - \int_{u + \ln \alpha^m}^{u} \Sigma_{\mathrm{n}}^m(u')\, \Phi(u') \cdot \mathrm{e}^{u' - u}\, \mathrm{d}u' + \right.$$

$$\left. + \Sigma_{\mathrm{n}}^m(u)\, \Phi(u)\, (1 - \alpha^m) \right\}.$$

Elimination des Stoßintegrals in (V. 3.6) führt für die zeitunabhängige Flußdichte auf

$$\nabla D(\boldsymbol{r}, u)\, \nabla \Phi(\boldsymbol{r}, u) - \Sigma_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{r}, u)\, \Phi(\boldsymbol{r}, u) + Q(\boldsymbol{r}, u) = \frac{\partial}{\partial u}\, q(\boldsymbol{r}, u).$$

Mit der Näherung (V. 3.12) folgt daraus die Gl. (V. 3.13).

V. 3.5. Die Lösung der Diffusionsgleichung für die zylindrische Spaltzone mit $H \gg L$ lautet

$$\Phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\, \mathrm{J}_0(\alpha_m\, r/R_{\mathrm{R}}) \cdot \mathrm{e}^{-\,\sqrt{(\alpha_m/R_{\mathrm{R}})^2 - B^2}\,\cdot\, z}.$$

α_m sind die Nullstellen von $\mathrm{J}_0(r)$. $(\alpha_0/R_{\mathrm{R}})^2$ ist im unterkritischen Fall größer als $B^2 = (k_\infty - 1)/\mathrm{M}^2$. Im Abstand einiger Diffusionslängen von der Quellebene gilt entlang der z-Achse $\Phi(0, z) \sim \exp\left(- z \cdot \sqrt{(2{,}405/R_{\mathrm{R}})^2 - B^2}\right)$. Da R_{R} bekannt ist, läßt sich B^2 aus dem gemessenen Verlauf der Flußdichte bestimmen. Aus B^2 folgt über die kritische Bedingung die kritische Größe. Ist ferner $M^2 = L^2 + \tau$ bekannt (z. B. aus Messungen analog zu Aufg. V. 2.4, wobei in der unterkritischen Anordnung die Brennstoffstäbe durch Absorberstäbe mit möglichst gleichen Wirkungsquerschnitten ersetzt werden), so kann die Multiplikationskonstante k_∞ des Brennstoffgitters aus $B^2 = (k_\infty - 1)/M^2$ bestimmt werden.

V. 3.6. Mit der Fourierdarstellung der Flußdichte

$$\Phi(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\,\pi)^3} \int_{\boldsymbol{k}} \bar{\Phi}(\boldsymbol{k}) \cdot \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$$

folgt

$$Q_{\text{th}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\boldsymbol{r}'} \int\limits_{\boldsymbol{k}} k_\infty \, \Sigma_A \, \bar{\Phi}(\boldsymbol{k}) \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'} \cdot K(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|) \, d\boldsymbol{k} \, d\boldsymbol{r}'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\boldsymbol{k}} k_\infty \, \Sigma_A \, \bar{\Phi}(\boldsymbol{k}) \cdot e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \cdot \bar{K}(|\boldsymbol{k}|) \, d\boldsymbol{k},$$

wobei $\bar{K}(|\boldsymbol{k}|) = \int\limits_{\boldsymbol{R}} K(|\boldsymbol{R}|) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \, d\boldsymbol{R} = \int\limits_{R=0}^{\infty} K(R) \frac{\sin kR}{kR} \cdot 4\pi R^2 \, dR.$

Wenn $\Phi(\boldsymbol{r})$ eine Lösung der Wellengleichung $\Delta\Phi + B^2\Phi = 0$ ist, gilt $(-k^2 + B^2)\,\bar{\Phi}(\boldsymbol{k}) = 0$, d. h. $\bar{\Phi}(\boldsymbol{k})$ ist nur $\neq 0$ für $k^2 = B^2$. Damit kann das Integral über $\boldsymbol{k}$ ausgewertet werden: $Q_{\text{th}}(\boldsymbol{r}) = k_\infty \, \Sigma_A \, \bar{K}(B) \, \Phi(\boldsymbol{r})$.

V. 3.7 $\bar{K}_\tau = \int\limits_{\boldsymbol{r}'} K_\tau(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|) \cdot e^{+i\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})} \, d\boldsymbol{r}' = \int\limits_{\boldsymbol{R}} K_\tau(R) \cdot e^{i\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{R}} \, d\boldsymbol{R} =$

$$= \int\limits_{R=0}^{\infty} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} K_\tau(R) \cdot e^{iBR\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dR = e^{-B^2\tau}, \ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}.$$

V. 4.1. Unter der Voraussetzung gruppenunabhängiger Extrapolationslängen ist die Lösung von (V. 4.15) gegeben durch

$\Phi_1(\boldsymbol{r}) = A_1 \, \Psi(\boldsymbol{r})$ und $\Phi_2(\boldsymbol{r}) = A_2 \, \Psi(\boldsymbol{r})$.

$\Psi(\boldsymbol{r})$ ist die Lösung der Wellengleichung (V. 4.25) mit den Randbedingungen (V. 2.30). (V. 4.15) führt mit dem obigen Ansatz auf ein lineares Gleichungssystem für A_1 und A_2. Dessen Determinante ist Null zu setzen. Diese Forderung stellt die kritische Gleichung (V. 4.45) dar. Für das Verhältnis der Flußdichten gilt $A_2/A_1 = \Sigma_{S\,1\to 2}/(\Sigma_{A2} + D_2 B^2)$. Da $D_2 B^2$ bei den üblichen Leistungsreaktoren sehr viel kleiner als Σ_{A2} ist, gilt für den Graphitreaktor $A_2/A_1 \approx 2{,}0$ und für den Wasserreaktor $A_2/A_1 \approx 0{,}18$.

V. 4.2. $\varepsilon = \dfrac{\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2}{\nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2}, \quad p = 1 - \dfrac{\Sigma_{A1} \Phi_1}{\nu_1 \Sigma_{f1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \Phi_2},$

In diesen Ausdrücken bedeuten Φ_1 und Φ_2 die über die ganze Spaltzone integrierten Neutronenflußdichten. Da jedoch beim homogenen Einzonenreaktor $\Phi_1 \sim \Phi_2$ (vgl. Lösung zur Aufgabe V. 4.1), können Φ_1 und Φ_2 auch als örtliche Flußdichten an einem beliebigen Punkt verstanden werden.

$$W_s = \frac{\Sigma_{S\,1\to 2}}{\Sigma_{S\,1\to 2} + D_1 B^2} = \frac{1}{1 + L_1^2 B^2},$$

$\varepsilon \cdot p \cdot W_s = \Sigma_{S\,1\to 2}/(\Sigma_{S\,1\to 2} + \Sigma_{A1} - \nu_1 \Sigma_{f1} + D_1 B^2)$. Damit ist k zu bilden. In p ist im Gegensatz zur Definition in (III 5.3) auch die Absorption oberhalb der Spaltschwelle enthalten. Daher tritt in ε diese Absorption nicht auf.

V. 4.3. Die kritische Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(R_G) & \Psi_2(R_G) & -\Psi_1^R(R_G) & 0 \\ S_1 \Psi_1(R_G) & S_2 \Psi_2(R_G) & -S^R \Psi_1^R(R_G) & -\Psi_2^R(R_G) \\ D_1 \left.\dfrac{d\Psi_1}{dr}\right|_{R_G} & D_1 \left.\dfrac{d\Psi_2}{dr}\right|_{R_G} & -D_1^R \left.\dfrac{d\Psi_1^R}{dr}\right|_{R_G} & 0 \\ D_2 S_1 \left.\dfrac{d\Psi_1}{dr}\right|_{R_G} & D_2 S_2 \left.\dfrac{d\Psi_2}{dr}\right|_{R_G} & -D_2^R S^R \left.\dfrac{d\Psi_1^R}{dr}\right|_{R_G} & -D_2^R \left.\dfrac{d\Psi_2^R}{dr}\right|_{R_G} \end{vmatrix} = 0$$

mit $\Psi_1(r) = \dfrac{1}{r} \sin \mu r$, $\Psi_2(r) = \dfrac{1}{r} \sinh \nu r$ und

$$\Psi_i^R(r) = \frac{1}{r} \sinh \varkappa_i (R_G + T + d^R - r).$$

V. 4.4. Wir machen den Separationsansatz $\Phi_g(r,z) = R_g(r) \cdot \Phi_g(z)$, $g = 1,2$. Da der Reaktor in radialer Richtung unreflektiert ist, gilt $R_1(r) \sim R_2(r) \sim \mathrm{J}_0\left(\frac{2{,}405 \cdot r}{R_\mathrm{R} + d}\right)$, vorausgesetzt die Extrapolationslängen sind in beiden Zonen und Gruppen gleich groß. Für die Flußwölbungen $\bar{\mu}^2 = \mu^2 - B_r^2$, $\bar{\nu}^2 = \nu^2 + B_r^2$, $\bar{\varkappa}_i^2 = \varkappa_i^2 + B_r^2$ mit $B_r^2 = (2{,}405/(R_\mathrm{R} + d))^2$ gelten dieselben Bestimmungsgleichungen wie für die Größen μ, ν und $\varkappa_i$ der eindimensionalen Probleme. Die Flußdichten sind gegeben durch (V. 4.38, 41) mit $\Psi_1(z) = \cos \bar{\mu} z$, $\Psi_2(z) = \cosh \bar{\nu} z$ und $\Psi_i^\mathrm{R}(z) = \sinh \varkappa_i(\frac{1}{2} Z_\mathrm{G} + T + d - z)$. Die kritische Gleichung ist analog zu der in Aufg. V. 4.3 angegebenen $\left(Z_\mathrm{G}\right.$ anstelle von R_G, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ anstelle von $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$.

V. 4.5. Der Lösungsgang ist entsprechend zu dem der Aufgabe V. 4.4 mit $B^2 = B_z^2 = \left(\frac{\pi}{2\,(Z_\mathrm{R} + d)}\right)^2$. Die Lösungen der Wellengleichungen sind in diesem Fall $\Psi_1(r) = \mathrm{J}_0(\bar{\mu}\, r)$, $\Psi_2(r) = \mathrm{I}_0(\bar{\nu}\, r)$ und $\Psi_i^\mathrm{R}(r) = \mathrm{I}_0(\bar{\varkappa}_i\, r) - \mathrm{I}_0(\bar{\varkappa}_i(R_\mathrm{G} + T + d)) \cdot \mathrm{K}_0(\bar{\varkappa}_i\, r)/\mathrm{K}_0(\bar{\varkappa}_i(R_\mathrm{G} + T + d))$. Die kritische Gleichung ist analog zu Aufg. V. 4.3.

V. 4.6. Der Bremskern nach der Zweigruppentheorie ist das Quellglied für die thermische Gruppe $\Sigma_{\mathrm{S}\,1\to 2}\, \Phi_1$, wenn sich in der schnellen Gruppe eine Punktquelle befindet. In diesem Fall ist unter Φ_1 der in Tab. V. 2.2 angegebene Diffusionskern zu verstehen.

V. 4.7. Da für diesen Reaktor in der Spaltzone $a_{11} = a_{21} = 0$ ist, läßt sich der in Abschn. V. 4.3.1 angegebene Lösungsformalismus hier nicht ohne Schwierigkeiten anwenden. — In der Spaltzone ist die thermische Flußdichte von der schnellen Flußdichte unabhängig. Daher läßt sich das Gleichungssystem direkt lösen:

$$\Phi_2(r) = A_2' \cdot \frac{1}{r} \sinh \nu\, r,\quad \Phi_1(r) = A_1 + A_2 \cdot \frac{1}{r} \sinh \nu\, r,\quad \nu^2 = \frac{\Sigma_{\mathrm{A}2}}{D_2}.$$

Es gilt demnach $\Psi_1(r) = 1$, $\Psi_2(r) = \frac{1}{r} \sinh \nu\, r$, $S_1 = 0$, $S_2 = -\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{\Sigma_{\mathrm{A}2}}{\nu_2 \Sigma_{\mathrm{f}2}}$.
Im Reflektor gelten die in Abschn. V. 4.3.2 und Aufg. V. 4.3 angegebenen Lösungen. Als kritische Gleichung ergibt sich die in Aufg. V. 4.3 abgeleitete Beziehung mit den oben angegebenen Funktionen. Der kritische Radius ist $R_\mathrm{G} = 58{,}4$ cm. – Die wesentliche Voraussetzung der Diffusionstheorie, nämlich $R \gg \lambda_\mathrm{tr}$, ist hier zumindest in der schnellen Gruppe für die Spaltzone ($\lambda_{\mathrm{tr}\,1} = 3 \cdot 158 = 474$ cm) nicht erfüllt.

V. 4.8.

$$\Phi_1(r) = A_1 \cdot \frac{1}{r} \sinh r/L_1 - A_4 \cdot \frac{\nu_4\, \Sigma_{\mathrm{f}4} / \Sigma_{\mathrm{A}1}}{L_1^2 / L_4^2 - 1} \cdot \frac{1}{r} \sinh r / L_4,$$

$$\Phi_g(r) = A_g \cdot \frac{1}{r} \sinh r / L_g \qquad g = 2, 3, 4,$$

$$\Phi_1^\mathrm{R}(r) = A_1^\mathrm{R} \cdot \frac{1}{r} \sinh \varkappa_1(R_\mathrm{G} + T + d^\mathrm{R} - r),$$

$$\Phi_g^\mathrm{R}(r) = A_g^\mathrm{R} \cdot \frac{1}{r} \sinh \varkappa_g(R_\mathrm{G} + T + d^\mathrm{R} - r) + S_{g-1} \cdot \Phi_{g-1}^\mathrm{R}(r),$$

$$S_{g-1} = \frac{\Sigma^\mathrm{R}_{\mathrm{S}\, g-1\to g}}{D_g^\mathrm{R}\left(\varkappa_g^2 - \varkappa_{g-1}^2\right)}.$$

Die Bestimmungsgleichungen der 8 Konstanten A_g und A_g^R erhält man aus den Anschlußbedingungen bei R_G. Das Verschwinden der Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist die kritische Bedingung.

V. 5.1. Die Änderung von k als Folge einer Änderung von B^2 bei $k_\infty = \text{const}$, d. h. bei gleichbleibenden Materialeigenschaften, ergibt sich aus

$$\frac{dk}{d(B^2)} = -\frac{k_\infty M^2}{(1 + B^2 M^2)^2}.$$

Mit $k = 1$ (der Reaktor war vor der Änderung von B^2 gerade kritisch) erhält man für kleine δk und δB^2 die Gl. (V. 5.12).

Soll der Reaktor trotz einer Änderung von B^2 kritisch bleiben, so muß die Materialzusammensetzung geändert werden gemäß

$$\frac{dk_\infty}{d(B^2)} = M^2 = \frac{k_\infty - 1}{B^2} \text{ bzw. } \delta k_\infty = (k_\infty - 1)\frac{\delta B^2}{B^2}.$$

V. 5.2. Wir können hier das Zweigruppenschema aus Abschn. V. 4.3 anwenden. Es gilt in der Spaltzone (vgl. (V. 5.11))

$$\Psi_1(r) = J_0(\mu r) - J_0(\mu R_R) \cdot Y_0(\mu r)/Y_0(\mu R_R),$$
$$\Psi_2(r) = I_0(\nu r) - I_0(\nu R_R) \cdot K_0(\nu r)/K_0(\nu R_R).$$

Im Steuerstab haben wir nur 1 Gleichung zu lösen:

$$\Phi_1^S(r) = A_1^S\, I_0(\varkappa_1^S r), \quad (\varkappa_1^S)^2 = \Sigma_{A1}^S / D_1^S.$$

Es gilt also $\Psi_1^S(r) = I_0(\varkappa_1^S r)$, $A_2^S = 0$ und $S^S = 0$

Die kritische Gleichung ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen am Steuerstabrand a_0 und der Beziehung $\Phi_2(a) = 0$ $(a = a_0 - d)$:

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(a_0) & \Psi_2(a_0) & -\Psi_1^S(a_0) \\ D_1 \dfrac{d\Psi_1}{dr}\Big|_{a_0} & D_1 \dfrac{d}{dr}\Psi_2\Big|_{a_0} & -D_1^S \dfrac{d\Psi_1^S}{dr}\Big|_{a_0} \\ S_1\,\Psi_1(a) & S_2\,\Psi_2(a) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

V. 5.3. Unter Vernachlässigung der Streuung erhalten wir aus Gl. (II. 1.8) für die Schichtdicke Δ, in der die Neutronendichte auf 0,01 geschwächt wird, die Beziehung $\Delta = 4{,}605/\Sigma_A$. Für $E = 0{,}0253$ eV ergibt sich bei Bor $\Delta = 0{,}44$ mm, bei Cadmium $\Delta = 0{,}41$ mm.

VI. 1.1. Kugelsymmetrisches Problem:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \mu) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, E, \mu) + \frac{1-\mu^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(r, E, \mu),$$

$$\mu = \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \cos\vartheta, \quad \vartheta = \sphericalangle(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}), \quad r = |\boldsymbol{r}|.$$

Zylindersymmetrisches Problem:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} \Phi(\varrho, z, E, \vartheta, \varphi) -$$
$$- \sin\vartheta \sin\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varrho, z, E, \vartheta, \varphi) + \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\varrho, z, E, \vartheta, \varphi).$$

(ϑ, φ) = Koordinaten von $\boldsymbol{\Omega}$. ϑ ist der Polarwinkel zwischen $\boldsymbol{\Omega}$ und der z-Achse, φ ist der Azimutwinkel zwischen der Projektion von $\boldsymbol{\Omega}$ in die Ebene senkrecht zur z-Achse und dem Radiusvektor.

VI. 1.2. Die bei $\boldsymbol{r}$ je s durch das Flächenelement $d\boldsymbol{S}$ in das Raumwinkelelement $d\boldsymbol{\Omega}$ um $\boldsymbol{\Omega}$ strömenden Neutronen $\boldsymbol{\Omega} \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, dE\, d\boldsymbol{\Omega}\, d\boldsymbol{S}$ sind in irgendeinem Volumelement $dV' = R'^2\, d\boldsymbol{\Omega}\, dR'$ des Kegels mit dem Raumwinkel $d\boldsymbol{\Omega}$ gemäß der Quelldichte $Q(\boldsymbol{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega})$ entstanden und haben im freien Flug $d\boldsymbol{S}$ erreicht. $d\boldsymbol{S}$ erscheint von dV' aus unter dem Raumwinkel $\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{S}/R'^2$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Strecke R' ohne Stoß durchlaufen wird, beträgt $\exp\left(-\int\limits_{R''=0}^{R'} \Sigma_T(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, dR''\right)$. Somit gilt die Bilanz:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, dE\, d\boldsymbol{\Omega}\, d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int\limits_{R'=0}^{\infty} Q(\boldsymbol{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \cdot e^{-\int\limits_{R''=0}^{R'} \Sigma_T(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, dR''} dE \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}\, d\boldsymbol{S}}{R'^2} dV'.$$

Diese Gleichung stimmt mit (VI. 1.21) überein.

VI. 1.3 Man setze in (VI. 1.21) als Quelldichte $Q(\boldsymbol{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_Q)$ und integriere über $\boldsymbol{\Omega}$. Mit $R'^2\, dR'\, d\boldsymbol{\Omega} = dV' = d\boldsymbol{r}'$ und (III. 2.20 a) ergibt das Integra in (VI. 1.21) den Transportkern (VI. 1.26). Der Vergleich mit dem entsprechenden Diffussionskern zeigt, daß bei Berücksichtigung der gestreuten Neutronen die Flußdichte langsamer abfällt ($|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$ statt $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-2}$ und $\exp(-|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/L)$ statt $\exp(-|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/\lambda_T)$, wobei im allgemeinen $L > \lambda_T$ ist).

VI. 2.1. a) Aus $\Sigma_n(E' \to E, \cos\psi) = \Sigma_n(E') \cdot w(E' \to E, \cos\psi)$ und $w(E' \to E, \cos\psi)$ $= w(\cos\Psi) \cdot \frac{d\cos\Psi}{d\cos\psi} \cdot \delta(E - E(\cos\Psi))$ folgt mit (III. 1.13, 16, 32)

$$\Sigma_n(E' \to E, \cos\Psi) = \Sigma_n(E') \frac{1}{2} \frac{d\cos\Psi}{d\cos\psi} \delta\left(E - E' + E' \frac{1-\alpha}{2}(1 - \cos\Psi)\right).$$

Dies in (VI. 2.17) eingesetzt ergibt (VI. 2.50).

Die Umrechnung von der 1. auf die 2. Form (VI. 2.50) erfolgt gemäß $\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|$, wobei x_0 eine einfache Nullstelle von $f(x) = 0$ ist.

b) Nach (IV. 3.10, 2) gilt mit $c = A\, kT \left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E} - \frac{2}{\sqrt{E E'}} \cos\psi\right)$

$$\Sigma_n(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{c\pi}} \cdot \frac{\Sigma_n(E')}{(1-\alpha)E'} \cdot \exp\left(-\frac{1}{c}\left[\cos\psi - \left(\frac{A+1}{2}\sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{A-1}{2}\sqrt{\frac{E'}{E}}\right)\right]^2\right).$$

Für $T \to 0$, d. h. $c \to 0$, folgt hieraus mit dem angegebenen Grenzwert die Formel (VI. 2.50).

VI. 2.2. Aus (VI. 2.17, 20, 50) folgt

$$\Sigma_{n0}(E' \to E) \equiv 2\pi \int \Sigma_n(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, d\cos\psi = \frac{\Sigma_n(E')}{(1-\alpha)\, E'}$$

und

$$\Sigma_{n1}(E' \to E) \equiv 2\pi \int \Sigma_n(E', \boldsymbol{\Omega}' \to E, \boldsymbol{\Omega})\, \cos\psi\, d\cos\psi$$

$$= \frac{\Sigma_n(E')}{2(1-\alpha)\, E'}\left((A+1)\sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1)\sqrt{\frac{E'}{E}}\right),$$

wenn man die Formel $\int F(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = F(x_0)$ verwendet.

VI. 2.3. Durch Einsetzen von (VI. 2.52) in (VI. 2.45) und Anwendung von (VI. 2.43) folgt

$$\int \Sigma_{n1}(E' \to E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E')\, dE' =$$

$$= \int \frac{\Sigma_n(E')}{2(1-\alpha)\, E'}\left((A+1)\sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1)\sqrt{\frac{E'}{E}}\right) \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E')\, dE' \approx$$

$$\approx \frac{\Sigma_n(E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)\, E}{2(1-\alpha)}\left((A+1)\sqrt{E} \int\limits_{E'=E}^{E/\alpha} \frac{dE}{E'^{5/2}} - \frac{A-1}{\sqrt{E}} \int\limits_{E'=E}^{E/\alpha} \frac{dE'}{E'^{3/2}}\right)$$

$$= \Sigma_n(E)\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)\, \frac{2}{3A}.$$

VI. 2.4. Integriert man (VI. 1.21) einmal direkt und einmal nach Multiplikation mit $\boldsymbol{\Omega}$ über alle Flugrichtungen $\boldsymbol{\Omega}$, so folgt:

$$\Phi(\boldsymbol{r}, E) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \Phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} =$$

$$= \int_{\boldsymbol{\Omega}} \int_{R'=0}^{\infty} Q(\boldsymbol{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \exp\left(- \int_{R''=0}^{R'} \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, \mathrm{d}R''\right) \mathrm{d}R'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} =$$

$$= \int_{\boldsymbol{\Omega}} \int_{R'=0}^{\infty} \boldsymbol{\Omega} \cdot Q(\boldsymbol{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \exp\left(- \int_{R''=0}^{R'} \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r} - R''\boldsymbol{\Omega}, E)\, \mathrm{d}R''\right) \mathrm{d}R'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}.$$

Wendet man auf die zweite Gleichung den Operator ∇ an und verfährt wie in Abschn. VI. 1.2, so erhält man (VI. 2.37) in der Form

$$\nabla \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = Q(\boldsymbol{r}, E) - \Sigma_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, E)\, \Phi(\boldsymbol{r}, E).$$

VI. 3.1. Mit $\boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \Phi$ nach Aufg. VI. 1.1 und der Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\Phi(r, E, \mu) = \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(r, E)\, \mathrm{P}_l(\mu) \quad \text{erhält man aus (VI. 2.3)}$$

$$\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{n+2}{r}\right) \Phi_{n+1}(r, E) + \frac{n}{2n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{n-1}{r}\right) \Phi_{n-1}(r, E) +$$
$$+ \Sigma_{\mathrm{T}}\, \Phi_n(r, E) = \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \Sigma_{\mathrm{S}n}(E' \to E)\, \Phi_n(r, E')\, \mathrm{d}E' +$$
$$+ \chi(E) \int_{E'} \mathrm{d}E'\, \nu(E')\, \Sigma_{\mathrm{f}}(E')\, \Phi_0(r, E') \cdot \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, L.$$

VI. 3.2. Die Gl. (VI. 3.22 a, b) lauten mit $n = 0$

$$\pm \frac{\mathrm{d}f_0^{\pm}}{\mathrm{d}z} + \Sigma_{\mathrm{T}} f_0^{\pm} = \frac{1}{2} \Sigma_{\mathrm{S}0}\, \Phi_0 \pm \frac{3}{4} \Sigma_{\mathrm{S}1}\, \Phi_1 + \frac{1}{2} F_0\,.$$

Den Zusammenhang zwischen den $f_0^{\pm}$ und $\Phi_{0,1}$ erhält man aus (VI. 3.23) bei

$$L = 0\colon\ \Phi_0 = f_0^{+} + f_0^{-}, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}(f_0^{+} - f_0^{-}).$$

Mit dieser Transformation lauten die obigen Momentegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}z} + (\Sigma_{\mathrm{T}} - \Sigma_{\mathrm{S}0})\, \Phi_0 = F_0, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}z} + (4\, \Sigma_{\mathrm{T}} - 3\, \Sigma_{\mathrm{S}1})\, \Phi_1 = 0.$$

F_0 sind die Spaltquellen (VI. 2.15). Der einzige Unterschied zur P_1-Approximation ist der Faktor von Φ_1, der der Größe $3\, \Sigma_{\mathrm{tr}}$ entspricht. Also gilt $D = 1/(4\, \Sigma_{\mathrm{T}} - 3\, \Sigma_{\mathrm{S}1})$.

REGISTER

B·I-Hochschultaschenbücher

Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft

Auszug aus dem Gesamtverzeichnis

MATHEMATIK

Allgemeine Mathematik

Determinanten und Matrizen **(293*)**
von A. C. Aitken *M. A., D. Sc., F. R. S. Prof. of Mathematics in the University of Edinburgh. 142 Seiten.*

Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen **(112/112a)**
von Dr. Henri Cartan, *Professeur à la Faculté sciences de Paris. 236 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Cauchy-Weierstraßsche Funktionentheorie **(48*)**
von Dr. Alexander Dinghas, *o. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 114 Seiten.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen **(19)**
von Dr. Friedhelm Erwe, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. 2., verbesserte Auflage. 152 Seiten mit 11 Abb.*

Differential- und Integralrechnung I, II **(30/30a, 31/31a)**
von Dr. Friedhelm Erwe, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen.*
I Elemente der Infinitesimalrechnung · Differentialrechnung. *364 Seiten mit 29 Abb.*
II Integralrechnung. *197 Seiten mit 50 Abb.*

Matrizenrechnung **(103/103a)**
von Dr. Wolfgang Gröbner, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck. 276 Seiten.*

Algebraische Geometrie I **(273/273a)**
von Dr. Wolfgang Gröbner, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck. 193 Seiten.*

Topologie **(836/836a)**
von Dr. K. P. Grotemeyer, *o. Prof. an der Freien Univ. Berlin, ausgearbeitet von* Eberhard Letzner, *Akad. Rat an der Freien Univ. Berlin, und* Rudolf Reinhard, *Studienrat an der Fritz-Karsen-Schule, Berlin. 187 Seiten mit Abb.*

Einführung in die mathematische Statistik und ihre Anwendung **(42/42a)**
von Martin Hengst, *a. o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule Berlin. 258 Seiten.*

Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen **(67*)**
von E. L. Ince, *D. Sc., Lecturer in Technical Mathematics in the University of Edinburgh. 180 Seiten.*

Tensorrechnung für Ingenieure **(197/197a)**
von Dr. Eberhard Klingbeil, *Institut für Praktische Mathematik der Techn. Hochschule Darmstadt. 197 Seiten mit Abb.*

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik **(413/413a)**
von Dr. Gerhard Kropp, *Privatdozent für Geschichte der Mathematik an der Freien Univ. Berlin. 194 Seiten mit Abb.*

Ingenieurmathematik I, II, III, IV, V **(59, 60, 61, 62/62a, 93)**
von Dr. Detlef Laugwitz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.*
I *158 Seiten mit 43 Abb.* — II *152 Seiten mit 43 Abb.*
III Gewöhnliche Differentialgleichungen. *142 Seiten.* — IV *196 Seiten mit Abb.*
V Komplexe Veränderliche. *158 Seiten mit Abb.*

Aufgaben zur Ingenieurmathematik (Ingenieurmathematik VII) **(95/95a)**
von Dr. Detlef Laugwitz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, und Dr.* Curt Schmieden, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 182 Seiten.*

Überblicke Mathematik 1968 I, II **(161/161a, 232/232a)**
Herausgegeben von Dr. Detlef Laugwitz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.* I *213 Seiten.* II *210 Seiten mit Abb.*

Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung **(165/165a)**
von Dr. Rolf Leis, *o. Prof. und Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik an der Univ. Bonn. 212 Seiten mit Abb.*

Nichteuklidische Geometrie **(123/123a)**
von Dr. Hanfried Lenz, *apl. Prof. an der Techn. Hochschule München. 235 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen **(139)**
von M. J. Lighthill. *F. R. S., Director, Royal Aircraft Establishment. 96 Seiten.*

Lineare Algebra **(828/828a)**
von Dr. Rolf Lingenberg, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 161 Seiten.*

Metamathematik **(25)**
von Dr. Paul Lorenzen, *o. Prof. an der Univ. Erlangen. 173 Seiten.*

Analysis I, II **(832*, 833*)**
von Dr. Erich Martensen, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt.* I *200 Seiten.* II *Etwa 180 Seiten.*

Einführung in die moderne Mathematik **(75/75a)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 2. verbesserte Auflage. 189 Seiten mit 44 Abb.*

Grundlagen der euklidischen Geometrie **(105/105a)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 231 Seiten.*

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik **(51)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 151 Seiten mit 15 Abb.*

Mathematiker-Lexikon **(414/414a*)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 309 Seiten mit Abb.*

Mathematisches Begriffswörterbuch **(99/99a)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 302 Seiten mit Abb.*

Aufgabensammlung zur Einführung in die Moderne Mathematik **(263/263a)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin, und* Günter Lessner, *Studienrat. 136 Seiten.*

Unendliche Reihen **(35)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 160 Seiten mit 19 Abb.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung **(285/285a)**
von Dr. Herbert Meschkowski, *o. Prof. an der Pädagogischen Hochschule, apl. Prof. an der Freien Univ. Berlin. 233 Seiten mit Abb.*

Analytische Geometrie und lineare Algebra **(15/15a)**
von Prof. Dr. Ernst Peschl, *Direktor des Mathem. Instituts der Univ. Bonn. Revidierter Nachdruck. 200 Seiten mit 8 Abb.*

Funktionentheorie I (131/131a)
von Prof. Dr. ERNST PESCHL, *Direktor des Mathem. Instituts der Univ. Bonn. 274 Seiten.*

Algebra (110/110a)
von Dr. HANS-JÖRG REIFFEN, *Privatdozent an der Univ. Bochum, Dr.* GÜNTER SCHEJA, *Wissenschaftlicher Rat und Prof. an der Univ. Münster, und Dr.* UDO VETTER, *Assistent an der Techn. Hochschule Hannover. 276 Seiten.*

Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra (492/492a)
von Prof. Dr. W. W. SAWYER, *Weleyan University. Etwa 180 Seiten.*

Mengenlehre I (Einführung in die axiomatische Mengenlehre) (56/56a)
von Dr. JÜRGEN SCHMIDT, *apl. Prof. an der Univ. Bonn.* I Grundbegriffe. *241 Seiten mit Abb.*

Allgemeine Algebra (803/803a)
von Dr. JÜRGEN SCHMIDT, *apl. Prof. an der Univ. Bonn. Etwa 260 Seiten.*

The Concept of Number (825/825a)
(A Chapter in the History of Mathematics, with Applications of Interest to Teachers), *by* CHRISTOPH J. SCRIBA, *Dozent an der Univ. Hamburg, with the assistance of M. E.* DORMER ELLIS, *University of Toronto. 216 Seiten.*

Transzendente Zahlen (137*)
von Dr. CARL LUDWIG SIEGEL, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey. Prof. em. an der Univ. Göttingen. 87 Seiten.*

Projektive Geometrie (829/829a)
von OLAF TAMASCHKE, *Univ. Tübingen. Etwa 120 Seiten.*

Aufgaben zur Funktionentheorie I (195/195a)
von L. J. VOLKOVISKII, G. I. LUNTS *und* J. G. ARAMANOVICH. *Etwa 220 Seiten mit Abb.*

Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (831/831a)
von Dr. GERHARD WANNER, *Mathematisches Institut der Univ. Innsbruck. 182 Seiten.*

Algebraische Zahlentheorie (136/136a)
von HERMANN WEYL, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey. 222 Seiten.*

Spezielle Mathematik

n-Ecke (471/471a*)
von Dr. FRIEDRICH BACHMANN, *o. Prof. an der Univ. Kiel, und* ECKART SCHMIDT, *Studienrat, Kiel. Etwa 220 Seiten.*

Algebren (97/97a)
von Dr. ERNST-AUGUST BEHRENS, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 260 Seiten.*

Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren (122/122a)
von Dr. EDGAR BERZ, *apl. Prof. an der Univ. Gießen. 233 Seiten.*

Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation (808/808a)
von Dr. BRUNO BROSOWSKI, *Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Privatdozent an der Univ. München. 157 Seiten.*

Mathematische Grundlagen der statistischen Mechanik (58/58a)
von Prof. Dr. A. J. CHINTSCHIN. *175 Seiten.*

Theorie der Verbände (38/38a)
von Dr. HELMUTH GERICKE, *o. Prof. an der Univ. München. 174 Seiten mit 61 Abb.*

Contributions to the Method of Lie Series (802/802a*)
von Dr. WOLFGANG GRÖBNER, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck, und Dr.* H. KNAPP, *Dozent an der Univ. Innsbruck. 265 Seiten.*

Vorlesungen über Riemannsche Flächen **(837/837a)**
von R. C. GUNNING, *o. Prof., Princeton, New Jersey. Etwa 260 Seiten.*

Algebraische Zahlentheorie **(M.F.O.2)**
Herausgegeben von Prof. Dr. HELMUT HASSE, *Direktor des mathematischen Seminars der Univ. Hamburg, und Prof. Dr.* PETER ROQUETTE, *Direktor des Mathematischen Instituts der Univ. Tübingen. 272 Seiten.*

Untersuchungen zum Vierfarbenproblem **(810/810a/810b)**
von Prof. Dr. HEINRICH HEESCH, *Techn. Hochschule Hannover. Etwa 380 Seiten mit Abb.*

Stabilitätstheorie von Ljapunow – Die direkte Methode mit Anwendungen **(194*)**
von JOSEPH LA SALLE *und* SALOMON LEFSCHETZ, *RIAS, Baltimore, Maryland (Research Institute for Advanced Studies, The Martin Company). 121 Seiten.*

Schulmathematik vom höheren Standpunkt **(118/118a)**
von Dr. DETLEF LAUGWITZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, und Dr.* HANS-JOACHIM VOLLRATH, *Studienrat im Hochschuldienst, Techn. Hochschule Darmstadt. (Reihe: Mathematik für Studienanfänger, hrsg. von Prof. Dr.* H. BEHNKE *und Prof. Dr.* D. LAUGWITZ.*) 195 Seiten mit Abb.*

Spezielle Funktionen und ihre Anwendung I, II **(234*, 235*)**
von N. N. LEBEDEV, *Physikalisch-Technisches Institut der Akademie der Wissenschaften, U. S. S. R. Jeder Band etwa 180 Seiten.*

Einführung in die Tensoranalysis **(77*)**
von A. LICHNEROWICZ, *Professeur au College de France. 157 Seiten.*

Grundlagen der Geometrie I **(158/158a)**
von Dr. ROLF LINGENBERG, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 260 Seiten mit Abb.*

Einführung in die abstrakte Algebra **(146/146a)**
von E. M. PATTERSON, *B. Sc., Ph. D., F. R. S. E., Prof. of Mathematics, University of Aberdeen, und* D. E. RUTHERFORD, *Dr. Math., D. Sc. Gregory Prof. of Applied Mathematics, University of St Andrews. 175 Seiten.*

Funktionalanalysis I **(82/82a)**
von Dr. ERIKA PFLAUMANN, *Institut für Angewandte Mathematik an der Univ. Bonn, und Dr.* HEINZ UNGER, *o. Prof. an der Univ. Bonn, Direktor des Instituts für Angewandte Mathematik. 240 Seiten.*

Topologische Vektorräume **(164/164a)**
von A. P. ROBERTSON, *Prof. an der Univ. Keele, und* WENDY ROBERTSON. *169 Seiten.*

Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie **(278/278a*)**
von Dr. WOLFGANG SCHWARZ, *Privatdozent an der Univ. Freiburg. Etwa 240 Seiten.*

Permutationsstrukturen **(710/710a)**
von OLAF TAMASCHKE, *Univ. Tübingen. Etwa 280 Seiten.*

Konvexe Mengen **(402/402a)**
von Prof. Dr. FREDERICK A. VALENTINE, *Department of Mathematics, University of California, Los Angeles. 247 Seiten mit Abb.*

Graphentheorie **(248/248a*)**
von Dr. KLAUS WAGNER, *apl. Prof. an der Univ. Köln. Etwa 260 Seiten.*

Angewandte Mathematik

Statistische Methoden der Datenanalyse **(816/816a)**
von Dr. SIEGMUND BRANDT, *Privatdozent an der Univ. Heidelberg. 267 Seiten.*

Algorithmen, rekursive Funktionen und formale Sprachen **(817*)**
von Dr. WILFRIED BRAUER, *Institut für Angewandte Mathematik der Univ. Bonn, und Dipl.-Math.* KLAUS INDERMARK, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Birlinghoven/Bonn. 171 Seiten.*

Fortran-Fibel **(204*)**

von Dr. HANS BREUER, *Prof. an der University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada. 85 Seiten mit Abb.*

Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden **(826/826a)**

von PAUL L. BUTZER, *o. Prof. an der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen, und Dr.* KARL SCHERER, *Lehrstuhl A für Mathematik der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen. 172 Seiten.*

Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung **(434*)**

von Dr. HEINZ ELTERMANN, *Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. 128 Seiten mit Abb.*

Mathematische Methoden der Physik I, II **(89, 90/90a)**

von Dr. WOLFGANG GRÖBNER, *o. Prof. an der Univ. Innsbruck, und Dr.* PETER LESKY, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart.*
I *164 Seiten.* — II *248 Seiten.*

Fehler- und Ausgleichsrechnung **(262/262a*)**

von Dr. ERWIN HARDTWIG, *apl. Prof. an der Univ. München. 262 Seiten mit Abb.*

Analogrechnen **(168/168a)**

von Dr. JOSEF HEINHOLD, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* ULRICH KULISCH, *o. Prof. an der Univ. Karlsruhe. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Mathematische Grundlagen der Kartographie **(443/443a)**

von Dr. JOSEF HOSCHEK, *Privatdozent an der Techn. Hochschule Darmstadt. 167 Seiten mit Abb.*

Automatentheorie und formale Sprachen **(821/821a)**

(I. Turingmaschinen und rekursive Funktionen) *von Privatdozent Dr.* GÜNTER HOTZ, *Wissenschaftlicher Rat an der Univ. Saarbrücken, und Dipl.-Math.* HERMANN WALTER, *Institut für Angewandte Mathematik der Univ. Saarbrücken. 174 Seiten.*

Tensorrechnung für Ingenieure **(197/197a)**

von Dr. EBERHARD KLINGBEIL, *Institut für Praktische Mathematik der Techn. Hochschule Darmstadt. 197 Seiten mit Abb.*

Stabilitätstheorie von Ljapunow – Die direkte Methode mit Anwendungen **(194*)**

von JOSEPH LA SALLE *und* SALOMON LEFSCHETZ, *RIAS, Baltimore, Maryland (Research Institute for Advanced Studies, The Martin Company). 121 Seiten.*

Anwendung von Lieschen Gruppen in der Physik **(163/163a)**

von HARRY J. LIPKIN, *Weizmann Institute of Science, Rehovoth, Israel. 177 Seiten mit Abb.*

Schwingungslehre **(189/189a)**

von Dr. H. LIPPMANN, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. 264 Seiten mit Abb.*

Analyse technischer Systeme **(81/81a*)**

von MACFARLANE, *B. Sc. Ph. D. A. M. I. E. E., Queen Mary College, University of London. 312 Seiten mit Abb.*

Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik **(154/154a)**

von Dr. OTTO MAHRENHOLTZ, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 208 Seiten mit Abb.*

Programmierung elektronischer Rechenanlagen **(49*)**

von Dr. DIETER MÜLLER, *Institut für Theoretische Physik der Univ. Heidelberg. 3., wesentlich erweiterte Auflage. 182 Seiten mit 26 Abb.*

FORTRAN IV-Programmieranleitung **(804*)**

von Dipl.-Math. KARL H. MÜLLER *und Dipl.-Math.* IRMTRAUD STREKER, *Zentrales Recheninstitut der Univ. Frankfurt am Main. 140 Seiten.*

Einführung in die Praktische Mathematik **(812*)**

von Dr. JOACHIM NITSCHE, *o. Prof. an der Univ. Freiburg. 144 Seiten.*

Numerisches Rechnen I **(88)**

von Ben Noble, *M. A., B. Sc., D. Sc., A. M. I. E. E., The Royal College of Science and Technology, Glasgow. 154 Seiten mit Abb.*

Elektro- und Magnetohydrodynamik **(811/811a*)**

Vorträge der GAMM-Fachtagung am 10. u. 11. 10. 1967 in Aachen. Herausgegeben von Prof. Dr. sc. techn. F. Schultz-Grunow, *Institut für Allgemeine Mechanik an der Techn. Hochschule Aachen. 308 Seiten mit Abb.*

Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik **(M.F.O.1)**

Bericht einer Tagung des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach 15.–21. März 1964. Herausgegeben von Dr. Eduard Stiefel, *o. Prof. für Angewandte Mathematik an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich. 350 Seiten mit Abb.*

Matrizenrechnung in der Elektrotechnik **(91)**

von A. Mary Tropper, *M. Sc. Ph. D., Queen Mary College, Univ. of London. 99 Seiten.*

Darstellende Geometrie I, II **(96/96a, 133/133a)**

von Dr. Walter Wunderlich, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Wien.*
I *187 Seiten mit Abb.* — II *234 Seiten mit Abb.*

Mathematische Tafelwerke

12stellige Tafeln der Legendre-Polynome **(320a–e)**

von Dr. Werner Bundke, *Institut für Angewandte Physik der Univ. Frankfurt am Main. 352 Seiten.*

Mathematische Formelsammlung **(13)**

von Dr. Karl Rottmann, *2., verbesserte Auflage. 176 Seiten mit 39 Abb.*

Mathematische Funktionstafeln **(14/14a)**

von Dr. Karl Rottmann. *204 Seiten.*

Siebenstellige dekadische Logarithmen **(17/17a)**

von Dr. Karl Rottmann. *194 Seiten.*

Siebenstellige dekadische Logarithmen der trigonometrischen Funktionen **(26/26a/26b)**

von Dr. Karl Rottmann. *440 Seiten.*

Winkelfunktionen und logarithmische Funktionen **(113/113a)**

von Dr. Karl Rottmann. *273 Seiten.*

Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und Chemie **(54*)**

Mathematische Formelsammlung II
von Ian N. Sneddon, *M. A., D. Sc., Simson Prof. of Mathematics in the University of Glasgow. 166 Seiten mit 14 Abb.*

Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Tafeln I und II **(55/55a, 76/76a)**

von Kurt Uhde, *Brown, Boveri/Krupp Reaktorbau GmbH, Mannheim.* I *267 Seiten* — II *211 Seiten.*

PHYSIK

Allgemeine Physik

Elektrodynamik **(233/233a)**

von Dr. Gernot Eder, *o. Prof. an der Univ. Gießen. 273 Seiten mit Abb.*

Ein Vierteljahrhundert moderner Physik **(702a–702m)**

Otto Haxel zum 60. Geburtstag – herausgegeben von Dr. Heinz Filthuth, *o. Prof. an der Univ. Heidelberg. 773 Seiten mit Abb.*

Statistische Mechanik I, II, III **(68, 69, 70)**

von KERSON HUANG, *Associate Prof. of Physics, Massachusetts Institute of Technology.*
I Thermodynamik und kinetische Theorie, *163 Seiten.* II Statistische Mechanik, *214 Seiten.*
III Spezielle Probleme der statistischen Mechanik, *164 Seiten.*

Grundbegriffe der Physik **(449/449a)**

von Dr. FRIEDRICH HUND, *o. Prof. em. für theoretische Physik an der Univ. Göttingen. 234 Seiten.*

Aufgaben und Lösungen zur Experimentalphysik I, II **(155*, 156*)**

von Dr. KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.*
I *158 Seiten mit Abb.* — II *150 Seiten mit Abb.*

Experimentalphysik I (1. und 2. Teil) **(111*, 114*)**

von Prof. Dr. EDGAR LÜSCHER, *Direktor im Physik-Department der Techn. Hochschule München, mit Übungsaufgaben von Dr.* KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.*
Mechanik, Geometrische Optik, Wärme. I *260 Seiten mit Abb.* II *215 Seiten mit Abb.*

Experimentalphysik II, III (Elektromagnetische Vorgänge) **(115/115a, 116/116a)**

von Prof. Dr. EDGAR LÜSCHER, *Direktor im Physik-Department der Techn. Hochschule München, mit Übungsaufgaben von Dr.* KARL LUCHNER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München.* I *336 Seiten mit 327 Abb. und graphischen Darstellungen.* II *Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Philosophische Probleme der modernen Physik **(50/50a)**

von Dr. PETER MITTELSTAEDT, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Köln. 3., überarbeitete Auflage. 208 Seiten mit 12 Abb.*

Physikalische Übungsaufgaben I, II, III **(32, 33, 34)**

von Prof. Dr. P. SCHERRER, *em. Ordinarius für Physik, und Prof. Dr.* P. STOLL, *Titular-Prof. an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich.*
I Mechanik, Akustik *(92 Aufgaben), 96 Seiten mit 44 Abb.*
II Optik, Thermodynamik, Elektrizitätslehre *(97 Aufgaben), 103 Seiten.*
III Elektrizitätslehre und Atomphysik *(83 Aufgaben), 103 Seiten.*

Theoretische Mechanik I **(801*)**

von Dr. GEORG SÜSSMANN, *o. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 192 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Atomphysik **(12)**

von Dr. HORST TEICHMANN, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 136 Seiten mit 47 Abb.*

Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung **(39/39a)**

von Dr. HORST TEICHMANN, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 3. Auflage. 231 Seiten mit 64 Abb.*

Physikalische Fachliteratur **(440/440a)**

von Dr. VALENTIN WEHEFRITZ, *Bochum. 171 Seiten.*

Einführung in die Physik I, II, III **(3, 4, 5)**

von Prof. Dr. WALTER WEIZEL, *Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Univ. Bonn. 5. Auflage.*
I Mechanik, Wärme, *171 Seiten mit 138 Abb.*
II Elektrizität, Magnetismus, *176 Seiten mit 12 Abb.*
III Optik, Atomphysik, *192 Seiten mit 99 Abb.*

Physikalische Formelsammlung I, II, III **(28, 36, 37/37a)**

von Prof. Dr. WALTER WEIZEL, *Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Univ. Bonn.*
I Mechanik, Strömungslehre, Elektrodynamik, *175 Seiten mit 23 Abb.*
II Optik, Thermodynamik, Relativitätstheorie, *148 Seiten.*
III Quantentheorie, *169 Seiten mit zweifarbigem Druck der Formeln.*

Quantentheorie, Relativitätstheorie, Elementarteilchen

S-Matrix-Theorie **(438/438a)**

von A. O. BARUT, *Dr. Sc., Prof. an der Univ. von Colorado. Etwa 300 Seiten mit Abb.*

Kernmodelle (203/203a*

von Dr. GERMAN BAUMGÄRTNER *und Dipl.-Phys.* PETER SCHUCK, *Physik Department der Techn. Hochschule München, Abt. Theorie. 267 Seiten mit Abb.*

Relativistische Quantenmechanik (98/98a*

von JAMES D. BJORKEN, *Associate Prof., und* SIDNEY D. DRELL, *Prof. an der Stanford Universit 312 Seiten mit Abb.*

Relativistische Quantenfeldtheorie (101/101a*

von JAMES D. BJORKEN, *Associate Prof., und* SIDNEY D. DRELL, *Prof. an der Stanford Universit 312 Seiten mit Abb.*

Einführung in die Theorie der Kernspektren (473/473a*

von Dr. WOLFGANG DONNER, *Köln. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Quantenmechanik I (264/264a*

von Dr. GERNOT EDER, *o. Prof. an der Univ. Gießen. 324 Seiten.*

Drehimpulse in der Quantenmechanik (53/53a

von A. R. EDMONDS, *Department of Physics, Imperial College of Science and Technology of the University o London. 167 Seiten.*

Einführung in die Kernphysik (16

von Prof. Dr. LEONARD EISENBUD *und Prof. Dr.* EUGENE P. WIGNER, *Princeton/New Jersey. 145 Seite mit 15 Abb.*

Quantenelektrodynamik (401/401a*

von Prof. Dr. RICHARD P. FEYNMAN, *California Institute of Technology. 249 Seiten mit Abb.*

Elementarteilchenphysik I (462/462a

von STEPHAN GASIOROWICZ, *Ph. D., Prof. an der Univ. von Minnesota. Etwa 200 Seiten.*

Physikalische Prinzipien der Quantentheorie (1

von Prof. Dr. WERNER HEISENBERG, *Direktor des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysi in München. 125 Seiten mit 22 Abb.*

Geschichte der Quantentheorie (200/200a*

von Dr. FRIEDRICH HUND, *o. Prof. em. für theoretische Physik an der Univ. Göttingen. 239 Seiten mit Abb*

Elementarteilchenphysik (100/100a/100b

von GUNNAR KÄLLÉN, *Department of Theoretical Physics, University of Lund, Schweden. 572 Seiten mi Abb.*

Quantentheorie (701/701a*

von Dr. HEINRICH MITTER, *Privatdozent an der Techn. Hochschule München und Max-Planck-Institu für Physik und Astrophysik. 316 Seiten.*

Relativistische Elektronentheorie (422/422a

von M. E. ROSE, *M. A., Ph. D. Chief Physicist, Oak Ridge National Laboratory. Etwa 300 Seiten mit Abb*

Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie (435/435a*

von R. F. STREATER, *Imperial College of Science and Technology, und* A. S. WIGHTMAN, *Princeton University. 235 Seiten.*

Einführung in die Quantenmechanik I (9/9a

von Dr. GEORG SÜSSMANN, *o. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main.* I *Grundlagen, 202 Seiten.*

Quantenmechanik der Vielteilchensysteme (52/52a

von D. J. THOULESS, *Department of Mathematical Physics, Univ. of Birmingham (England). 208 Seite mit 32 Abb.*

Spezielle Physik

Neutronenphysikalisches Praktikum I, II **(170/170a, 171/171a)**

von Dr. Friedrich Bensch *und Dr.* Carl M. Fleck, *Atominstitut der österreichischen Hochschulen, Wien.*

I Einführung in die Physik und Technik der Aktivierungssonden. *234 Seiten mit Abb.*

II Ausgewählte Versuche und ihre Grundlagen. *182 Seiten mit Abb.*

Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse **(162/162a*)**

von Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam, und* Peter Mazur, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Leyden. 217 Seiten.*

Thermodynamik irreversibler Prozesse **(18/18a)**

von Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam. 216 Seiten mit Abb.*

Supraleitung **(74*)**

von E. A. Lynton, *Prof. of Physics, Rutgers, The State University New Brunswick, N. J., USA. 205 Seiten.*

Statistische Methoden der Thermodynamik **(288/288a*)**

von Dr. Peter Mazur, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Leyden, und Dr.* Sybren R. de Groot, *o. Prof. für theoretische Physik an der Univ. Amsterdam. Etwa 240 Seiten.*

Halbleiter **(21)**

von Dr. Horst Teichmann, *Honorarprof. an der Univ. Würzburg. 2. Auflage. 136 Seiten mit 55 Abb.*

Der Mößbauer-Effekt und seine Anwendungen in Physik und Chemie **(2/2a)**

von Dr. Horst Wegener, *a. o. Prof. an der Univ. Erlangen-Nürnberg. 214 Seiten mit 70 Abb.*

Angewandte Physik

Einführung in die Metallkunde **(196/196a)**

von Dr.-Ing. Horst Böhm, *o. Prof. am Institut für Werkstoffkunde an der Techn. Hochschule Aachen. 236 Seiten mit Abb.*

Theorie der Kernreaktoren I, II **(411/411a*, 412/412a)**

von Dr. K. H. Höcker, *o. Prof. am Institut für Kernenergetik an der Techn. Hochschule Stuttgart, und Dr.* D. Emendörfer, *Dozent am Institut für Kernenergetik an der Techn. Hochschule Stuttgart.*

Einführung in die Geophysik I **(275/275a)**

von Dr. Walter Kertz, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. Etwa 240 Seiten.*

Altersbestimmung mit der C^{14}-Methode **(403/403a*)**

von Prof. Dr. Willard F. Libby, *Chikago, mit einem Kapitel von Frederick Johnson. 205 Seiten mit Abb.*

Maser und Laser **(79/79a)**

von Prof. Dr. Erich Mollwo, *Direktor des Instituts für Angewandte Physik an der Univ. Erlangen-Nürnberg, und Dipl.-Phys.* Wittich Kaule, *Assistent am Institut für Angewandte Physik an der Univ. Erlangen-Nürnberg. 2. Auflage. 279 Seiten.*

Reaktorphysik I, II **(6, 11)**

von Prof. Dr. Rudolf Schulten *und Dr.* Wernfried Güth, *Arbeitsgemeinschaft BBC-Krupp für Kernenergie-Anlagen.*

I Der Reaktor im stationären Betrieb, *171 Seiten mit 24 Abb.*

II Der Reaktor im nichtstationären Betrieb, *164 Seiten mit 21 Abb.*

Abbildungen von Oberflächen mit Elektronen, Ionen und Röntgenstrahlen **(428/428a)**

von Dr. Hellmut Seiler, *Privatdozent am Institut für Angewandte Physik an der Univ. Tübingen. 131 Seiten mit Abb.*

CHEMIE

Chemische Thermodynamik **(213/213a**
von Dr. VALENTIN FREISE, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 270 Seiten.*

Biochemie **(187/187a**
von Dr. GERNOT GRIMMER, *Privatdozent an der Univ. Hamburg. Etwa 260 Seiten.*

Chromatographie in der Gasphase I–IV **(22/22a, 23/23a*, 24/24a, 92/92a, 468/468a, 472/472**
von Dr. RUDOLF KAISER, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen.*
I Gas-Chromatographie, *revidierter Nachdruck. 205 Seiten mit 102 Abb.*
II Kapillar-Chromatographie, *2., wesentlich erweiterte Auflage. 339 Seiten mit Abb.*
III Tabellen, 2. erweiterte Auflage. 1. Teil (24/24a) *181 Seiten mit Abb.* 2. Teil (468/468a) *165 Sei mit Abb.* IV Quantitative Auswertung, 2. Auflage. 1. Teil (92/92a) *185 Seiten mit Abb.* – 2. T (472/472a) *118 Seiten mit Abb.*

Reaktionskinetik I (homogene Gasreaktion) **(290/290a**
von KEITH J. LAIDLER, *Chairman of the Department of Chemistry, University of Ottawa. Etwa 230 Seiten mit Abb.*

Elektronenspektren organischer Moleküle **(250/250a**
von J. N. MURRELL, *Prof. für Chemie an der Univ. von Sussex. 359 Seiten mit Abb.*

Quantentheoretische Chemie I, II, III **(43, 44/44a, 45/45**
von Dr. HEINZWERNER PREUSS, *Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Privatdozent für theoretische physikalische Chemie an der Univ. Frankfurt am Main.*
I *94 Seiten mit 19 Abb.* — II *238 Seiten mit 19 Abb.* — III *222 Seiten mit Abb.*

Anorganische Chemie I, II **(86/86a, 150/150**
von Prof. Dr. MAX SCHMIDT, *Direktor des Instituts für Anorganische Chemie der Univ. Würzburg.*
I *301 Seiten mit Abb.* — II *221 Seiten mit Abb.*

Photochemie **(27/27**
von Dr. HERBERT STAUDE, *Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 168 Seiten mit 40 Abb.*

Organische Chemie **(71/71**
von Dr. MANFRED WILK, *apl. Prof. an der Univ. Frankfurt am Main. 372 Seiten mit Abb.*

BIOLOGIE

Biochemisches Praktikum für Landwirtschafts- und Ernährungswissenschaften **(809/809**
von Dr. K.-H. NEUMANN, *Justus Liebig-Univ. Gießen. Etwa 200 Seiten mit zahlreichen Abb.*

Paläobotanik I, II **(357/357a, 359/359**
von Dr. FRIEDEMANN SCHAARSCHMIDT, *Naturmuseum und Forschungsinstitut Senckenberg, Frankf am Main.* I *121 Seiten mit Abb. und 14 Farbtafeln.* II *102 Seiten mit Abb. und 22 Farbtafeln.*

Pflanzenleben **(145/145a**
von Prof. F. C. STEWARD, *unter Mitarbeit von* A. J. KRIKORIAN, *Cornell University, Ithaca, N. Y. A torisierte Übersetzung von Dr.* K.-H. NEUMANN, *Justus Liebig-Univ. Gießen. 268 Seiten mit Abb.*

VERFAHRENSTECHNIK

Grundlagen der thermischen Flüssigkeitszerlegung **(2**
von Dr.-Ing. REINHARD BILLET, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 150 Seiten m 50 Abb.*

Optimierung in der Rektifiziertechnik **(261*)**

von Dr.-Ing. Reinhard Billet, *Verfahrenstechnische Versuchsgruppe, Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 129 Seiten.*

Verdampfertechnik **(85)**

on Dr.-Ing. Reinhard Billet, *Badische Anilin- & Soda-Fabrik AG, Ludwigshafen. 166 Seiten nit Abb.*

REGELUNGSTECHNIK

Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik **(154/154a)**

on Dr. Otto Mahrenholtz, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 208 Seiten mit Abb.*

Regelungstechnik I **(63/63a*)**

on Gerhard Pressler, *Dipl.-Phys., Hartmann u. Braun, Frankfurt am Main.*
Grundelemente, *3., überarbeitete Auflage. 348 Seiten mit 235 Abb.*

Frequenzgang- und Wurzelortskurvenverfahren **(193/193a)**

on Dr. Helmut Schwarz, *Wissenschaftlicher Rat und Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. 164 Seiten.*

INFORMATIK

Endliche Automaten I **(H703)**

on Dr. Karl Heinz Böhling *und* Klaus Indermark, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Birlinghoven/Bonn. 99 Seiten.*

Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen – Theorie der Syntax **(404/404a)**

on Dr. H. Maurer, *University of Calgary.* Reihe: INFORMATIK, *herausgegeben von Dr.* U. Kulisch, *Karlsruhe. Etwa 220 Seiten.*

Lineare Automaten **(708)**

on Dr. Bernd Reusch, *Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Birlinghoven/Bonn. Etwa 160 Seiten.*

Die harmonische Linearisierung I, II **(469/469a, 470/470a)**

on Dr. Rudolf Starkermann, *BBC AG, Baden/Schweiz. (Beschreibungsfunktion)* Reihe: Theoretische und experimentelle Methoden der Regelungstechnik, *herausgegeben von* Gerhard Pressler.
Einführung, Schwingungen, nichtlineare Regelkreisglieder – II Nichtlineare Regelsysteme.
Jeder Band etwa 200 Seiten.

ELEKTROTECHNIK

Grundlagen der Elektrotechnik I, II, III **(182, 183, 184)**

on Dr. Georg Bosse, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt, unter Mitarbeit von Dipl.-Ing.* W. Mecklenbräuker, *wiss. Assistent und Dipl.-Ing.* G. Wiesemann, *wiss. Assistent.*
141 Seiten mit Abb. — II *153 Seiten mit Abb.* — III *136 Seiten.*

Dampf- und Wasserkraftwerke **(300/300a*)**

on Dr. Paul Denzel, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Aachen. 231 Seiten mit Abb.*

Statistische Übertragungstheorie **(130/130a)**

on Dr. Friedrich Alexander Fischer, *Honorarprof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 87 Seiten.*

Probleme der Zuverlässigkeit elektronischer Schaltungen **(820/820a)**

on Dr.-Ing. Winfried Görke, *Institut für Nachrichtenübertragung und Nachrichtenverarbeitung der Techn. Hochschule Karlsruhe. Etwa 200 Seiten.*

Wellenausbreitung I **(141/141a**

von Dr.-Ing. JÜRGEN GROSSKOPF, *Lehrbeauftragter an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 260 Se ten mit Abb.*

Antennen I **(140/140a**

von Dipl.-Ing. ADOLF HEILMANN, *Honorarprof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 240 Seit mit Abb.*

Aufgabensammlung zur Starkstromtechnik **(198/198a**

von Dr.-Ing HANS PRASSLER, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe und Dr.-Ing.* A. PRIES 192 *Seiten mit Abb.*

Energiewandler der Starkstromtechnik I **(199/199a**

von Dr.-Ing. HANS PRASSLER, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe. 178 Seiten mit Abb.*

Matrizenrechnung in der Elektrotechnik **(91**

von A. MARY TROPPER, *M. Sc. Ph. D., Queen Mary College, Univ. of London. 99 Seiten.*

Elektrische Netzwerke und Maschinen (In Matrizendarstellung) **(108/108a***

von Dr. HERBERT WEH, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. 309 Seiten mit Abb.*

Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie I **(818/818a**

von Dr.-Ing. INGO WOLFF, *wissenschaftl. Mitarbeiter am Institut für Hochfrequenztechnik der Techn Hochschule Aachen. 236 Seiten mit Abb.*

TECHNISCHE MECHANIK

Aufgaben zur Theoretischen Mechanik **(709****

von JENS BAUCHERT, *wiss. Assistent,* GÜNTER HESSE, *wiss. Assistent,* SIEGFRIED KESSEL, *Aka Rat,* JÜRGEN LENZ, *wiss. Assistent, Lehrstuhl für Theoretische Mechanik der Univ. Karlsruhe. Etw 260 Seiten.*

Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I **(124/124a**

von Dr.-Ing. GERHARD CZERWENKA, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* WALTE SCHNELL, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. 193 Seiten mit Abb.*

Rechenmethoden des Leichtbaus II **(125/125a***

von Dr.-Ing. GERHARD CZERWENKA, *o. Prof. an der Techn. Hochschule München, und Dr.* WALTE SCHNELL, *o. Prof. an der Techn. Hochschule Darmstadt. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

Technische Mechanik I, II **(205/205a*, 206/206a**

von Dr.-Ing. EDUARD PESTEL, *o. Prof. am Institut für Mechanik an der Techn. Hochschule Hannover* I *284 Seiten mit Abb.* — II *196 Seiten mit Abb.*

Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierter Sprache **(830***

von Dr.-Ing. K.-H. SCHRADER, *Privatdozent für Mechanik an der Techn. Univ. Berlin. 137 Seiten.*

WERKSTOFFKUNDE

Einführung in die Werkstoffkunde **(467****

von Dr. HEIN-PETER STÜWE, *o. Prof. an der Techn. Univ. Braunschweig. Etwa 240 Seiten mit Abb.*

ASTRONOMIE

Einführung in die Astronomie – Methoden und Ergebnisse **(8/8a**

von Dr. FRIEDRICH BECKER, *o. Prof. em. an der Univ. Bonn. 5. Auflage. 249 Seiten mit Abb.*

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft

1	Heisenberg	Physikalische Prinzipien der Quantentheorie
2/2a	Wegener	Der Mößbauereffekt und seine Anwendungen in Physik und Chemie
3, 4, 5	Weizel	Einführung in die Physik I, II, III
6	Schulten/Güth	Reaktorphysik I
8/8a	Becker	Einführung in die Astronomie – Methoden und Ergebnisse
9/9a	Süßmann	Einführung in die Quantenmechanik I
11	Schulten/Güth	Reaktorphysik II
12	Teichmann	Einführung in die Atomphysik
13	Rottmann	Mathematische Formelsammlung
14/14a	Rottmann	Mathematische Funktionstafeln
15/15a	Peschl	Analytische Geometrie und lineare Algebra
16	Eisenbud/Wigner	Einführung in die Kernphysik
17/17a	Rottmann	Siebenstellige dekadische Logarithmen
18/18a	de Groot	Thermodynamik irreversibler Prozesse
19	Erwe	Gewöhnliche Differentialgleichungen
20/a/b	Schurig/Götz/Schaifers	Himmelsatlas
21	Teichmann	Halbleiter
22/22a, 23/23a*, 24/24a	Kaiser	Chromatographie in der Gasphase I, II, III/1
25	Lorenzen	Metamathematik
26/a/b	Rottmann	Siebenstellige dekadische Logarithmen der trigonometrischen Funktionen
27/27a	Staude	Photochemie
28	Weizel	Physikalische Formelsammlung I
29	Billet	Grundlagen der thermischen Flüssigkeitszerlegung
30/30a, 31/31a	Erwe	Differential- und Integralrechnung I, II
32, 33, 34	Scherrer/Stoll	Physikalische Übungsaufgaben I, II, III
35	Meschkowski	Unendliche Reihen
36, 37/37a	Weizel	Physikalische Formelsammlung II, III
38/38a	Gericke	Theorie der Verbände
39/39a	Teichmann	Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung
40/40a	Bohrmann	Bahnen künstlicher Satelliten
41/41a	Leinfellner	Einführung in die Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie
42/42a	Hengst	Einführung in die math. Statistik und ihre Anwendung
43, 44/44a, 45/45a	Preuß	Quantentheoretische Chemie I, II, III
48*	Dinghas	Einführung in die Cauchy-Weierstraßsche Funktionentheorie
49*	Müller, D.	Programmierung elektronischer Rechenanlagen
50/50a	Mittelstaedt	Philosophische Probleme der modernen Physik
51	Meschkowski	Reihenentwicklungen in der math. Physik
52/52a	Thouless	Quantenmechanik der Vielteilchensysteme
53/53a	Edmonds	Drehimpulse in der Quantenmechanik
54*	Sneddon	Spezielle Funktionen der math. Physik und Chemie
55/55a	Uhde	Spezielle Funktionen der math. Physik, Tafeln I
56/56a	Schmidt, J.	Mengenlehre I
57/57a	Müller, R.	Astronomische Begriffe
58/58a	Chintschin	Math. Grundlagen der statistischen Mechanik
59, 60, 61, 62/62a	Laugwitz	Ingenieurmathematik I, II, III, IV
63/63a*	Preßler	Regelungstechnik I – Grundelemente –
67*	Ince	Die Integration gewöhnl. Differentialgleichungen
68, 69, 70	Huang	Statistische Mechanik I, II, III
71/71a	Wilk	Organische Chemie
74*	Lynton	Supraleitung
75/75a	Meschkowski	Einführung in die moderne Mathematik
76/76a	Uhde	Spezielle Funktionen der math. Physik, Tafeln II
77*	Lichnerowicz	Einführung in die Tensoranalysis
79/79a	Mollwo/Kaule	Maser und Laser
81/81a*	MacFarlane	Analyse technischer Systeme
82/82a	Pflaumann/Unger	Funktionalanalysis I
85	Billet	Verdampfertechnik
86/86a	Schmidt, M.	Anorganische Chemie I
88	Noble	Numerisches Rechnen I
89, 90/90a	Gröbner/Lesky	Mathematische Methoden der Physik I, II
91	Tropper	Matrizenrechnung in der Elektrotechnik
92/92a	Kaiser	Chromatographie in der Gasphase IV/1
93	Laugwitz	Ingenieurmathematik V
95/95a	Laugwitz/Schmieden	Aufgaben zur Ingenieurmathematik
96/96a	Wunderlich, W.	Darstellende Geometrie I
97/97a	Behrens	Algebren
98/98a*	Bjorken/Drell	Relativistische Quantenmechanik
99/99a	Meschkowski	Mathematisches Begriffswörterbuch

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft

100/a/b	Källén	Elementarteilchenphysik
101/101a*	Bjorken/Drell	Relativistische Quantenfeldtheorie
103/103a	Gröbner	Matrizenrechnung
105/105a	Meschkowski	Grundlagen der euklidischen Geometrie
107/107a	Giese	Weltraumforschung I
108/108a*	Weh	Elektrische Netzwerke und Maschinen
110/110a	Reiffen/Scheja/Vetter	Algebra
111*	Lüscher	Experimentalphysik I, 1. Teil
112/112a	Cartan	Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen
113/113a	Rottmann	Winkelfunktionen und logarithmische Funktionen
114*	Lüscher	Experimentalphysik I, 2. Teil
115/115a	Lüscher	Experimentalphysik II
118/118a	Laugwitz/Vollrath	Schulmathematik vom höheren Standpunkt als Einführung in das Hochschulstudium
122/122a	Berz	Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren
123/123a	Lenz	Nichteuklidische Geometrie
124/124a	Czerwenka/Schnell	Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I
127/127a	Zimmermann	Astronomische Übungsaufgaben
130/130a	Fischer	Statistische Übertragungstheorie
131/131a	Peschl	Funktionentheorie I
133/133a	Wunderlich, W.	Darstellende Geometrie II
136/136a	Weyl	Algebraische Zahlentheorie
137*	Siegel	Transzendente Zahlen
139	Lighthill	Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen
143/143a, 144/144a	Bucerius/Schneider	Himmelsmechanik I, II
145/145a*	Steward/Neumann	Das Leben der Pflanzen
146/146a	Patterson/Rutherford	Einführung in die abstrakte Algebra
150/150a	Schmidt, M.	Anorganische Chemie II
154/154a	Mahrenholtz	Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik
155*, 156*	Luchner	Aufgaben und Lösungen zur Experimentalphysik I, II
161/161a	Laugwitz,	Überblicke Mathematik 1 · 1968
162/162a*	de Groot/Mazur	Einführung in die irreversible Thermodynamik
163/163a	Lipkin	Anwendung von Lieschen Gruppen in der Physik
164/164a	Robertson	Topologische Vektorräume
165/165a	Leis	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung
170/170a, 171/171a	Bensch/Fleck	Neutronenphysikalisches Praktikum I, II
182,183,184	Bosse	Grundlagen der Elektrotechnik I, II, III
187*, 190*	Grimmer	Biochemie I, II
189/189a	Lippmann	Schwingungslehre
193/193a	Schwarz	Frequenzgang und Wurzelortskurvenverfahren
194*	La Salle/Lefschetz	Stabilitätstheorie von Ljapunow – Die direkte Methode der Anwendung
196/196a	Böhm	Einführung in die Metallkunde
197/197a	Klingbeil	Tensorrechnung für Ingenieure
198/198a	Prassler/Prieß	Aufgabensammlung zur Starkstromtechnik
199/199a	Prassler	Energiewandler der Starkstromtechnik I
200/200a*	Hund	Geschichte der Quantentheorie
203/203a*	Baumgärtner/Schuck	Kernmodelle
204*	Breuer	Fortran-Fibel
205/205a*	Pestel	Technische Mechanik I
206/206a	Pestel	Technische Mechanik II
213/213a*	Freise	Chemische Thermodynamik
227/227a	Kamlah/Lorenzen	Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens
232/232a	Laugwitz	Überblicke Mathematik II
233/233a	Eder	Elektrodynamik
236/236a	Lorenzen	Normative Logic and Ethics
250/250a*	Murrell	Elektronenspektren organischer Moleküle
261*	Billet	Optimierung in der Rektifiziertechnik
262/262a*	Hardtwig	Fehler- und Ausgleichsrechnung
263/263a	Meschkowski/Leßner	Aufgabensammlung zur Einf. i. d. mod. Mathematik
264/264a*	Eder	Quantenmechanik I
273/273a	Gröbner	Algebraische Geometrie I
285/285a	Meschkowski	Wahrscheinlichkeitsrechnung
293*	Aitken	Determinanten und Matrizen
298/298a	Becker	Geschichte der Astronomie
300/300a*	Denzel	Dampf- und Wasserkraftwerke
320a–e	Bundke	12stellige Tafeln der Legendre-Polynome
327	Ganssen	Grundsätze der Bodenbildung
333/a/b	Hirschberg	Völkerkunde Afrikas
337/337a	Herrmann	Völkerkunde Australiens
338/a/b	Hirschberg/Janata	Technologie und Ergologie in der Völkerkunde

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft

Fortsetzung von Umschlagseite 3

340/340a,	Wunderlich, H.-G.	Wesen und Ursachen der Gebirgsbildung
341/341a	Wunderlich, H.-G.	Einführung in die Geologie 1. und 2. Teil
354/354a*	Ganssen	Trockengebiete
356/356a*	Manshard	Agrargeographie der Tropen
357/357a,		
359/359a	Schaarschmidt	Paläobotanik I, II
401/401a*	Feynman	Quantenelektrodynamik
402/402a	Valentine	Konvexe Mengen
403/403a*	Libby	Altersbestimmung mit der C-14-Methode
411/411a	Höcker/Emendörfer	Theorie der Kernreaktoren I
413/413a	Kropp	Vorlesungen über Geschichte der Mathematik
414/414a*	Meschkowski	Mathematiker-Lexikon
428/428a	Seiler	Abbildung von Oberflächen mit Elektronen, Ionen und Röntgenstrahlen
434*	Eltermann	Grundlagen der praktischen Matrizenrechnung
435/435a	Streater/Wightman	Die Prinzipien der Quantentheorie
440/440a	Wehefritz	Physikalische Fachliteratur
443/443a	Hoschek	Mathematische Grundl. der Kartographie
449/449a	Hund	Grundbegriffe der Physik
461/461a	Kamlah	Utopie, Eschatologie, Geschichtsteleologie
468/468a	Kaiser	Chromatographie in der Gasphase III, 2. Teil
472/472a	Kaiser	Chromatographie in der Gasphase IV, 2. Teil
V 703	Böhling/Indermark	Endliche Automaten I

B·I-HOCHSCHULSKRIPTEN

701/701a	Mitter	Quantentheorie
702a-m	Filthuth	Ein Vierteljahrhundert moderner Physik – Otto Haxel zum 60. Geburtstag
801*	Süßmann	Theoretische Mechanik I
802/802a*	Gröbner/Knapp	Contributions to the Method of Lie Series
804*	Müller/Streker	Fortran IV – Programmieranleitung
807/807a	Voigt	Abriß der Astronomie I
808/808a	Brosowski	Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation
810/a/b	Heesch	Untersuchungen zum Vierfarbenproblem
811/811a*	Schultz-Grunow	Elektro- und Magneto-Hydrodynamik
812*	Nitsche	Praktische Mathematik
816/816a	Brandt	Statistische Methoden der Datenanalyse
817*	Brauer/Indermark	Algorithmen, rekursive Funktionen, und formale Sprachen
820/820a	Görke	Elektrische Schaltung
821/821a	Hotz/Walter	Automatentheorie und formale Sprachen
824/824a	Roeßger/Hünermann	Luftverkehrspolitik
825/825a	Scriba/Ellis	The Concept of Number
826/826a	Butzer/Scherer	Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden
828/828a	Lingenberg	Lineare Algebra
830*	Schrader	Die Deformationsmethode
831/831a	Wanner	Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen
832*	Martensen	Analysis I
836/836a	Grotemeyer	Topologie

In Vorbereitung:

140/140a	Heilmann	Antennen I
141/141a	Großkopf	Wellenausbreitung I
158/158a	Lingenberg	Grundlagen der Geometrie
168/168a	Heinhold/Kulisch	Analogrechnen
195/195a	Volkoviskii	Aufgaben zur Funktionentheorie I
234*, 235*	Lebedev	Spezielle Funktionen und ihre Anwendung I, II
290/290a	Laidler	Reaktionskinetik (homogene Gasreaktionen)
330/330a	Czajka	Länderkunde Südamerikas I
345/345a	Schwidetzky	Rassensystematik
358/358a*	Gierloff-Emden/Schroeder-Lanz	Luftbildauswertung
362/362a	Bülow	Die Morphologie der Mondoberfläche
363/363a	Schmithüsen	Geschichte der Geographischen Wissenschaft
422/422a	Rose	Elektronentheorie
438/438a	Barut	S-Matrix-Theorie
462/462a	Gasiorowicz	Elementarteilchenphysik I
803/803a	Schmidt, J.	Allgmeine Algebra
809/809a	Neumann	Biochemisches Praktikum

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT MANNHEIM/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG